Czechoslovak Mathematical Journal

František Nožička

Über einfache Mannigfaltigkeiten im linearen affinen Raum A_n in globaler Auffassung

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 26 (1976), No. 4, 541–578

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101427

Czechoslovak Mathematical Journal, 26 (101) 1976, Praha

ÜBER EINFACHE MANNIGFALTIGKEITEN IN LINEAREM AFFINEN RAUM A_n IN GLOBALER AUFFASSUNG

FRANTIŠEK NOŽIČKA, Praha

(Eingegangen am 18. Dezember 1974)

Eine Anregung zu dieser Arbeit war die Absicht der Aufstellung einer geometrischen Grundlage für allgemeinere qualitative Untersuchungen in der nichtlinearen Optimierung. Es ist wohl bekannt, dass die elementare Theorie der konvexen Polyeder in der linearen und linearen parametrischen Optimierung als eine solche Basis herangezogen werden kann, die eine lückenlose Entwicklung der fraglichen Disziplin gestattet und zugleich eine Aufstellung von wirksamen Verfahren, denen eine klare geometrische Idee zugrunde liegt, ermöglicht. Liegt ein lineares Optimierungsproblem der Form

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathfrak{M}} \{f(\mathbf{x})\} \tag{I}$$

mit der linearen Zielfunktion

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha \quad (\sum_{\alpha=1}^{n} |c_\alpha| > 0)$$

und mit der Restriktionsmenge

$$\mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \mid \sum_{\alpha=1}^{n} a_{r\alpha} x_\alpha \leqq b_r \ (r = 1, \ldots, m)\}$$

vor, so kann die Menge $\mathfrak{M}$ im Falle $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ als ein konvexes Polyeder in einem linearen n-dimensionalen affinen Raum A_n interpretiert werden[1]) (der mit den linearen Koordinaten x_α $(\alpha = 1, \ldots, n)$ versehen ist). Das Optimierungsproblem (I) ist nachher dem folgenden geometrischen Problem äquivalent:

In der Schaar aller Hyperebenen

$$R_k = \{\mathbf{x} \in A_n \mid \sum_{\alpha=1}^{n} c_\alpha x_\alpha = k\}, \quad k \in (-\infty, \infty),$$

[1]) Sieh z. B. [8].

soll eine solche bestimmt werden, die

a) eine Stützhyperebene an das Polyeder $\mathfrak{M}$ ist;

b) das Polyeder $\mathfrak{M}$ liegt in demjenigen dieser Stützhyperebene zugehörigen abgeschlossenen Halbraum, in den der Gradient $\mathbf{c}$ der Zielfunktion gerichtet ist.

Eine ähnliche geometrische Interpretation bei einem nichtlinearen Optimierungsproblem der Gestalt (I) mit einer nichtlinearen Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ (die auch stetig, bzw. stetig differenzierbar über dem ganzen Raum A_n sein möge) und mit einer Restriktionsmenge $\mathfrak{M}$, die z. B. ein abgeschlossenes Gebiet in A_n darstellt, ist allgemein nicht möglich. Jedoch in solchen Fällen, wo die über den ganzen Raum A_n definierte nichtlineare Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ so beschaffen ist, dass jede der Mengen

$$\text{(II)} \qquad R({}_0\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in A_n \,|\, f(\mathbf{x}) = f({}_0\mathbf{x})\}\,, \quad {}_0\mathbf{x} \in \mathfrak{M}\,,$$

den ganzen Raum A_n in zwei disjunkte Gebiete

$$\mathfrak{H}_1({}_0\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in A_u \,|\, f(\mathbf{x}) < f({}_0\mathbf{x})\}\,, \quad \mathfrak{H}_2({}_0\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in A_n \,|\, f(\mathbf{x}) > f({}_0\mathbf{x})\}$$

einteilt, wobei $R({}_0\mathbf{x})$ den den beiden Gebieten $\mathfrak{H}_1({}_0\mathbf{x})$ und $\mathfrak{H}_2({}_0\mathbf{x})$ gemeinsammen Rand darstellt, wäre eine ähnliche geometrische Interpretation des fraglichen Optimierungsproblems möglich. Die konvexen Funktionen besitzen eben eine solche Eigenschaft und da sie auch einige weitere einfache und für den Aufbau einer Optimierungstheorie günstige Eigenschaften haben, konnte sich die Theorie der sogenannten konvexen Optimierung rasch entwickeln und sie steht heute als eine einheitliche Theorie (mit Erweiterungen auf verallgemeinerte Räume) da. Im Falle einer nichtkonvexen (nichtkonkaven) Zielfunktion $f(\mathbf{x})$, die über dem ganzen Raum A_n, bzw. über einem Teilgebiet von A_n stetig, bzw. stetig differenzierbar ist, müsste man eine genauere Information über die Funktion $f(\mathbf{x})$ und über ihre Struktur sowie über die oben angeführten Mengen $R({}_0\mathbf{x})$, $\mathfrak{H}_1({}_0\mathbf{x})$, $\mathfrak{H}_2({}_0\mathbf{x})$ vorhanden haben. Bis auf nichtkonvexe quadratische Zielfunktionen gibt es zurzeit keine eiheitliche Theorie, die die nichtkonvexe Optimierung angeht. Auch die Struktur einer Restriktionsmenge der Gestalt

$$\text{(III)} \qquad \mathfrak{M} = \{\mathbf{x} \in A_n \,|\, g_r(\mathbf{x}) \leqq 0,\ r = 1, \ldots, m\}$$

mit allgemein nichtkonvexen Funktionen $g_r(\mathbf{x})$, $(r = 1, \ldots, m)$, die über A_n, bzw. über einem Teilgebiet von A_n definiert, bzw. stetig, bzw. stetig differenzierbar sind, müsste uns, um einen Weg zur Lösung des entsprechenden Optimierungsproblems vorzuschlagen, vorher näher bekannt werden. Im Falle, wo die Menge $R({}_0\mathbf{x})$ aus (II), bzw. die Mengen

$$V_r = \{\mathbf{x} \in A_n \,|\, g_r(\mathbf{x}) = 0\}\,, \quad r \in \{1, \ldots, m\}\,,$$

mit $g_r(\mathbf{x})$ aus (III) glatte (reguläre) Hyperflächen in A_n im Sinne der klassischen Geometrie darstellen, hätte man einen Anhaltspunkt, eine geometrische Grundlage, mit der man – vielleicht – in der entsprechenden Optimierungsproblematik eine Theorie untermauern könnte. Die Annahme der Glattheit der fraglichen Hyperflächen ist jedoch für eine allgemeinere Theorie zu stark. Wenn wir aber anderseits den Begriff einer Mannigfaltigkeit (spezieller Weise einer Hyperfläche) im Sinne der (lokalen) homeomorphen Abbildung zulassen, so ist wohl bekannt, dass eine solche Mannigfaltigkeit allgemein eine solche Struktur besitzen könnte, die weit von unserer Vorstellung einer Fläche (bzw. einer Kurve, oder einer Hyperfläche) entfernt ist und wo – im Falle einer Hyperfläche – über oben erwähnte Einteilung des Raumes A_n in zwei disjunkte Gebiete keine Rede sein kann. Einen Ausweg aus diesem unangenehmen Zustand könnte eine „vernüftige" und „rein geometrische" Definition einer Mannigfaltigkeit in A_n sein, die eben alle „perversen und wilden" Abarten der Mannigfaltigkeiten, die sich unserer geometrischen Vorstellung einer Mannigfaltigkeit (Kurve, Fläche, Hyperfläche) weit entziehen, ausschliesst. Das bedeutet, dass man sich auf eine ziemlich breite Unterklasse der Mannigfaltigkeiten im Sinne der lokalen homeomorphen Abbildung, die die mit der geometrischen Vorstellung unvereinbaren und unerwünschten Fälle ausschliesst, einschränkt.

Ein weiterer Anlass zu dieser Arbeit kommt von der klassischen Mechanik her, wo die Vorstellung eines festen Körpers (eines Massenkörpers) eine wesentliche Rolle spielt. Die übliche Vorstellung einer Fläche (etwa im euklidischen Raum E_3) ist eben die einer Oberfläche eines festen Körpers im Sinne der klassischen Mechanik. Die Vorstellung einer solchen Oberfläche ist dadurch gekennzeichnet, dass es in jedem Punkt einer solchen Oberfläche eine Richtung gibt, die in das Innere des Körpers gerichtet ist. Unsere spätere Definition einer Fläche (bzw. einer Hyperfläche, falls es um eine Erweiterung auf einen n-dimensionalen Raum A_n ($n \geqq 2$) geht) soll auch diese Tatsache berücksichtigen.

Durch unsere obigen Überlegungen sind wir daher zu dem Problem der Aufstellung einer „natürlichen" geometrischen Definition einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit in A_n gelangt, die diejenigen Fälle, die sich aus der üblichen auf dem Begriff des lokalen Homeomorphismus fundierten Definition einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit ergeben und keineswegs unserer geometrischen Vorstellung über eine solche Mannigfaltigkeit entsprechen, ausschliesst. Die übliche Definition einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit z. B. in einem euklidischen Raum E_l ($1 \leqq d \leqq l$) ist die folgende[2]):

Eine nichtleere Menge H eines l-dimensionalen euklidischen Raumes E_l heisst eine d-dimensionale ($1 \leqq d \leqq l$) Fläche, falls jeder Punkt $q_0 \in H$ eine Umgebung U in H in der Weise besitzt, die homeomorph zu einer offenen Teilmenge eines d-dimensionalen euklidischen Raumes ist (Dabei ist der Begriff der Umgebung U von q_0 in H vorher präzisiert worden).

Auch der Begriff eines allgemeinen n-dimensionalen Raumes betrachtet als eine Mannigfaltigkeit an und für sich (also ohne irgendeiner Eibettung in einen Raum

[2]) Sieh z. B. [9].

einer höheren Dimension) führt auf den Begriff der lokalen homeomorphen Abbildung zurück ([10]). Wie schon oben erwähnt wurde, entzieht sich allgemein ein solcher Begriff einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit in speziellen Fällen vollkommen unseren geometrischen Vorstellungen. Die auf dem Begriff des lokalen Homeomorphismus aufgestellte Definition einer Mannigfaltigkeit hat zwar einen grossen Spielraum für die in der geometrischen Topologie angagierten Mathematiker dargeboten (und sie bietet ihn für den Fall $n \geqq 3$ noch heute an), jedoch die praktische Ausnutzung der hier erzielten hervorragenden Ergebnisse wird (z. B. in der Optimierungstheorie) in Frage gestellt. Neben der geometrischen Topologie, die sich mehr und mehr auf das Studium der stetigen Abbildungen orientiert hat, enstand die globale Geometrie, die dem Gebiet des geometrischen Denkens und Vorstellung treu geblieben ist. Die Ideen und Ergebnisse von B. v. Kerékjárto ([6]) stehen im Grenzgebiet zwischen Topologie und der globalen Geometrie; man findet hier eine globale Auffassung einer Fläche mit ihrer topologischen Charakteristik. Die Entwicklung der globalen Geometrie ist besonders in drei Richtungen zu verzeichnen:

1. Globale Geometrie der Riemannschen Räume, die an die Nahmen E. Cartan ([4]), H. Hopf - W. Rinow ([3]) zurückzuführen ist;
2. Geometrie der konvexen Flächen, der die Ergebnisse von A. D. Alexandrov ([2]) als theoretische Basis vorliegt;
3. Globale Differentialgeometrie in Räumen mit affiner Konnexion ([7], [8]).

Auch in allen diesen globalen geometrischen Untersuchungen wird der Begriff einer Mannigfaltigkeit im Sinne der lokalen homeomorphen Abbildung als selbstverständlich angenommen, jedoch mit der Abschwächung, dass gewisse weitere Voraussetzungen gelten (stetige Differenzierbarkeit, Konvexität). Diese Voraussetzungen schränken dann offenbar die Menge der denkbaren homeomorphen Abbildungen ein und man kann erwarten, dass in solchen Fällen die entsprechenden Mannigfaltigkeiten eine „vernüftige" Struktur besitzen, die unserer geometrischen Vorstellung über eine Fläche der betreffenden Dimension entspricht. Eine Anregung der Bourbakisten ([3]) eine Geometrie „im ganzen" in verallgemeinerten Räumen aufzubauen, die kein Koordinatensystem benötigt, schlägt in die Zukunft einen Weg ein, der das geometrische Denken in verschiedenen mathematischen Disziplinen, die insbesondere die komplizierten Probleme der Praxis angehen, in Vordergrund der Untersuchungen und der Aufstellung von mathematischen Modellen stellen wird.

Die Zielstellungen dieser Arbeit sind die folgenden:

(1) Der Begriff einer d-dimensionalen Mannigfaltigkeit in A_n $(1 \leqq d < n)$ soll in der Weise eigenführt werden, dass diese Mannigfaltigkeit eine Mannigfaltigkeit im Sinne der lokalen homeomorphen Abbildung ist, die aber der geometrischen Vorstellung über eine Mannigfaltigkeit nicht entweicht; die in der klassischen Geometrie betrachteten regulären Mannigfaltigkeiten (im Sinne der Definition von Gauss, bzw. von Monge) sollen eine Teilklasse dieser Mannigfaltigkeiten bilden.

(2) Die Klasse der definierten Mannigfaltigkeiten soll auch diejenigen Mannigfaltigkeiten enthalten, die in den bisherigen Untersuchungen in der globalen Geometrie betrachtet wurden.

(3) Im Falle $n = 3$ soll die zweidimensionale Mannigfaltigkeit (Fläche) der Vorstellung der Oberfläche eines festen Körpers (in voller Allgemeinheit) ausreichend entsprechen.

(4) Die eingeführten geometrischen Grundbegriffe, bzw. die Herleitung ihrer Grundeigenschaften, benötigt kein Koordinatensystem.

(5) Es sollen einige Grundeigenschaften (globale) einer einfachen abgeschlossenen Hyperfläche in A_n hergeleitet werden.

Im Teil I der Arbeit wird zuerst der Begriff des lokalen Berührungskegels einer beliebigen Menge $M \subset A_n$ in ihrem Punkt eingeführt. Dieser Begriff ist nicht neu, man findet ihn z. B. in [1], wo dieser Kegel auf eine andere Weise, die einer Anwendung in der konvexen Optimierung geeignet ist, definiert wurde. Durch Definition 9 wird der Grundbegriff einer einfachen d-dimensionalen Mannigfaltigkeit in A_n eingeführt und der Satz 3 gibt an, dass jede einfache d-dimensionale Mannigfaltigkeit im Sinne der Definition 9 sich lokal homeomorph auf ein beschränktes Gebiet eines d-dimensionalen affinen Raumes A_d abbilden lässt. Weiter wurden die Begriffe einer einfachen Kurve, einfacher d-dimensionaler Fläche und einfacher Hyperfläche in A_n eingeführt. Weitere Definitionen gehen die Begriffe der glatten einfachen Mannigfaltigkeiten sowie der geschlossenen einfachen Kurve, bzw. Fläche, bzw. Hyperfläche an. Es wird der Begriff eines einfachen d-dimensionalene Gewölbes in A_n eingeführt.

Im Teil II der Arbeit werden einige globalen geometrischen Eigenschaften der einfachen Hyperflächen in A_n untersucht (Behauptung 1–4). Der Schwerpunkt der Arbeit liegt im Beweis der Sätze 4, 5 und 6. Die Sätze 4 und 5 geben Bedingungen, unter welchen eine einfache Hyperfläche in A_n den Raum A_n in zwei disjunkte Gebiete einteilt, an; durch den Satz 6 wird auf die Nichtexistenz von unilateraren Hyperflächen, die zugleich abgeschlossene Mengen in A_n sind, hingewiesen. Anschliessend wird der Begriff eines geometrischen Körpers in A_n eingeführt und zwar auf eine solche Art und Weise, dass für den Fall $n = 3$ der Rand eines solchen Körpers der Vorstellung der Oberfläche eines festen Massenkörpers im Sinne der klassischen Mechanik ausreichend entspricht. Die zuletz angeführte Definition eines einfach zusammenhängenden Gebietes in A_n soll als ein Versuch sich von der üblichen Definition dieses Begriffs, der für $n \geqq 3$ auf dem Begriff der Homotopie basiert, zu distanzieren, angesehen werden.

1. LOKALE BERÜHRUNGSKEGEL EINER MENGE IM LINEAREN AFFINEN RAUM A_n

Es sei A_n $(n \geqq 1)$ ein n-dimensionaler linearer affiner Raum. Durch einen festgewählten Punkt ${}_0\mathbf{x} \in A_n$ und einen Vektor $\mathbf{v} \neq 0$ ist die Halbgerade

$$p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid \mathbf{x} = {}_0\mathbf{x} + \mathbf{v}t,\ t \in (0, \infty)\} \tag{1}$$

mit dem Anfangspunkt ${}_0\mathbf{x}$ in Richtung des Vektors $\mathbf{v}$ in A_n festgewählt.

Definition 1. Falls $P({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ ein beliebiger polyedrischer Kegel in A_n mit den Eigenschaften

(a) $$\dim P({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) = n\,,$$

(b) ${}_0\mathbf{x}$ ist der einzige Scheitel von $P({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$,

(c) (2) $$p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) \subset \operatorname{int} P({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})\,,$$

so heisst die Menge

$$U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) = \operatorname{int} P({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) \tag{3}$$

eine polyedrische Umgebung der Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ *in* A_n.

Definition 2. Es sei $U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ eine beliebige polyedrische Umgebung der Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ aus (1) und H ein offener Halbraum in A_n mit dem Rand R_H und mit den Eigenschaften

1. ${}_0\mathbf{x} \in H$,
2. $U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) \cap R_H \neq \emptyset$

und beschränkt.

Unter diesen Voraussetzungen heisst die Menge

$$\gamma(H; P) = U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) \cap R_H \tag{4}$$

ein echter Schnitt der polyedrischen Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ von $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$.

Definition 3. Ein echter Schnitt $\gamma'(H'; P)$ von $U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ heisst feiner als ein anderer echter Schnitt $\gamma(H; P)$ von derselben Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$, falls

$$\gamma'(H'; P) \subset (H \cap U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})) \tag{5}$$

gilt.

Bemerkung 1. Falls $\gamma'(H'; P)$ feiner als $\gamma(H; P)$ ist, so deuten wir diese Tatsache einfach durch

$$\gamma'(H'; P) \prec \gamma(H; P) \tag{6}$$

an. Offenbar gilt

$$\gamma''(H''; P) \prec \gamma'(H'; P)\,, \quad \gamma'(H'; P) \prec \gamma(H; P) \Rightarrow \gamma''(H''; P) \prec \gamma(H; P)\,.$$

Definition 4. Es sei ${}_0\mathbf{x}$ ein festgewählter Punkt einer gegebenen Menge $M \subset A_n$. Eine Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ mit der Eigenschaft, dass für eine jede polyedriche Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ von $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$ ein echter Schnitt $\gamma(H; P)$ in der Weise existiert, dass

$$\gamma'(H'; P) \cap M \neq \emptyset \quad \text{für alle} \quad \gamma'(H'; P) \prec \gamma(H; P)$$

gilt, heisst eine σ-Halbgerade im Punkt ${}_0\mathbf{x} \in M$.

Definition 5. Es sei ${}_0\mathbf{x}$ ein festgewählter Punkt einer gegebenen Menge $M \subset A_n$ und

$$\sum_\sigma p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v})$$

die Menge aller σ-Halbgeraden im Punkt ${}_0\mathbf{x} \in M$. Die Menge

$$K_M({}_0\mathbf{x}) = \{{}_0\mathbf{x}\} \cup \sum_\sigma p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) \tag{7}$$

heisst *der Berührungskegel von M im Punkt ${}_0\mathbf{x} \in M$.*

Satz 1. *Für einen jeden Punkt ${}_0\mathbf{x} \in M \subset A_n$ stellt die Menge $K_M({}_0\mathbf{x})$ einen in A_n abgeschlossenen Kegel dar.*

Beweis. Ist $\sum_\sigma p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) = \emptyset$, oder, $\sum_\sigma p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) = A_n - \{{}_0\mathbf{x}\}$, so ist im ersten Fall $K_M({}_0\mathbf{x}) = \{{}_0\mathbf{x}\}$, im zweiten $K_M({}_0\mathbf{x}) = A_n$ und in beiden diesen Fällen gilt offenbar die Behauptung des Satzes. Falls keiner dieser Fälle eintritt, so gibt es mindestens einen Grenzpunkt $\mathbf{x}^1 \neq {}_0\mathbf{x}$ der Menge $K_M({}_0\mathbf{x})$. Aus der Definition von $K_M({}_0\mathbf{x})$ ergibt sich unmittelbar, dass $K_M({}_0\mathbf{x})$ ein Kegel in A_n mit einem Scheitel im Punkt ${}_0\mathbf{x}$ ist.[1])

[1]) Ein einziger Punkt in A_n wird als ein null-dimensionaler Kegel definiert. Eine Menge $K \subset A_n$ heisst ein Kegel in A_n, falls es mindestens einen solchen Punkt ${}_0\mathbf{x} \in K$ gibt, dass für einen jeden Punkt $\mathbf{x} \in K$, $\mathbf{x} \neq {}_0\mathbf{x}$, die durch die Punkte ${}_0\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ bestimmte Halbgerade, die den Punkt ${}_0\mathbf{x}$ als Anfangspunkt besitzt, ebenfalls dem Kegel K angehört.

Es sei im Falle

$$\emptyset \neq \sum_{\sigma} p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{v}) \neq A_n - \{{}_0\mathbf{x}\} \tag{8}$$

der Punkt $\mathbf{x}^1 \neq {}_0\mathbf{x}$ ein Grenzpunkt der Menge $K_M({}_0\mathbf{x})$ und $U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x})$ eine beliebige polyedrische Umgebung der Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x})$. Da $\mathbf{x}^1$ ein Grenzpunkt des Kegels $K_M({}_0\mathbf{x})$ ist, gibt es (mindestens) einen Punkt $^*\mathbf{x} \in K_M({}_0\mathbf{x})$ mit $^*\mathbf{x} \in U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x})$, $^*\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^1$. Die Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; {}^*\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x})$ ist dann – mit Hinsicht auf die Definition des Kegels $K_M({}_0\mathbf{x})$ – eine σ-Halbgerade im Punkt ${}_0\mathbf{x} \in M$ mit der Eigenschaft

$$p({}_0\mathbf{x}; {}^*\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}) \subset U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x}).$$

Es gibt dann offenbar eine polyedrische Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; {}^*\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x})$ der Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; {}^*\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x})$ mit

$$U({}_0\mathbf{x}; {}^*\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x}) \subset U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x}). \tag{9}$$

Da die Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; {}^*\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x})$ eine σ-Halbgerade im Punkte ${}_0\mathbf{x} \in M$ ist, so gibt es einen echten Schnitt

$$\gamma({}^*H; {}^*P) \quad \text{mit} \quad {}^*P = \bar{U}({}_0\mathbf{x}; {}^*\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x})$$

in der Weise, dass für einen jeden anderen echten Schnitt $\gamma(H; {}^*P)$ der polyedrischen Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; {}^*\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x})$ der Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; {}^*\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x})$ mit der Eigenschaft

$$\gamma(H; {}^*P) \prec \gamma({}^*H; {}^*P)$$

die Bedingung

$$\gamma(H; {}^*P) \cap M \neq \emptyset$$

gilt. Offenbar gibt es auch einen echten Schnitt $\gamma({}_1H; {}^*P)$ der polyedrischen Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; {}^*\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x})$ mit

$$\gamma({}_1H; {}^*P) \prec \gamma({}^*H; {}^*P),$$

$$\gamma({}_1H; P) = U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x}) \cap R_H \neq \emptyset, \quad \gamma({}_1H; P) \tag{10}$$

beschränkt in A_n mit $P = \bar{U}({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x})$. Die Menge $\gamma({}_1H; P)$ is daher ein echter Schnitt der Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x})$ der Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x})$. Daraus und aus (9) folgt

$$\gamma({}_1H; {}^*P) \subset \gamma({}_1H; P). \tag{11}$$

Falls nun $\gamma('H; P)$ ein beliebiger echter Schnitt der polyedrischen Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x})$ mit

$$\gamma('H; P) \prec \gamma({}_1H; P) \tag{12}$$

ist, so gilt nach (9)

$$\gamma('H; {}^*P) \subset \gamma('H; P), \tag{13}$$

wobei $\gamma('H; {}^*P)$ ein echter Schnitt der polyedrischen Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; {}^*\mathbf{x} - {}_0\mathbf{x})$ ist, für den zugleich

$$\gamma('H; {}^*P) \prec \gamma({}_1H; {}^*P)$$

gilt. Nach (10) folgt daraus

$$\gamma('H; {}^*P) \prec \gamma({}^*H; {}^*P), \quad \gamma('H; {}^*P) \cap M \neq \emptyset$$

und nach (13) weiter

$$\gamma('H; P) \cap M \neq \emptyset.$$

Da $\gamma('H; P)$ ein beliebiger echter Schnitt der polyedrischen Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x})$ mit der Eigenschaft (12) ist, folgt daraus und aus der Definition 4, dass die Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x})$ eine σ-Halbgerade im Punkt ${}_0\mathbf{x} \in M$ ist. Nach Definition des Kegels $K_M({}_0\mathbf{x})$ gehört die Halbgerade $p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x})$ dem Kegel $K_M({}_0\mathbf{x})$ an und da $\mathbf{x}^1 \in p({}_0\mathbf{x}; \mathbf{x}^1 - {}_0\mathbf{x})$ gilt, ist auch $\mathbf{x}^1 \in K_M({}_0\mathbf{x})$. Der Punkt $\mathbf{x}^1(\mathbf{x}^1 \neq {}_0\mathbf{x})$ wa aber ein beliebiger Grenzpunkt von $K_M({}_0\mathbf{x})$ und da der Punkt ${}_0\mathbf{x}$ als Grenzpunkt von $K_M({}_0\mathbf{x})$ dem Kegel $K_M({}_0\mathbf{x})$ ebenfalls angehört (nach Definition 5), folgt daraus, dass $K_M({}_0\mathbf{x})$ eine in A_n abgeschlossene Menge ist.

Bemerkung 2. Falls ${}_0\mathbf{x}$ ein innerer Punkt einer Menge $M \subset A_n$ ist, so gilt offenbar $K_M({}_0\mathbf{x}) = A_n$. Falls L die lineare Hülle einer Menge $M \subset A_n$ und ${}_0\mathbf{x}$ ein innerer Punkt von M bezüglich L ist (d. h. ${}_0\mathbf{x} \in \text{rel. int } M$), so gilt $K_M({}_0\mathbf{x}) = L$.

Definition 6. Falls $K_M({}_0\mathbf{x})$ der Berührungskegel einer gegebenen Menge $M \subset A_n$ in ihrem Punkte ${}_0\mathbf{x}$ ist und $cK_M({}_0\mathbf{x})$ die konvexe Hülle von $K_M({}_0\mathbf{x})$ bedeutet, so heisst die Zahl

$$d = d({}_0\mathbf{x}) = \dim cK_M({}_0\mathbf{x})$$

die lokale Charakteristik der Menge M in ihrem Punkt ${}_0\mathbf{x}$.

2. EINFACHE d-DIMENSIONALE MANNIGFALTIGKEITEN IN A_n

Unter dem Begriff einer polyedrischen Umgebung $U_P({}_0\mathbf{x})$ eines Punktes ${}_0\mathbf{x} \in A_n$ versteht man den Innenraum int P eines (beliebigen) beschrängten n-dimensionalen konvexen Polyeders $P \subset A_n$ mit ${}_0\mathbf{x} \in \text{int } P$.

Ein Paar von linearen Unterräumen L_d, ${}^*L_{n-d}$ in A_n mit $\dim L_d = d$, $\dim {}^*L_{n-d} = n - d$ $(1 \leqq d < n)$ heisst ein Paar von affin-dualen linearen Unterräumen im Punkt ${}_0\mathbf{x} \in A_n$, falls

$$L_d \cap {}^*L_{n-d} = \{{}_0\mathbf{x}\}$$

gilt. Ist $'L_d$ ein mit L_d parallerer d-dimensionaler Unterraum, so stellt der Durchschnitt $'L_d \cap {}^*L_{n-d}$ ebenfalls einen einzigen Punkt in A_n dar.

Definition 7. Es sei L_d ein d-dimensionaler linearer Unterraum in A_n $(1 \leqq d < n)$, ${}_0\mathbf{x} \in L_d$ beliebig und ${}^*L_{n-d}$ ein $(n - d)$-dimensionaler linearer Unterraum in A_n, so dass L_d, ${}^*L_{n-d}$ ein Paar von affin-dualen linearen Unterräumen im Punkt ${}_0\mathbf{x}$ darstellen. Es sei weiter P ein beliebiges konvexes Polyeder in A_n mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $\dim P = n$;

(b) $L_d \subset \operatorname{int} P$ und es gibt keinen d'-dimensionalen linearen Unterraum in A_n mit $d' > d$, der dieselbe Eigenschaft hätte;

(c) $P \cap {}^*L_{n-d}$ ist eine in A_n beschränkte Menge.

Die Menge

$$U_P(L_d) = \operatorname{int} P \tag{15}$$

nennt man dann die polyedrische Umgebung des linearen Unterraumes L_d. Die Menge

$$\gamma({}^*L_{n-d}; P) = U_P(L_d) \cap {}^*L_{n-d} \tag{16}$$

heisst *ein echter Schnitt der polyedrischen Umgebung $U_P(L_d)$ von L_d.*

Bemerkung 3. Bezeichnet man

$${}^*U_P^{(n-d)}({}_0\mathbf{x}) = \gamma({}^*L_{n-d}; P),$$

so stellt offenbar die Menge ${}^*U_P^{(n-d)}({}_0\mathbf{x})$ eine polyedrische Umgebung des Punktes ${}_0\mathbf{x} \in {}^*L_{n-d}$ dar (wobei $L_d \cap {}^*L_{n-d} = \{{}_0\mathbf{x}\}$ nach Voraussetzung).

Satz 2. *Sind L_d, ${}^*L_{n-d}$ affin-duale lineare Unterräume im Punkt ${}_0\mathbf{x} \in A_n$, $U_P(L_d)$ (bzw. $U_{*P}({}^*L_{n-d})$) eine beliebige polyedrische Umgebung des linearen Unterraumes L_d (bzw. ${}^*L_{n-d}$), so stellt die Menge*

$$U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) = U_P(L_d) \cap U_{*P}({}^*L_{n-d}) \tag{17}$$

eine polyedrische Umgebung des Punktes ${}_0\mathbf{x}$ dar.

Beweis. Nach Definition 7 stellt jede der Mengen $U_P(L_d)$, $U_{*P}({}^*L_{n-d})$ eine in A_n offene (und daher n-dimensionale) Menge mit

$${}_0\mathbf{x} \in U_P(L_d), \quad {}_0\mathbf{x} \in U_{*P}({}^*L_{n-d})$$

dar. Daraus und aus (17) folgt, dass ebenfalls die Menge $U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ eine in A_n offene Menge mit ${}_0\mathbf{x} \in U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ ist. Nach Definition 7 sind $\overline{U}_P(L_d)$, $\overline{U}_{*P}({}^*L_{n-d})$

konvexe Polyeder in A_n und daher, nach (17), stellt die Menge $\bar{U}({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ ebenfalls ein konvexes Polyeder in A_n dar. Wegen ${}_0\mathbf{x} \in U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$, $\dim U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) = n$, ist $\bar{U}({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ ein n-dimensionales konvexes Polyeder in A_n mit ${}_0\mathbf{x} \in \operatorname{int} \bar{U}({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) = U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$. Es bleibt daher zu zeigen, dass $\bar{U}({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ ein beschränktes Polyeder in A_n ist. Dies soll nun indirekt bewiesen werden. Angenommen, dass $\bar{U}({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ unbeschränkt ist, gibt es eine, aus dem Punkt ${}_0\mathbf{x}$ ausgehende Halbgerade p mit $p \in U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$. Nach (17) gilt dann auch $p \in U_P(L_d)$, $p \in U_{*P}({}^*L_{n-d})$. Da d (bzw. $n - d$) die Dimension des grössten in $\bar{U}_P(L_d)$ (bzw. in $\bar{U}_{*P}({}^*L_{n-d})$) enthaltenen linearen Unterraumes ist, muss notwendig $p \subset L_d$ (bzw. $p \subset {}^*L_{n-d}$) sein, d. h. $p \in L_d \cap {}^*L_{n-d}$. Dies steht aber im Widerspruch mit $L_d \cap {}^*L_{n-d} = \{{}_0\mathbf{x}\}$.

Definition 8. Die in (17) definierte Menge $U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ heisst *zylindrische polyedrische Umgebung des Punktes ${}_0\mathbf{x} \in A_n$, die dem Paar L_d, ${}^*L_{n-d}$ von affin-dualen Unterräumen in ${}_0\mathbf{x}$ angehört.*

Definition 9. Es sei $M \subset A_n$ eine Menge mit den folgenden Eigenschaften:

(1) Zu jedem Punkt ${}_0\mathbf{x} \in M$ gibt es ein Paar $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$, ${}^*L_d({}_0\mathbf{x})$ $(1 \leqq d < n)$ von affin-dualen Unterräumen mit

$$L_{n-d}({}_0\mathbf{x}) \cap {}^*L_d({}_0\mathbf{x}) = \{{}_0\mathbf{x}\}$$

und eine solche zylindrische polyedrische Umgebung

$$U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) = U_P(L_{n-d}({}_0\mathbf{x})) \cap U_{*P}({}^*L_d({}_0\mathbf{x}))$$

des Punktes ${}_0\mathbf{x}$ [2], die dem Paar $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$, ${}^*L_d({}_0\mathbf{x})$ von affin-dualen Unterräumen im Punkt ${}_0\mathbf{x}$ angehört und die folgende Eigenschaft besitzt: Falls ${}'L_{n-d}$ ein $(n - d)$-dimensionaler mit dem linearen Unterraum $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$ paralleler linearer Unterraum in A_n mit

$${}'L_{n-d} \cap U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) \neq \emptyset$$

ist, so stellt die Menge

$${}'L_{n-d} \cap U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) \cap M$$

genau einen Punkt dar.

(2) Ist $\mathbf{x} \in U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) \cap M$ beliebig und $L_{n-d}(\mathbf{x})$ (bzw. ${}^*L_d(\mathbf{x})$) der mit dem linearen Unterraum $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$ (bzw. ${}^*L_d({}_0\mathbf{x})$) paralleler Unterraum, der den Punkt $\mathbf{x}$ enthält, so gilt: Zu jeder polyedrischen Umgebung $U_{*P'}({}^*L_d(\mathbf{x}))$ mit

$$U_{*P'}({}^*L_d(\mathbf{x})) \subset U_{*P}({}^*L_d({}_0\mathbf{x}))$$

---

[2]) $U_P(L_{n-d}({}_0\mathbf{x}))$ (bzw. $U_{*P}({}^*L_d({}_0\mathbf{x}))$) ist eine polyedrische Umgebung des linearen Unterraumes $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$ (bzw. ${}^*L_d({}_0\mathbf{x})$).

gibt es eine polyedrische Umgebung

$$U_{P'}(L_{n-d}(\mathbf{x})) \subset U_P(L_{n-d}({}_0\mathbf{x}))$$

der Art, dass die zylindrische polyedrische Umgebung

$$U(\mathbf{x}; P', {}^*P') = U_{P'}(L_{n-d}(\mathbf{x})) \cap L_{*P'}({}^*L_d(\mathbf{x}))$$

dieselbe Eigenschaft wie die Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ besitzt, d. h. jeder mit $L_{n-d}(\mathbf{x})$ paraleller linearer Unterraum $'L_{n-d}$ mit $'L_{n-d} \cap U(\mathbf{x}; P', {}^*P') \neq \emptyset$ hat genau einen gemeinsamen Punkt mit der Menge $U(\mathbf{x}; P', {}^*P') \cap M$.

Unter diesen Umständen heisst die Menge M *eine einfache d-dimensionale Mannigfaltigkeit in* A_n.

Satz 3. *Eine einfache d-dimensionale Mannigfaltigkeit in A_n lässt sich lokal homeomorph auf ein beschränktes Gebiet eines d-dimensionalen affinnen Raumes A_d abbilden.*

Beweis. Es sei $M \subset A_n$ eine einfache d-dimensionale Mannigfaltigkeit im Sinne der Definition 9 und ${}_0\mathbf{x} \in M$ beliebig festgewählt. Für den Punkt ${}_0\mathbf{x}$ sind daher die Bedingungen (1), (2) aus Definition 9 erfüllt. Nach Bedingung (1) gibt es ein Paar $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$, ${}^*L_d({}_0\mathbf{x})$ von affindualen Unterräumen in dem Punkt ${}_0\mathbf{x}$ und eine solche zylindrische polyedrische Umgebung $U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ mit den Eigenschaften aus Bedingung (1). Wir führen nun in A_n ein spezielles lineares Koordinatensystem folgendermassen ein: Den Punkt ${}_0\mathbf{x}$ wählen wir zum Koordinatenursprung in A_n, zur Vektorbasis wählt man ein System von Vektoren ${}_\alpha\mathbf{a}$ ($\alpha = 1, \dots, n$), wobei ${}_1\mathbf{a}, \dots, {}_d\mathbf{a}$ linear unabhängige Vektoren, die mit ${}^*L_d({}_0\mathbf{x})$ inzident, ${}_{d+1}\mathbf{a}, \dots, {}_n\mathbf{a}$ linear unabhängige Vektoren, die mit $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$ inzident sind. Für jeden Punkt $\mathbf{x} \in A_n$ gilt dann

$$\mathbf{x} = {}_0\mathbf{x} + \textstyle\sum_\alpha \mathbf{a}x^\alpha\,,$$

wobei x^α ($\alpha = 1, \dots, n$) die entsprechenden Koordinaten des Punktes $\mathbf{x}$ in dem fraglichen Bezugssystem in A_n sind. Offenbar gilt

$$^*L_d({}_0\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid x^\alpha = 0,\ \alpha = d + 1, \dots, n\}\,,$$

$$L_{n-d}({}_0\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid x^\alpha = 0,\ \alpha = 1, \dots, d\}$$

und die Elemente x^α mit $\alpha = 1, \dots, d$ (bzw. x^α mit $\alpha = d + 1, \dots, n$) stellen dann lineare Koordinaten in ${}^*L_d({}_0\mathbf{x})$ (bzw. in $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$) bei der Wahl ${}_1\mathbf{a}, \dots, {}_d\mathbf{a}$ (bzw. ${}_{d+1}\mathbf{a}, \dots, {}_n\mathbf{a}$) der Vektorbasis mit dem Koordinatenursprung ${}_0\mathbf{x}$ in ${}^*L_d({}_0\mathbf{x})$ (bzw. in $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$) dar. Ist ${}^*P$ (bzw. P) ein beliebiges beschränktes d-dimensionales (bzw. $(n - d)$-dimensionales Polyeder in ${}^*L_d({}_0\mathbf{x})$ (bzw. in L_{n-d} $({}_0\mathbf{x})$) mit ${}_0\mathbf{x} \in \operatorname{int} {}^*P$ (bzw. mit ${}_0\mathbf{x} \in \operatorname{int} P$), so stellt die Menge int ${}^*P$ (bzw. int P) eine polyedrische Umgebung in $^*L_d({}_0\mathbf{x})$ (bzw. in $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$ des Punktes ${}_0\mathbf{x}$ und die Menge

$$U_{*P}(^*L_d({}_0\mathbf{x})) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid \{x^1, \ldots, x^d\} \in \operatorname{int} {}^*P\}$$

(bzw. $U_P(L_{n-d}({}_0\mathbf{x})) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid \{x^{d+1}, \ldots, x^n\} \in \operatorname{int} P\}$ eine polyedrische Umgebung des linearen Unterraumes $^*L_d({}_0\mathbf{x})$ (bzw. $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$) dar. Die Menge

$$U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid \{x^1, \ldots, x^d\} \in \operatorname{int} {}^*P\,,\ \{x^{d+1}, \ldots, x^n\} \in \operatorname{int} P\}$$

ist dann eine zylindrische polyedrische Umgebung des Punktes ${}_0\mathbf{x}$, die dem Paar von affin-dualen Unterräumen $^*L_d({}_0\mathbf{x})$, $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$ angehört (nach Definition 8). Ist $\{'x^1, \ldots, 'x^d\} \in \operatorname{int} {}^*P$ festgewählt, so stellt die Menge

$$'L_{n-d} = \{\mathbf{x} \in A_n \mid x^\alpha = {}'x^\alpha,\ \alpha = 1, \ldots, d\}$$

einen mit dem linearen Unterraum $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$ parallelen linearen Unterraum, der die Eigenschaft $'L_{n-d} \cap U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) \neq \emptyset$ besitzt, dar. Nach Bedingung (1), Definition 9, gibt es solche Polyeder $P \in L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$, $^*P \in {}^*L_d({}_0\mathbf{x})$ mit den obigen Eigenschaften in der Weise, dass ein jeder mit $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$ paraleller linearer Unterraum $'L_{n-d}$ mit $'L_{n-d} \cap U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) \neq \emptyset$ die Menge $U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) \cap M$ in einem einzigen Punkt schneidet. Daraus und aus den obigen Überlegungen ergibt sich, dass es Funktionen $x^s(x^1, \ldots, x^d)$, $s = d + 1, \ldots, n$, die für $\{x^1, \ldots, x^d\} \in \operatorname{int} {}^*P$ definiert sind, in der Weise gibt, dass

$$(18)\qquad M \cap U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid x^s = x^s(x^1, \ldots, x^d),\ s = d + 1, \ldots, n\,,\ \{x^1, \ldots, x^d\} \in \operatorname{int} {}^*P\}$$

gilt.

Wir zeigen nun, dass die Funktionen $x^s(x^1, \ldots, x^d)$, $s = d + 1, \ldots, n$, stetig über der Menge $\operatorname{int} {}^*P \subset {}^*L_d({}_0\mathbf{x})$ sind. Ist $\mathbf{x}_1 \in M \cap U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ beliebig festgewählt, so gibt es nach (18) genau einen Punkt $\{x_1^1, \ldots, x_1^d\} \in \operatorname{int} {}^*P$ mit

$$x_1^s = x^s(x_1^1, \ldots, x_1^d)\,, \quad s = d + 1, \ldots, n\,,$$

wobei $\mathbf{x}_1 = \{x_1^\alpha\}$ ist. Es sei $L_{n-d}(\mathbf{x}_1)$ (bzw. $^*L_d(\mathbf{x}_1)$) derjenige mit $L_{n-d}({}_0\mathbf{x})$) (bzw. mit $^*L_d({}_0\mathbf{x})$) paralleler linearer Unterraum, der den Punkt $\mathbf{x}_1$ enthält. Nach Bedingung (2) aus Definition 9 gibt es zu jeder polyedrischen Umgebung $U_{*P'}(^*L_d(\mathbf{x}_1))$ mit $U_{*P'}(^*L_d\mathbf{x}_1)) \subset U_{*P}(^*L_d({}_0\mathbf{x}))$ eine polyedrische Umgebung $U_{P'}(L_{n-d}(\mathbf{x}_1)) \subset U_P(L_{n-d}({}_0\mathbf{x}))$ in der Weise, dass die zylindrische polyedrische Umgebung

$$U(\mathbf{x}_1; P', {}^*P') = U_{P'}(L_{n-d}(\mathbf{x}_1)) \cap U_{*P'}\ (^*L_d(\mathbf{x}_1))$$

des Punktes $\mathbf{x}_1$ die Eigenschaft hat, dass ein jeder mit $L_{n-d}(\mathbf{x}_1)$ paraleller linearer Unterraum $'L_{n-d}$ mit $'L_{n-d} \cap U(\mathbf{x}_1; P', {}^*P') \neq \emptyset$ die Menge $M \cap U(\mathbf{x}_1; P', {}^*P')$ genau in einem einzigen Punkt schneidet. Wählt man nun $\varepsilon > 0$ genügend klein, so stellt die Menge

$$U_\varepsilon(*L_d(\mathbf{x}_1)) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid |x^\alpha - x_1^\alpha| < \varepsilon,\ \alpha = d + 1, \ldots, n\}$$

ebenfalls eine polyedrische Umgebung mit

$$U_\varepsilon(*L_d(\mathbf{x}_1)) \subset U_{*P}(*L_d({}_0\mathbf{x}))$$

von $*L_d(\mathbf{x}_1)$ dar, zu der ebenfalls eine polyedrische Umgebung $U_{P'(\varepsilon)}(L_{n-d}(\mathbf{x}_1)) \subset$ $\subset U_P(L_{n-d}({}_0\mathbf{x}))$ von $L_{n-d}(\mathbf{x}_1)$ in der Weise existiert, dass die zylindrische polyedrische Umgebung

$$U_\varepsilon(\mathbf{x}_1; P'(\varepsilon)) = U_\varepsilon(*L_d(\mathbf{x}_1)) \cap U_{P'(\varepsilon)}(L_{n-d}(\mathbf{x}_1))$$

von $\mathbf{x}_1$ die folgende Eigenschaft besitzt: Ein jeder mit $L_{n-d}(\mathbf{x}_1)$ paralleler linearer Unterraum $'L_{n-d}$ mit $'L_{n-d} \cap U_\varepsilon(\mathbf{x}_1; P'(\varepsilon)) \neq \emptyset$ schneidet die Menge $M \cap U_\varepsilon(\mathbf{x}_1;$ $P'(\varepsilon))$ genau in einem einzigen Punkt durch. Es existiert daher auch ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ in der Weise, dass die Menge

$$U_\delta(L_{n-d}(\mathbf{x}_1)) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid |x^\alpha - x_1^\alpha| < \delta,\ \alpha = 1, \ldots, d\}$$

ein polyedrische Umgebung von $L_{n-d}(\mathbf{x}_1)$ mit

$$U_\delta(L_{n-d}(\mathbf{x}_1)) \subset U_{P'(\varepsilon)}(L_{n-d}(\mathbf{x}_1)) \subset U_{P'}(L_{n-d}({}_0\mathbf{x}))$$

darstellt, so dass die entsprechende zylindrische polyedrische Umgebung

$$U_{\varepsilon\delta}(\mathbf{x}_1) = U_\varepsilon(*L_d(\mathbf{x}_1)) \cap U_\delta(L_{n-d}(\mathbf{x}_1)),$$

die man auch in der Form

$$U_{\varepsilon\delta}(\mathbf{x}_1) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid |x^\alpha - x_1^\alpha| < \delta \quad \text{für} \quad \alpha = 1, \ldots, d, \quad |x^\alpha - x_1^\alpha| < \varepsilon \quad \text{für} \quad \alpha = d + 1, \ldots, n\} \tag{19}$$

beschreiben kann, die Eigenschaft besitzt, dass ein jeder mit $L_{n-d}(\mathbf{x}_1)$ paralleler Unterraum $'L_{n-d}$ mit

$$'L_{n-d} \cap U_{\varepsilon\delta}(\mathbf{x}_1) \neq \emptyset$$

die Menge $M \cap U_{\varepsilon\delta}(\mathbf{x}_1)$ in einem einzigen Punkt schneidet. Wegen $M \cap U_{\varepsilon\delta}(\mathbf{x}_1) \subset$ $\subset M \cap U({}_0\mathbf{x}; P, *P)$ gilt nach (18), (19) für einen jeden Punkt $\mathbf{x} \in M \cap U_{\varepsilon\delta}(\mathbf{x}_1)$

$$x^s = x^s(x^1, \ldots, x^d), \quad s = d + 1, \ldots, n, \quad |x^s(x', \ldots, x^d) - x^s(x'_1, \ldots, x_1^\alpha)| < \varepsilon$$
$$\text{für} \quad s = d + 1, \ldots, n$$

und alle Punkte $\{x^1, \ldots, x^d\} \in *L_d({}_0\mathbf{x})$ mit $|x^a - x_1^a| < \delta,\ a = 1, \ldots, d$. Dabei ist zu jedem $\varepsilon > 0$ die Existenz eines solchen $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ gesichert. Dies bedeutet aber, dass die Funktionen $x^s(x^1, \ldots, x^d)$, $s = d + 1, \ldots, n$, stetig im Punkte $\{x_1^1, \ldots$

..., $x_1^d\} \subset {}^*L_\alpha({}_0\mathbf{x})$ sind (da $\varepsilon > 0$ beliebig genügend klein gewählt wurde). Da aber $\{x_1^1, \ldots, x_1^d\} \in \operatorname{int} {}^*P$ beliebig gewählt wurde, bedeutet es nach (18), dass die Menge $M \cap U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ durch eine stetige Abbildung $x^s = x^s(x^1, \ldots, x^d)$, $s = d + 1, \ldots, n$, $\{x^1, \ldots, x^d\} \in \operatorname{int} {}^*P$, beschrieben wird. Daraus ergibt sich unmittelbar, dass die in (18) beschriebene Abbildung der Menge $\operatorname{int} {}^*P \subset {}^*L_d({}_0\mathbf{x})$ auf die Menge $M \cap \cap U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ eine homeomorphe Abbildung der Menge $\operatorname{int} {}^*P \subset {}^*L_d({}_0\mathbf{x})$ auf die Menge $M \cap U({}_0\mathbf{x}; P, {}^*P)$ ist. Setzt man noch $A_d = {}^*L_d({}_0\mathbf{x})$, so ergibt sich daraus die Behaptung des Satzes 3, womit der Beweis dieses Satzes beendet ist.

Bemerkung 4. Eine d-dimensionale Mannigfaltigkeit in A_n $(1 \leqq d < n)$ im Sinne der üblichen lokalen homeomorphen Abbildung ist allgemein keine einfache d-dimensionale Mannigfaltigkeit im Sinne der Definition 9. Z. B. eine Kurve im üblichen topologischen Sinne in A_2, die sich selbst durchschneidet (z. B. eine Schlinge) erfüllt nicht in ihrem „Knoten" die Bedingung (1) aus Definition 9.

3. EINFACHE KURVE, EINFACHE d-DIMENSIONALE FLÄCHE $(1 < d < n - 1)$ UND EINFACHE HYPERFLÄCHE IN A_n

Definition 10. Eine Menge $B \subset A_n$ heisst ein einfacher Bogen in A_n, wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

1) sie lässt sich ein-eindeutig und stetig auf ein eindimensionales abgeschlossenes und beschränktes Intervall I abbilden;
2) den Randpunkten von I entsprechen bei dieser Abbildung zwei verschiedene Punkte der Menge B, die man die Randpunkte von B nennt;
3) durch die fragliche Abbildung wird die Menge $\operatorname{int} I$ auf eine eindimensionale Mannigfaltigkeit im Sinne der Definition 9 abgebildet.

Definition 11. Eine d-dimensionale einfache Mannigfaltigkeit M $(1 \leqq d \leqq n - 1)$ in A_n im Sinne der Definition 9, die die Eigenschaft hat, dass für ein jedes Punktenpaar ${}_1\mathbf{x}$, ${}_2\mathbf{x}$ mit ${}_1\mathbf{x} \neq {}_2\mathbf{x}$, ${}_1\mathbf{x} \in M$, ${}_2\mathbf{x} \in M$ ein einfacher Bogen $B = B({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ mit den Randpunkten ${}_1\mathbf{x}$ und ${}_2\mathbf{x}$ und mit $B({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \subset M$ existiert, heisst

für $d = 1$ *eine einfache Kurve in* A_n,
für $1 < d < n - 1$ *eine einfache d-dimensionale Fläche in* A_n,
für $d = n - 1$ *eine einfache Hyperfläche in* A_n.

Definition 12. Eine einfache Kurve M, bzw. eine einfache d-dimensionale Fläche M $(1 < d < n - 1)$, bzw. eine einfache Hyperfläche M in A_n, heisst *geschlossen*, falls M beschränkt und $M = \overline{M}$ gilt.

Definition 13. Eine einfache Kurve M, bzw. eine einfache d-dimensionale Fläche M $(1 < d < n - 1)$, bzw. eine einfache Hyperfläche M in A_n, heisst *pseudoglatt*, falls der Berührungskegel in jedem Punkt $\mathbf{x} \in M$ (im Sinne der Definition 5) einen linearen eindimensionalen Unterraum $A_1 = A_1(\mathbf{x})$, bzw. einen d-dimensionalen linearen Unterraum $A_d = A_d(\mathbf{x})$, bzw. eine Hyperebene $A'_{n-1} = A_{n-1}(\mathbf{x})$ in A_n darstellt.

Definition 14. Eine Menge $G_d \subset A_n$ $(2 \leqq d < n)$ heisst ein einfaches d-dimensionales Gewölbe in A_n, falls $G_d = \bar{G}_d$ gilt und falls es eine Zerlegung $*G \cup G^i$ $(*G \cap G^i = \emptyset)$ der Menge G_d in der Weise gibt, dass G^i eine einfache d-dimensionale Fläche (für $d = n - 1$ eine einfache Hyperfläche) und $*G$ als Rand von G^i eine geschlossene einfache $(d - 1)$-dimensionale Fläche (für $d - 1 = 1$ eine geschlosene einfache Kurve) ist.

Definition 15. Eine Menge $M \subset A_n$ heisst eine d-dimensionale Fläche $(1 < d < n - 1)$, bzw. eine Kurve, bzw. eine Hyperfläche in A_n, falls sie sich als eine Vereinigung von endlich vielen einfachen d-dimensionalen Flächen, bzw. von einfachen Kurven, bzw. von einfachen Hyperflächen darstellen lässt, wobei M in dem Sinne zusammenhängend ist, dass es für ein beliebiges Punktenpaar ${}_1\mathbf{x} \in M$, ${}_2\mathbf{x} \in M$, ${}_1\mathbf{x} \neq {}_2\mathbf{x}$, einen einfachen Bogen $B({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ mit $B({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \subset M$ gibt.

4. EINFACHE HYPERFLÄCHE IN A_n

Es sei $M_{n-1} \subset A_n$ eine einfache Hyperfläche in A_n. Nach Definition 9 gibt es in jedem Punkt $\mathbf{x} \in M_{n-1}$ ein Paar $L_1(\mathbf{x})$, $*L_{n-1}(\mathbf{x})$ von affin-dualen linearen Unterräumen in A_n und eine zylindrische polyedrische Umgebung $U(\mathbf{x})$ des Punktes $\mathbf{x}$ mit den Eigenschaften aus Definition 9. Die Menge

$$Z(M_{n-1}) = \bigcup_{\mathbf{x} \in M_{n-1}} U(\mathbf{x}) \tag{20}$$

nennt man dann kurz eine Z-Überdeckung von M_{n-1}.

Behauptung 1. *Ist $M_{n-1} \subset A_n$ eine einfache $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit (im Sinne der Definition 9) und $Z(M_{n-1})$ aus (20) eine Z-Überdeckung von M_{n-1}, so teilt die Menge M_{n-1} jede zylindrische polyedrische Umgebung $U(\mathbf{x})$ der Überdeckung $Z(M_{n-1})$ in zwei Gebiete ${}^{(1)}U(\mathbf{x})$, ${}^{(2)}U(\mathbf{x})$ mit*

$$\begin{gathered} U(\mathbf{x}) = {}^{(1)}U(\mathbf{x}) \cup {}^{(2)}U(\mathbf{x}) \cup (M_{n-1} \cap U(\mathbf{x}))\,, \\ {}^{(1)}U(\mathbf{x}) \cap {}^{(2)}U(\mathbf{x}) = \emptyset\,, \quad {}^{(1)}U(\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset\,, \quad {}^{(2)}U(\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset \end{gathered} \tag{21}$$

ein.

Beweis. Es sei ${}_0\mathbf{x} \in M_{n-1}$ festgewählt, $U({}_0\mathbf{x})$ die dem Punkt ${}_0\mathbf{x}$ entsprechende zylindrische Umgebung aus der Überdeckung $Z(M_{n-1})$ mit den Eigenschaften aus Definition 9. Es gibt also eine Gerade $L_1({}_0\mathbf{x})$ und eine Hyperebene $*L_{n-1}({}_0\mathbf{x})$ mit $L_1({}_0\mathbf{x}) \cap *L_{n-1}({}_0\mathbf{x}) = \{{}_0\mathbf{x}\}$, d. h. $L_1({}_0\mathbf{x})$, $*L_{n-1}({}_0\mathbf{x})$ ist ein Paar von affin-dualen linearen Unterräumen im Punkt ${}_0\mathbf{x}$. Wählt man in A_n ein derartiges lineares Koordinaten-System, dass ${}_0\mathbf{x}$ der Koordinatenurpsrung, die Gerade $L_1({}_0\mathbf{x})$ die x^n-Koordinatenachse ist und die übrigen x^α-Koordinatenachsen $(\alpha = 1, \dots, n-1)$ in der Hyperebene $^*L_{n-1}({}_0\mathbf{x})$ enthalten sind, so gibt es eine polyedrische Umgebung $U_{*P}({}_0\mathbf{x})$ in $^*L_{n-1}({}_0\mathbf{x})$ des Punktes ${}_0\mathbf{x}$ und eine offene Strecke $p \in L_1({}_0\mathbf{x})$ mit ${}_0\mathbf{x} \in p$ (also eine Umgebung in $L_1({}_0\mathbf{x})$ des Punktes ${}_0\mathbf{x}$ [3]) in der Weise, dass

$$U({}_0\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid \{x^1, \dots, x^{n-1}\} \in U_{*P}({}_0\mathbf{x}),\ x^n \in ({}_1x^n, {}_2x^n)\}$$

gilt. Dabei ist die Strecke p als ein Gebilde in $L_1({}_0\mathbf{x})$ durch $p = \{\mathbf{x} \in L_1({}_0\mathbf{x}) \mid x^\alpha = {}_0x^\alpha\ (\alpha = 1, \dots, n-1),\ {}_1x^n < x^n < {}_2x^n\}$ beschrieben. Nach Satz 3 und seinem Beweis gibt es dann eine über der Menge $U_{*P}({}_0\mathbf{x})$ stetige Funktion $f(x^1, \dots, x^{n-1})$ in der Weise, dass

$$M_{n-1} \cap U({}_0\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid x^n = f(x^1, \dots, x^{n-1}),\ \{x^1, \dots, x^{n-1}\} \in U_{*P}({}_0\mathbf{x})\}$$

gilt, wobei

$${}_1x^n < f(x^1, \dots, x^{n-1}) < {}_2x^n \quad \text{für} \quad \{x^1, \dots, x^{n-1}\} \in U_{*P}({}_0\mathbf{x}) \quad \text{ist}\,.$$

Definiert man nun

$${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid \{x^1, \dots, x^{n-1}\} \in U_{*P}({}_0\mathbf{x}),\ {}_1x^n < x^n < f(x^1, \dots, x^{n-1})\}\,,$$

$${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}) = \{\mathbf{x} \in A_n \mid \{x^1, \dots, x^{n-1}\} \in U_{*P}({}_0\mathbf{x}),\ f(x^1, \dots, x^{n-1}) < x^n < {}_2x^n\}\,,$$

so haben diese Mengen ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$, ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$ offenbar die Eigenschaften (21).

Behauptung 2. *Es sei $M_{n-1} \subset A_n$ eine einfache Hyperfläche im Sinne der Definition 11 und $Z(M_{n-1})$ aus (20) eine beliebige Z-Überdeckung von M_{n-1}. Es haben $U({}_0\mathbf{x})$, ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$, ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$ die Bedeutung aus Behauptung 1 und es seien ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$, ${}_2\mathbf{x} \in {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$ beliebig festgewählt. Definiert man die Mengen ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ auf die folgende Weise*

${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ *enthält den Punkt ${}_1\mathbf{x}$ und alle solche $\mathbf{x} \in Z(M_{n-1})$ mit $\mathbf{x} \neq {}_1\mathbf{x}$, für die es einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x})$ mit $l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1})$, $l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$ gibt,*

${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ *enthält den Punkt ${}_2\mathbf{x}$ und alle solche Punkte $\mathbf{x} \in Z(M_{n-1})$ mit $\mathbf{x} \neq {}_2\mathbf{x}$, für die es einen stückweise linearen Bogen $l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x})$ mit $l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1})$, $l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$ gibt,*

so stellt jede der Mengen ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ ein Gebiet in A_n dar.

---

[3]) Die Elemente x^α $(\alpha = 1, \dots, n-1)$ sind also lineare Koordinaten in $^*L_{n-1}({}_0\mathbf{x})$, x^n ist die Koordinate in $L_1({}_0\mathbf{x})$.

Beweis. Aus der Definition 11 einer einfachen Hyperfläche M_{n-1} in A_n und aus der Definition ihrer Z-Überdeckung $Z(M_{n-1})$ ergibt sich unmittelbar, dass $Z(M_{n-1})$ ein Gebiet in A_n ist. Jeder Punkt $\mathbf{x}$ des Gebietes ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$ (bezw. des Gebietes ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$)[4]) hat die Eigenschaft, dass es einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x})$ (bezw. $l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x})$) mit der Eigenschaft $l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$ (bezw. $l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}) \in {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$), für den dann wegen (21)

$$l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset \quad (\text{bzw. } l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset)$$

gilt, gibt. Daraus folgt $\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ (bzw. $\mathbf{x} \in {}^{(2)}Z(M_{n-1}, \mathbf{x}_0, {}_2\mathbf{x})$) und weiter

$$(22) \qquad {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}) \subset {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}), \quad {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}) \subset {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}).$$

Ist $\mathbf{x}'$ (bzw. $\mathbf{x}''$) ein beliebiger Punkt mit der Eigenschaft

$$\mathbf{x}' \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}' \notin {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$$

$$(\text{bzw. } \mathbf{x}'' \in {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}), \ \mathbf{x}'' \notin {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})),$$

so gilt $\mathbf{x}' \in Z(M_{n-1})$, $\mathbf{x}' \notin M_{n-1}$ (bzw. $\mathbf{x}'' \in Z(M_{n-1})$, $\mathbf{x}'' \notin M_{n-1}$) und es gibt daher einen Punkt $^*\mathbf{x}' \in M_{n-1}$, (bzw. $^*\mathbf{x}'' \in M_{n-1}$) in der Weise, dass die ihm zugehörige zylindrische polyedrische Umgebung $U(^*\mathbf{x}')$ (bzw. $U(^*\mathbf{x}'')$) aus der Überdeckung $Z(M_{n-1})$ den Punkt $\mathbf{x}'$ (bzw. $\mathbf{x}''$) enthält, also $\mathbf{x}' \in U(^*\mathbf{x}')$ (bzw. $\mathbf{x}'' \in U(^*\mathbf{x}'')$). Nach Behauptung 1 wird die Umgebung $U(^*\mathbf{x}')$ (bzw. $U(^*\mathbf{x}'')$) durch die Menge M_{n-1} in zwei disjunkte Gebiete ${}^{(1)}U(^*\mathbf{x}')$, ${}^{(2)}U(^*\mathbf{x}')$ (bzw. ${}^{(1)}U(^*\mathbf{x}'')$, ${}^{(2)}U(^*\mathbf{x}'')$ eingeteilt, die die entsprechenden Eifenschaften aus der Behauptung 1 besitzen und wegen $\mathbf{x}' \notin M_{n-1}$ (bzw. $\mathbf{x}'' \notin M_{n-1}$) gehört der Punkt $\mathbf{x}'$ (bzw. $\mathbf{x}''$) nur einem der Gebiete ${}^{(1)}U(^*\mathbf{x}')$, ${}^{(2)}U(^*\mathbf{x}')$ (bzw. ${}^{(1)}U(^*\mathbf{x}'')$, ${}^{(2)}U(^*\mathbf{x}'')$) an. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken kann man $\mathbf{x}' \in {}^{(1)}U(^*\mathbf{x}')$ (bzw. $\mathbf{x}'' \in {}^{(2)}U(^*\mathbf{x}'')$) voraussetzen. Da ${}^{(1)}U(^*\mathbf{x}')$ (bzw. ${}^{(2)}U(^*\mathbf{x}'')$) ein Gebiet mit ${}^{(1)}U(^*\mathbf{x}') \cap M_{n-1} = \emptyset$ (bzw. ${}^{(2)}U(^*\mathbf{x}'') \cap M_{n-1} = \emptyset$) ist, so gibt es zu jedem Punkt $\mathbf{x} \in {}^{(1)}U(^*\mathbf{x}')$ (bzw. $\mathbf{x} \in {}^{(2)}U(^*\mathbf{x}'')$) einen stückweise linearen Bogen $l(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ (bzw. $l(\mathbf{x}'', \mathbf{x})$) mit $l(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \in {}^{(1)}U(^*\mathbf{x}')$ (bzw. mit $l(\mathbf{x}'', \mathbf{x}) \in {}^{(2)}U(^*\mathbf{x}'')$) und mit

$$l(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset \ (\text{bzw. } l(\mathbf{x}'', \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset).$$

Wegen $\mathbf{x}' \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ (bzw. $\mathbf{x}'' \in {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$) gibt es einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ (bzw. $l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}'')$) mit

$$l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}') \subset Z(M_{n-1}), \quad l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cap M_{n-1} = \emptyset$$

$$(\text{bzw. } l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \subset Z(M_{n-1}), \quad l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \cap M_{n-1} = \emptyset).$$

---

[4]) $x \neq {}_1x$ (bzw. $x = {}_2x$).

Der zusammengesetzte stückweise lineare Bogen

$$l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) = l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cup l(\mathbf{x}', \mathbf{x})$$
$$(\text{bzw. } l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}) = l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}'') \cup l(\mathbf{x}'', \mathbf{x}))$$

hat dann die Eigenschaft

$$l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1}), \quad l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$$
$$(\text{bzw. } l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1}), \quad l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset)$$

und der beliebig gewählte Punkt $\mathbf{x} \in {}^{(1)}U(^*\mathbf{x}')$ (bzw. $\mathbf{x} \in {}^{(2)}U(^*\mathbf{x}'')$) gehört daher der Menge ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ (bzw. ${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$) an. Daraus folgt ${}^{(1)}U(^*\mathbf{x}') \subset$ $\subset {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ (bzw. ${}^{(2)}U(^*\mathbf{x}'') \subset {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$). Mit dem oben beliebig gewählten Punkt $\mathbf{x}' \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ (bzw. $\mathbf{x}'' \in {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$) gehört also das ganze Gebiet ${}^{(1)}U(^*\mathbf{x}')$ mit $\mathbf{x}' \in {}^{(1)}U(^*\mathbf{x}')$ (bzw. ${}^{(2)}U(^*\mathbf{x}'')$ mit $\mathbf{x}'' \in {}^{(2)}U(^*\mathbf{x}'')$) der Menge ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ (bzw. ${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$) an. Daraus folgt unmittelbar, dass ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ (bzw. ${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$) eine in A_n offene Menge ist.

Sind nun $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ beliebige Punkte der Menge ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ (bzw. ${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$), so gibt es stückweise lineare Bögen $l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x})$, $l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mit

$$l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1}), \quad l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset,$$
$$l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset Z(M_{n-1}), \quad l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cap M_{n-1} = \emptyset$$

(bzw. stückweise lineare Bögen $l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x})$, $l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{y})$ mit

$$l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1}), \quad l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset,$$
$$l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset Z(M_{n-1}), \quad l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cap M_{n-1} = \emptyset).$$

Der zusammengesetzte stückweise lineare Bogen

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = l(\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) \cup l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{bzw. } l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = l(\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \cup l({}_2\mathbf{x}, \mathbf{y}))$$

hat dann ebenfalls die Eigenschaft

$$l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset Z(M_{n-1}), \quad l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cap M_{n-1} = \emptyset,$$

woraus offenbar

$$(23) \qquad l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) \quad (\text{bzw. } l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}))$$

folgt. Da $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ein beliebiges Punktenpaar der offenen Menge ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ (bzw. ${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$) war, ergibt sich aus (23) unmittelbar, dass ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ (bzw. ${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$) ein Gebiet in A_n ist.

Behauptung 3. *Die Mengen* ${}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_2\mathbf{x})$ *aus Behauptung 2 sind von der Wahl der Punkte* ${}_0\mathbf{x} \in M_{n-1}$, ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$, ${}_2\mathbf{x} \in {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$ *unabhängig.*

Beweis. Es haben ${}_0\mathbf{x}$, ${}_1\mathbf{x}$, ${}_2\mathbf{x}$, $U({}_0\mathbf{x})$, ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$, ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$, ${}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_2\mathbf{x})$ die Bedeutung aus Behauptung 2. Es sei ${}_0\mathbf{x}' \in M_{n-1}$ beliebig, $U({}_0\mathbf{x}')$ die dem Punkt ${}_0\mathbf{x}'$ angehörige zylindrische polyedrische Umgebung aus der Z-Überdeckung $Z(M_{n-1})$ aus (20), ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$, ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}')$ die der Umgebung $U({}_0\mathbf{x}')$ entsprechenden Gebiete aus Behauptung 1, ${}_1\mathbf{x}' \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$, ${}_2\mathbf{x}' \in {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}')$ beliebig. Es haben ${}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x}',\, {}_1\mathbf{x}')$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x}',\, {}_2\mathbf{x}')$ eine ähnliche Bedeutung wie die in der Behauptung 2 definierten Mengen ${}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_2\mathbf{x})$ und zwar mit dem Unterschied, dass statt des Dreitupels ${}_0\mathbf{x}$, ${}_1\mathbf{x}$, ${}_2\mathbf{x}$ das Dreitupel ${}_0\mathbf{x}'$, ${}_1\mathbf{x}'$, ${}_2\mathbf{x}'$ herangezogen wird. Es sollen nun die drei in Frage kommenden Fälle getrennt behandelt werden.

Fall I. Das Gebiet ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ enthalte mindestens einen Punkt ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})$. Nach Definition von ${}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})$ aus Behauptung 2 gilt entweder

(a) ${}^0\mathbf{x} = {}_1\mathbf{x}$,

oder,

(b) es gibt einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x},\, {}^0\mathbf{x})$ mit

$$l({}_1\mathbf{x},\, {}^0\mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1})\,, \quad l({}_1\mathbf{x},\, {}^0\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset\,. \tag{24}$$

Falls im Falle (a) zugleich ${}^0\mathbf{x} = {}_1\mathbf{x}'$ gilt (und daher ${}_1\mathbf{x} = {}_1\mathbf{x}'$), so gilt offenbar (nach Definition von ${}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})$, bzw. ${}^{(2)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_2\mathbf{x})$)

$$ {}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x}',\, {}_1\mathbf{x}') = {}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})\,.$$

Ist im Falle (a) ${}^0\mathbf{x} \neq {}_1\mathbf{x}'$ (und daher ${}_1\mathbf{x}' \neq {}_1\mathbf{x}$), so gibt es wegen ${}_1\mathbf{x} = {}^0\mathbf{x} \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$, ${}_1\mathbf{x}' \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ nach den Eigenschaften von ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ aus Behauptung 1 einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}',\, {}^0\mathbf{x}) = l({}_1\mathbf{x}',\, {}_1\mathbf{x})$ mit

$$l({}_1\mathbf{x}',\, {}_1\mathbf{x}) \subset {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}') \subset Z(M_{n-1})\,, \quad l({}_1\mathbf{x}',\, {}_1\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset\,, \tag{25}$$

woraus ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x}',\, {}_1\mathbf{x}')$ sich ergibt. Für einen beliebigen Punkt $\mathbf{x} \in$ $\in {}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} \neq {}_1\mathbf{x}$ gibt es einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x},\, \mathbf{x})$ mit

$$l({}_1\mathbf{x},\, \mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1})\,, \quad l({}_1\mathbf{x},\, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset\,, \tag{26}$$

und der zusammengesetzte stückweise lineare Bogen

$$l({}_1\mathbf{x}',\, \mathbf{x}) = l({}_1\mathbf{x}',\, {}_1\mathbf{x}) \cup l({}_1\mathbf{x},\, \mathbf{x})$$

hat nach (25), (26) die Eigenschaft

$$l({}_1\mathbf{x}',\, \mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1})\,, \quad l({}_1\mathbf{x}',\, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset\,, \tag{27}$$

woraus $\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x}')$ folgt. Da aber $\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ beliebig gewählt wurde, ergibt sich daraus

$$(28)_a \qquad {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) \subset {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x}') .$$

Aus (25) folgt offenbar ${}_1\mathbf{x}' \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$. Wählt man $\mathbf{x} \neq {}_1\mathbf{x}'$ mit $\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x}')$ beliebig, so gibt es einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}', \mathbf{x}) = l(\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$ mit der Eigenschaft (27) und der zusammengesetzte stückweise lineare Bogen

$$l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) = l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \cup l({}_1\mathbf{x}', \mathbf{x})$$

hat nach (25), (27) die Eigenschaft (26), woraus $\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ sich ergibt. Wegen der beliebigen Auswahl $\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x}')$ erhält man also

$${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x}') \subset {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$$

und mit Hinsicht auf $(28)_a$ dann

$$(28)_b \qquad {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x}') = {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) .$$

Im Falle (b) gibt es einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}, {}^0\mathbf{x})$ mit der Eigenschaft (24). Ist ${}_1\mathbf{x}' = {}^0\mathbf{x}$, so folgt daraus und aus (24) die Eigenschaft (25) des stückwiese linearen Bogens $l({}_1\mathbf{x}, {}^0\mathbf{x}) = l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') = l({}_1\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x})$ und aus (25) ergibt sich ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x}')$.

Ist $\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} \neq {}_1\mathbf{x}$ beliebig, so gibt es einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x})$ mit der Eigenschaft (26) und der zusammengesetzte stückweise lineare Bogen $l(\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') = l(\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) \cup l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$ hat nach (26), (25) die Eigenschaft (27). Daraus folgt ähnlich wie im Fall (a) die Inklusion $(28)_a$. Anderseits folgt aus (25) ${}_1\mathbf{x}' \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ und für einen jeden Punkt $\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x}')$ mit $\mathbf{x} \neq {}_1\mathbf{x}'$ gibt es einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}', \mathbf{x})$ mit der Eigenschaft (27) und der zusammengesetzte Bogen $l({}_1\mathbf{x}, \mathbf{x}) = l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \cup l({}_1\mathbf{x}', \mathbf{x})$ $(= l({}_1\mathbf{x}, {}^0\mathbf{x}) \cup \cup\, l({}^0\mathbf{x}, \mathbf{x}))$ hat nach (25), (27) die Eigenschaft (26). Daraus folgt $\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$, woraus dann die Inklusion ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x}') \subset {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ folgt. Daraus und aus der schon bewiesenen Inklusion $(28)_a$ folgt für den betrachteten Fall ${}_1\mathbf{x}' = {}^0\mathbf{x}$ die Gleichheit $(28)_b$.

Falls im Falle (b) ${}_1\mathbf{x}' \neq {}^0\mathbf{x}$ gilt, so gibt es wegen ${}_1\mathbf{x}' \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$, ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}', {}^0\mathbf{x})$ mit $l({}_1\mathbf{x}', {}^0\mathbf{x}) \subset {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ und mit

$$(29) \qquad l({}_1\mathbf{x}', {}^0\mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1}), \quad l({}_1\mathbf{x}', {}^0\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$$

(nach Behauptung 1). Wegen ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ gibt es dann einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}, {}^0\mathbf{x})$ mit der Eigenschaft (24). Der zusammengesetzte stückweise lineare Bogen $l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') = l({}_1\mathbf{x}, {}^0\mathbf{x}) \cup l({}^0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$ hat dann nach (29), (24) die Eigenschaft (25), woraus unmittelbar ${}_1\mathbf{x}' \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ folgt[5]).

Es gibt daher einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$ mit der Eigenschaft (25). Es lässt sich nun auf ähnliche Art und Weise wie im Falle ${}_1\mathbf{x}' = {}^0\mathbf{x}$ die Gleichheit $(28)_b$ beweisen.

Falls das Gebiet ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}')$ mindestens einen Punkt ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ enthält, so gelangt man auf ähnliche Art und Weise wie oben zum Ergebnis

$$(30) \qquad {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}', {}_2\mathbf{x}') = {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}),$$

wobei zugleich

$${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}') \subset {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$$

gilt[6]).

Fall II. Das Gebiet ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ enthalte mindestens einen Punkt ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$. Wählt man eine umgekehrte Nummierung der Mengen ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ und ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}')$ und zugleich der entsprechenden Punkte ${}_1\mathbf{x}' \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ und ${}_2\mathbf{x}' \in {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}')$, so ist ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}')$ und der betrachtete Fall II reduziert sich auf den schon oben diskutierten Fall (wo es einen Punkt ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}')$ mit ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ gibt), der zum Ergebnis (30) führt. Es ist klar, dass auch der Fall, wo es mindestens einen Punkt ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}')$ mit ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ gibt, bei entsprechender Umnummerierung der Mengen ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$, ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}')$ zu der Gleichheit $(28)_b$ führt.

Fall III: Das Gebiet ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ (bzw. ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}')$ enthalte weder einen Punkt aus ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ noch auch ${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$, d. h.

$$(31) \qquad {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}') \cap {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) = \emptyset, \quad {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}') \cap {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) = \emptyset$$
$$(\text{bzw. } {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}') \cap {}^{(1)}Z(M_{n-1}; \mathbf{x}_0, {}_1\mathbf{x}) = \emptyset, \quad {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}') \cap {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) = \emptyset).$$

Wir wollen nun zeigen, dass dieser Fall nicht eintreten kann. Dazu genügt es offenbar den Beweis für die Menge ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ durchzuführen.

Aus der Voraussetzung (31) folgt wegen ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}) \subset {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ [7]) die Ungleichheit ${}_0\mathbf{x}' \neq {}_0\mathbf{x}$. Da M_{n-1} eine einfache Hyperfläche im Sinne der Definition 11 ist, so gibt es einen einfachen bogen $B({}_0\mathbf{x}, {}_0\mathbf{x}')$ [8]) mit den Randpunkten ${}_0\mathbf{x}$, ${}_0\mathbf{x}'$

[5]) Unter der Vorraussetzung, dass es einen Punkt ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ mit ${}^0\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ gibt, sind wir daher zu der Feststellung ${}_1\mathbf{x}' \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ gelangt, wobei ${}_1\mathbf{x}' \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ beliebig festgewählt wurde. Es gilt daher auch ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}') \subset {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$.

[6]) Sieh Fussnote[5]).

[7]) Sieh (22).

[8]) Sieh Definition 10.

und mit $B({}_0\mathbf{x}, {}_0\mathbf{x}') \subset M_{n-1}$. Jeder Punkt $\mathbf{x} \in B({}_0\mathbf{x}, {}_0\mathbf{x}')$ gehört also der Menge M_{n-1} an und es gehört ihm eine zylindrische polyedrische Umgebung $U(\mathbf{x})$ der Z-Überdeckung $Z(M_{n-1})$ aus (20) der Hyperfläche M_{n-1} an. Der einfache Bogen $B({}_0\mathbf{x}, {}_0\mathbf{x}')$, der nach Definition 10 eine abgeschlossene und beschränkte Menge in A_n darstellt, wird daher durch eine unendliche Anzahl von Umgebungen $U(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} \in B({}_0\mathbf{x}, {}_0\mathbf{x}')$ überdeckt und es existiert dann eine endliche Anzahl $U({}_k\mathbf{x}^*)$, $k = 1, \ldots, N$, mit ${}_k\mathbf{x}^* \in$ $\in B({}_0\mathbf{x}, {}_0\mathbf{x}')$ der Überdeckung $Z(M_{n-1})$, die ebenfalls die fragliche Eigenschaft hat. O.B.d.A. kann man ${}_1\mathbf{x}^* = {}_0\mathbf{x}$, ${}_N\mathbf{x}^* = {}_0\mathbf{x}'$ voraussetzen[9]). Da der Bogen $B({}_1\mathbf{x}^*, {}_N\mathbf{x}^*) = B({}_0\mathbf{x}, {}_0\mathbf{x}')$ durch eine stetige Abbildung $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$, $t \in \langle {}_1t, {}_Nt \rangle$, entsteht, gibt es dann eine Einteilung

$$_0t = {}_1t < {}_2t < \ldots < {}_kt < {}_{k+1}t < \ldots < {}_Nt = t'$$

des Intervalls $\langle {}_1t, {}_Nt \rangle = \langle {}_0t, t' \rangle$ in der Weise, dass

$$U(\mathbf{x}({}_kt)) \cap U(\mathbf{x}({}_{k+1}t)) \neq \emptyset \quad (k = 1, \ldots, N-1) \tag{32}$$

gilt, wobei (bei geeigneter Nummerierung) ${}_k\mathbf{x}^* = \mathbf{x}({}_kt)$ $(k = 1, \ldots, N)$ und

$$U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap B({}_1\mathbf{x}^*, {}_N\mathbf{x}^*) \neq \emptyset \quad (k = 1, \ldots, N-1)$$

vorausgesetzt werden kann. Wegen $B({}_1\mathbf{x}^*, {}_N\mathbf{x}^*) = B({}_0\mathbf{x}, {}_0\mathbf{x}') \subset M_{n-1}$ gilt dann auch

$$U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} \neq \emptyset \quad (k = 1, \ldots, N-1).$$

Es sei bei festgewähltem $k \in \{1, \ldots, N-1\}$ ${}_k\mathbf{x}' \in U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1}$ beliebig festgewählt. Der Durchschnitt $U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)$ stellt als ein nichtleerer Durchschnitt von zylindrischen polyedrischen Umgebungen eine polyedrische Umgebung (allgemein nicht zylindrische) des Punktes ${}_k\mathbf{x}' \in M_{n-1}$ dar. Da $(U({}_k\mathbf{x}^*) \cap$ $\cap\, U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)) \subset U({}_k\mathbf{x}^*)$ (bzw. $(U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)) \subset U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)$) und nach Behauptung 1

$$U({}_k\mathbf{x}^*) \doteq {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cup {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cup (U({}_k\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1}), \tag{33}$$

$${}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) = \emptyset, \quad {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} = \emptyset, \quad {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} = \emptyset$$

$$(\text{bzw. } U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cup {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cup (U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1}),$$

$${}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = \emptyset, {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} = \emptyset, {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} = \emptyset)$$

gilt (wobei die fraglichen Symbole eine klare Bedeutung aus Behauptung 1 besitzen), teilt die Menge M_{n-1} die Umgebung $U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)$ von ${}_k\mathbf{x}'$ in zwei disjunkte

[9]) d. h. $B({}_1\mathbf{x}^*, {}_N\mathbf{x}^*) = B({}_0\mathbf{x}, {}_0\mathbf{x}')$.

Gebiete

$$ {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)\,, \quad {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) $$

$$ (\text{bzw. } {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap U({}_k\mathbf{x}^*),\ {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap U({}_k\mathbf{x}^*)) $$

ein. Nach (33) ist

$$ (34) \qquad {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = ({}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)) \cup $$
$$ \cup ({}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)) \cup ({}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1})\,. $$

Aus (33) ergibt sich ${}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} = \emptyset$, so dass aus (34)

$$ (35) \quad {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = ({}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)) \cup ({}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)) $$

folgt. Da ${}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)$ ein Gebiet ist, muss mindestens eine der Mengen aus der Vereinigung in der rechten Seite von (35) eine nichtleere Menge sein. Wäre zugleich ${}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \neq \emptyset$, ${}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \neq \emptyset$, so stellen diese zwei Mengen wegen ${}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = \emptyset$ zwei disjunkte Gebiete in A_n dar. Da aber ${}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)$ ein Gebiet in A_n ist, kann nach (35) dieser Fall nicht vorkommen. Es gilt also

$$ (\alpha) \qquad {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)\,, $$
$$ {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = \emptyset\,, $$

oder

$$ (\beta) \qquad {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)\,, $$
$$ {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = \emptyset\,. $$

Auf ähnliche Art und Weise stellt man fest, dass entweder

$$ (\gamma) \qquad {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)\,, $$
$$ {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = \emptyset\,, $$

oder

$$ (\delta) \qquad {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)\,, $$
$$ {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = \emptyset $$

gilt. Der Fall, dass zugleich (α) und (δ) gilt, ist ausgeschlossen, denn sonst wäre ${}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = \emptyset$, ${}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = \emptyset$ und da ${}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap \cap M_{n-1} = \emptyset$ ist, würde sich daraus nach (33) ergeben

$$ U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) = ({}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)) \cup $$
$$ \cup ({}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)) \cup (U({}_k\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)) = \emptyset\,, $$

was ein Widerspruch ist[10]). Aus ähnlichen Gründen wird der Fall, wo zugleich (β) und (γ) gilt, ausgeschlossen. Es gilt also

entweder

$$(36)_a \qquad \begin{aligned} {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) &= {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)\,, \\ {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) &= \emptyset\,, \\ {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) &= {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)\,, \\ {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) &= \emptyset\,, \end{aligned}$$

oder

$$(36)_b \qquad \begin{aligned} {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) &= {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)\,, \\ {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) &= \emptyset\,, \\ {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) &= {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)\,, \\ {}^{(2)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) &= \emptyset\,. \end{aligned}$$

Geht man von dem Punkt ${}_{k+1}\mathbf{x}^*$ aus, so kann man durch geeignete Nummerierung stets erreichen, dass $(36)_a$ gilt (und zwar für alle $k = N-1, \ldots, 1$), was wir weiter annehmen werden. Die Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{N} {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*)$ von Gebieten ${}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*)$ mit ${}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \neq \emptyset$ für $k = 1, \ldots, N-1$ stellt dann offenbar ein Gebiet in A_n dar, so dass ein jeder Punkt ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}U({}_1\mathbf{x}^*)$ mit einem jeden Punkt ${}_1\mathbf{x}' \in {}^{(1)}U({}_N\mathbf{x}^*)$ durch einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$ mit $l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \subset \bigcup_{k=1}^{N} {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*)$ verbunden werden kann. Da ${}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \subset U({}_k\mathbf{x}^*)$ $(k = 1, \ldots, N)$ der Z-Überdeckung $Z(M_{n-1})$ von M_{n-1} angehört, gilt dann

$$(37)_a \qquad l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \subset Z(M_{n-1})$$

und wegen ${}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} = \emptyset$ $(k = 1, \ldots, N)$, $l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \subset \bigcup_{k=1}^{N} {}^{(1)}U({}_k\mathbf{x}^*)$ gilt weiter

$$(37)_b \qquad l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \cap M_{n-1} = \emptyset\,.$$

Da ${}_0\mathbf{x} = {}_1\mathbf{x}^*$, ${}_0\mathbf{x}' = {}_N\mathbf{x}^*$ gesetzt wurde und daher ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$, ${}_1\mathbf{x}' \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ gilt, hat der stückweise lineare Bogen $l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$ nach $(37)_{a,b}$ und nach der Definition der Menge ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ aus Behauptung 2 die Eigenschaft, dass er der Menge ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$ angehört. Diese Eigenschaft besitzt also auch sein Endpunkt ${}_1\mathbf{x}'$, der nach Voraussetzung der Menge ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}')$ angehört. Setzt man ${}^0\mathbf{x} = {}_1\mathbf{x}'$, so erfüllt

[10]) denn, die Menge M_{n-1} teilt die Umgebung $U({}_k\mathbf{x}^*) \cap U({}_{k+1}\mathbf{x}^*)$ von ${}_k\mathbf{x}'$ in zwei disjunkte Gebiete ${}^{(1)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap U({}_k\mathbf{x}^*)$, ${}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \cap U({}_k\mathbf{x}^*)$ ein (wie oben ausgeführt wurde) and daher ist $U({}_k\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_{k+1}\mathbf{x}^*) \neq \emptyset$.

der Punkt ${}^0\mathbf{x}$ die Voraussetzung aus dem früheren Fall I, der zu der Gleichheit $(28)_b$ geführt hatte. Der Fall III kann daher nicht eintreten.

Im Falle I gilt $(28)_b$, bzw. (30) und der Fall II führt bei geeigneter Bezeichnung ebenfalls zu Ergebnissen $(28)_b$, (30) (wie bei der Behandlung des Falles II angeführt wurde). Aus $(28)_b$, (30) ergibt sich die Aussage der Behauptung 3.

Bemerkung 5. Auf Grund der obigen Behauptung 3 kann man statt des Symbols ${}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})$, bzw. ${}^{(2)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_2\mathbf{x})$ das Symbol ${}^{(1)}Z(M_{n-1})$, bzw. ${}^{(2)}Z(M_{n-1})$ schreiben, was auch weiter eingehalten wird[11]).

Behauptung 4. *Falls* M_{n-1}, $Z(M_{n-1})$, ${}^{(1)}Z(M_{n-1})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1})$ *die Bedeutung aus Behauptung* 2, 3 *und Bemerkung* 5 *haben, so gilt*

$$(38)_a \qquad Z(M_{n-1}) = M_{n-1} \cup {}^{(1)}Z(M_{n-1}) \cup {}^{(2)}Z(M_{n-1})\,,$$
$$M_{n-1} \cap {}^{(1)}Z(M_{n-1}) = \emptyset\,, \quad M_{n-1} \cap {}^{(2)}Z(M_{n-1}) = \emptyset\,.$$

Ist ${}^{(1)}Z(M_{n-1}) \cap {}^{(2)}Z(M_{n-1}) \neq \emptyset$, *so gilt*

$$(38)_b \qquad {}^{(1)}Z(M_{n-1}) = {}^{(2)}Z(M_{n-1})\,.$$

Beweis. Aus der Definition (20) der Menge $Z(M_{n-1})$ ergibt sich $M_{n-1} \subset Z(M_{n-1})$, wobei für einen jeden Punkt ${}_0\mathbf{x} \in M_{n-1}$ die ihm entsprechende zylindrische polyedrische Umgebung $U({}_0\mathbf{x})$ der Z-Überdeckung $Z(M_{n-1})$ aus (20) die Eigenschaften aus Behauptung 1 besitzt. Die Eigenschaft ${}^{(1)}Z(M_{n-1}) = {}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1}) = {}^{(2)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_2\mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1})$ ergibt sich unmittelbar aus der Definition von ${}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_2\mathbf{x})$ aus der Behauptung 2[12]). Es gilt daher

$$(39)_a \qquad (M_{n-1} \cup {}^{(1)}Z(M_{n-1}) \cup {}^{(2)}Z(M_{n-1})) \subset Z(M_{n-1})\,.$$

Ist ${}^*\mathbf{x} \in Z(M_{n-1})$ beliebig, so gibt es eine zylindrische polyedrische Umgebung $U({}^*_0\mathbf{x})$ aus der Z-Überdeckung $Z(M_{n-1})$ von M_{n-1} mit ${}^*\mathbf{x} \in U({}^*_0\mathbf{x})$. Nach Behauptung 1 gilt dann nur eine der drei folgenden Möglichkeiten:

a) ${}^*\mathbf{x} \in M_{n-1}$;
b) ${}^*\mathbf{x} \in {}^{(1)}U({}^*_0\mathbf{x})$;
c) ${}^*\mathbf{x} \in {}^{(2)}U({}^*_0\mathbf{x})$.

Im Falle a) gilt offenbar

$$(39)_b \qquad {}^*\mathbf{x} \in M_{n-1} \cup {}^{(1)}Z(M_{n-1}) \cup {}^{(2)}Z(M_{n-1})\,.$$

Im Verlaufe des Beweises der Behauptung 3 wurde gezeigt, dass in den Fällen b)

[11]) Einer gegebenen einfachen Hyperfläche in A_n bei vorgegebenen ihrer Z-Überdeckung $Z(M_{n-1})$ sind daher die Mengen ${}^{(1)}Z(M_{n-1})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1})$ eindeutig zugeordnet.

und c) der Punkt $^*\mathbf{x}$ nur einer der Mengen $^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})$, $^{(2)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_2\mathbf{x})$ angehört. Daraus ergibt sich auch für die Fälle b), c) die Aussage $(39)_b$[12]. Da $^*\mathbf{x} \in$ $\in Z(M_{n-1})$ beliebig gewählt wurde, folgt daraus

$$(39)_c \qquad Z(M_{n-1}) \subset (M_{n-1} \cup {}^{(1)}Z(M_{n-1}) \cup {}^{(2)}Z(M_{n-1}))\,.$$

Aus $(39)_{a,c}$ folgt unmittelbar $(38)_a$, da nach Definition der Mengen $^{(1)}Z(M_{n-1}) =$ $= {}^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x})$, $^{(2)}Z(M_{n-1}) = {}^{(2)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_2\mathbf{x})$ aus Behauptung 2 $^{(1)}Z(M_{n-1}) \cap M_{n-1} = \emptyset$, $^{(2)}Z(M_{n-1}) \cap M_{n-1} = \emptyset$ gilt.

Ist $^{(1)}Z(M_{n-1}) \cap {}^{(2)}Z(M_{n-1}) \neq \emptyset$, $^0\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}) \cap {}^{(2)}Z(M_{n-1})$ beliebig festgewählt, ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1})$, ${}_2\mathbf{x} \in {}^{(2)}Z(M_{n-1})$ beliebig, so gibt es einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}, {}^0\mathbf{x})$ mit $l({}_1\mathbf{x}, {}^0\mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1})$, $l({}_1\mathbf{x}, {}^0\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$ und einen stückweise linearen Bogen $l({}^0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ mit $l({}^0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) = l({}_2\mathbf{x}, {}^0\mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1})$, $l({}^0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \cap$ $\cap M_{n-1} = \emptyset$. Daraus ergibt sich, dass der zusammengesetzte Bogen

$$l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) = l({}_1\mathbf{x}, {}^0\mathbf{x}) \cup l({}^0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$$

die Eigenschaft

$$(40) \qquad l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \subset Z(M_{n-1})\,, \quad l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$$

besitzt. Wegen ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1})$, ${}_2\mathbf{x} \in {}^{(2)}Z(M_{n-1})$ ergibt sich aus (40) (mit Hinsicht auf die Definition der Menge $^{(1)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_1\mathbf{x}) = {}^{(1)}Z(M_{n-1})$, $^{(2)}Z(M_{n-1};\, {}_0\mathbf{x},\, {}_2\mathbf{x}) =$ $= {}^{(2)}Z(M_{n-1})$ aus Behauptung 2) ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(2)}Z(M_{n-1})$, ${}_2\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1})$. Da aber ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1})$, ${}_2\mathbf{x} \in {}^{(2)}Z(M_{n-1})$ beliebig gewählt wurden, folgt daraus $(38)_b$.

Bemerkung 6. Die Mengen $^{(1)}Z(M_{n-1})$, $^{(2)}Z(M_{n-1})$ hängen von der Wahl der Z-Überdeckung $Z(M_{n-1})$ von M_{n-1} offenbar ab[11]. Sind $Z(M_{n-1})$ und $Z'(M_{n-1})$ zwei beliebige Z-Überdeckungen von M_{n-1} und $^{(1)}Z(M_{n-1})$, $^{(2)}Z(M_{n-1})$ und $^{(1)}Z'(M_{n-1})$, $^{(2)}Z'(M_{n-1})$ die ihnen zugehörige Mengen, so gilt

$$^{(1)}Z(M_{n-1}) = {}^{(2)}Z(M_{n-1}) \Rightarrow {}^{(1)}Z'(M_{n-1}) = {}^{(2)}Z'(M_{n-1})\,,$$

was man leicht beweisen kann. Diese Tatsache gestattet uns die folgende Definition 16 auszusprechen.

Definition 16. Es sei $M_{n-1} \subset A_n$ eine einfache Hyperfläche, $Z(M_{n-1})$ eine Z-Überdeckung von M_{n-1} und $^{(1)}Z(M_{n-1})$, $^{(2)}Z(M_{n-1})$ die Mengen mit der Bedeutung aus Behauptung 4. Falls $^{(1)}Z(M_{n-1}) = {}^{(2)}Z(M_{n-1})$ gilt, so heisst M_{n-1} eine unilaterale (oder auch eine Möbius-sche) einfache Hyperfläche in A_n. Im Falle $^{(1)}Z(M_{n-1}) \cap$ $\cap {}^{(2)}Z(M_n) = \emptyset$ nennt man *die einfache Hyperfläche* M_{n-1} bilateral.

Bemerkung 7. Aus Definition 16 und Behauptung 4 ergibt sich, dass eine jede einfache Hyperfläche in A_n entweder nur unilateral oder nur bilateral sein kann. Die Existenz von bilateralen einfachen Hyperflächen in A_n für jede natürliche Zahl

[12]) Sieh auch Bemerkung 5.

$n \geqq 2$ ist klar. Das bekannte Möbius-sche Blatt (Möbius-scher Streifen), aus dem man seinen Rand weglässt, liefert ein Beispiel von unilateralen einfachen Flächen in A_3.

Satz 4. *Eine einfache Hyperfläche $M_{n-1} \subset A_n$ mit der Eigenschaft $\overline{M}_{n-1} = M_{n-1}$ teilt den Raum A_n in zwei disjunkte Gebiete ein.*

Beweis. Es sei $Z(M_{n-1})$ eine (beliebige) Z-Überdeckung von M_{n-1} aus (20), ${}_0\mathbf{x} \in M_{n-1}$ beliebig festgewählt, $U({}_0\mathbf{x})$ die dem Punkt ${}_0\mathbf{x}$ zugehörige zylindrische polyedrische Umgebung von ${}_0\mathbf{x}$ aus der Z-Übedeckung $Z(M_{n-1})$, ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$, ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$ die entsprechenden Mengen mit den Eigenschaften aus Behauptung 1. Weiter sei ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$, ${}_2\mathbf{x} \in {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$ beliebig gewählt und es haben die Symbole ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ die Bedeutung aus Behauptung 2. Nach Bemerkung 5 kann man auch statt ${}^{(i)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_i\mathbf{x})$ kürzer das Symbol ${}^{(i)}Z(M_{n-1})$ benutzen $(i = 1, 2)$. Wir definieren nun zwei Mengen G_i $(i = 1, 2)$ folgendermassen:

(41) $\quad G_i = \{\mathbf{x} \in A_n \setminus M_{n-1} \mid$ es existiert ein stückweise linearer Bogen $l({}_i\mathbf{x}, \mathbf{x})$ mit $l({}_i\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset\}\,, \quad i = 1, 2\,.$

Der Beweis des fraglichen Satzes wird in drei Etapen durchgeführt:

(1) Wir beweisen, dass G_1, G_2 Gebiete in A_n darstellen;

(2) Wir zeigen, dass $A_n \setminus M_{n-1} = G_1 \cup G_2$ gilt;

(3) Es wird die Gültigkeit von $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ nachgewiesen.

Etape (1). Es sei $i \in \{1, 2\}$ und ${}_1\mathbf{x}' \in G_i$, ${}_2\mathbf{x}' \in G_i$ mit ${}_1\mathbf{x}' \neq {}_2\mathbf{x}'$ beliebig festgewählt[13]. Nach (41) gibt es dann stückweise lineare Bögen $l({}_i\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$, $l({}_i\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}')$ mit $l({}_i\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \cap M_{n-1} = \emptyset$ $l({}_i\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}') \cap M_{n-1} = \emptyset$ und für den zusammengesetzten stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}', {}_2\mathbf{x}') = l({}_1\mathbf{x}', {}_i\mathbf{x}) \cup l({}_i\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}')$ mit den Randpunkten ${}_1\mathbf{x}' \in G_i$, ${}_2\mathbf{x}' \in G_i$ gilt dann auch $l({}_1\mathbf{x}', {}_2\mathbf{x}') \cap M_{n-1} = \emptyset$. Daraus und aus (41) folgt auch $l({}_1\mathbf{x}', {}_2\mathbf{x}') \subset G_i$. Also, für ein jedes Paar von verschiedenen Punkten der Menge G_i gibt es einen stückweise linearen Bogen, der diese Punkte verbindet und zugleich in der Menge G_i liegt. Um zu zeigen, dass jede der Mengen G_1, G_2 ein Gebiet in A_n darstellt, genügt es daher zu beweisen, dass G_1, G_2 offene Mengen in A_n sind. Ist ${}_1\mathbf{x}' \in G_i$ beliebig, so gilt ${}_1\mathbf{x}' \notin M_{n-1}$. Wäre ${}_1\mathbf{x}'$ ein Häufungspunkt von M_{n-1}, so müsste er wegen $\overline{M}_{n-1} = M_{n-1}$ der Menge M_{n-1} angehören, was also nicht der Fall ist. Es existiert daher eine polyedrische Umgebung $P({}_1\mathbf{x}')$ von ${}_1\mathbf{x}'$ mit der Eigenschaft $P({}_1\mathbf{x}') \cap M_{n-1} = \emptyset$. Da $P({}_1\mathbf{x}')$ konvex ist, so hat jeder Punkt $\mathbf{x} \in P({}_1\mathbf{x}')$, $\mathbf{x} \neq {}_1\mathbf{x}'$, die Eigenschaft, dass die abgeschlossene Strecke $p(\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$ in $P({}_1\mathbf{x}')$ liegt und daher $p(\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \cap M_{n-1} = \emptyset$ gilt. Wegen ${}_1\mathbf{x}' \in G_i$ gibt es nach (41) einen stück-

[13]) Aus der Definition der Mengen ${}^{(i)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_i\mathbf{x})$, $i = 1, 2$, in Behauptung 2 und aus (41) folgt

$${}^{(i)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_i\mathbf{x}) \subset G_i \quad (i = 1, 2)\,.$$

weise linearen Bogen $l({}_2\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$ mit $l({}_2\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \cap M_{n-1} = \emptyset$ und der zusammengesetzte stückweise lineare Bogen $l({}_i\mathbf{x}, \mathbf{x}) = l({}_i\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \cup p({}_1\mathbf{x}', \mathbf{x})$ hat die Eigenschaft $l({}_i\mathbf{x}, \mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$, woraus nach (41) $\mathbf{x} \in G_i$ sich ergibt. Da $\mathbf{x} \in P({}_1\mathbf{x}')$ beliebig gewählt wurde, folgt daraus $G_i \supset P({}_1\mathbf{x}')$. Mit jedem Punkt ${}_1\mathbf{x}' \in G_i$ gehört daher zu G_i auch seine Umgebung, d. h. G_i $(i = 1, 2)$ ist eine in A_n offene Menge. Hiemit wurde gezeigt, dass G_1 und G_2 Gebiete in A_n sind.

Etape (2). Es sei $\mathbf{x} \in A_n \setminus M_{n-1}$ und $^*\mathbf{x} \in M_{n-1}$ beliebig. Die abgeschlossene Strecke

$$p(\mathbf{x}, {}^*\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in A_n \mid \mathbf{y} = \mathbf{x} + t({}^*\mathbf{x} - \mathbf{x}),\ t \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

hat wegen $^*\mathbf{x} \in M_{n-1}$ die Eigenschaft $p(\mathbf{x}, {}^*\mathbf{x}) \cap M_{n-1} \neq \emptyset$. Definiert man

$$T = \{t \in \langle 0, 1 \rangle \mid \mathbf{x} + t({}^*\mathbf{x} - \mathbf{x}) \in M_{n-1}\},$$

so ist — wegen $t = 1 \in T$ — die Menge T nicht leer und durch $t = 0$ nach unten beschränkt. Es existiert daher ein ${}_0t = \langle 0, 1 \rangle$ mit ${}_0t = \inf_{t \in T} \{t\}$. Da wegen $\overline{M}_{n-1} = M_{n-1}$ die Menge $A_n \setminus M_{n-1}$ offen und $\mathbf{x} \in A_n \setminus M_{n-1}$ ist, folgt daraus ${}_0t \in (0, 1\rangle$. Der Punkt ${}_0\mathbf{y} = \mathbf{x} + {}_0t({}^*\mathbf{x} - \mathbf{x})$ gehört dann (wegen $\overline{M}_{n-1} = M_{n-1}$) der Menge M_{n-1} an und die abgeschlossene Strecke $p(\mathbf{x}, {}_0\mathbf{y})$ hat die Eigenschaft $p(\mathbf{x}, {}_0\mathbf{y}) \cap M_{n-1} = \{{}_0\mathbf{y}\}$. Dem Punkt ${}_0\mathbf{y} \in M_{n-1}$ gehört dann eine zylindrische polyedrische Umgebung $U({}_0\mathbf{y})$ der Z-Überdeckung $Z(M_{n-1})$ an, die nach Behauptung 1 durch die Menge M_{n-1} in zwei disjunkte Gebiete ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{y})$, ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{y})$ eingeteilt wird. Es gibt daher einen inneren Punkt $\mathbf{x}' \in p(\mathbf{x}, {}_0\mathbf{y})$ der nur einer der Mengen ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{y})$, ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{y})$ angehört. Es ist also $\mathbf{x}' \in Z(M_{n-1})$, $\mathbf{x}' \notin M_{n-1}$ und nach $(38)_a$ gehört $\mathbf{x}'$ einer der Mengen ${}^{(1)}Z(M_{n-1})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1})$ an. Da nach Behauptung 2 ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) = {}^{(1)}Z(M_{n-1})$, ${}_2\mathbf{x} \in {}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) = {}^{(2)}Z(M_{n-1})$ und ${}^{(1)}Z(M_{n-1})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1})$ Gebiete in A_n sind, gibt es einen stückweise linearen Bogen, der den Punkt $\mathbf{x}'$ entweder mit ${}_1\mathbf{x}$ verbindet und in dem Gebiet ${}^{(1)}Z(M_{n-1})$ verläuft, oder, der den Punkt $\mathbf{x}'$ mit dem Punkt ${}_2\mathbf{x}$ verbindet und in ${}^{(2)}Z(M_{n-1})$ verläuft. Bezeichnet man diesen Bogen im ersten Fall mit $l(\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x})$, im zweiten Fall mit $l(\mathbf{x}', {}_2\mathbf{x})$, so gilt nach $(38)_a$ $l(\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$, bzw. $l(\mathbf{x}', {}_2\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$ und der zusammengesetzte stückweise lineare Bogen $l(\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cup l(\mathbf{x}', {}_1\mathbf{x})$, bzw. $l(\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \cup l(\mathbf{x}', {}_2\mathbf{x})$, besitzt ebenfalls die Eigenschaft $l(\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$, bzw. $l(\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$. Daraus folgt nach (41) $\mathbf{x} \in G_1$, bzw. $\mathbf{x} \in G_2$. Da $\mathbf{x} \in A_n \setminus M_{n-1}$ beliebig war, folgt daraus $A_n \setminus M_{n-1} \subset (G_1 \cup G_2)$. Da zugleich aus (41) $(G_1 \cup G_2) \subset A_n \setminus M_{n-1}$ sich ergibt, erhält man die Gleichheit $A_n \setminus M_{n-1} = G_1 \cup G_2$.

Etape (3). Wir gehen von dem Ansatz

$$G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \tag{42}$$

aus und wählen $^*\mathbf{x} \in G_1 \cap G_2$ beliebig fest. Nach (41) gibt es dann stückweise lineare

Bögen $l({}_1\mathbf{x}, {}^*\mathbf{x})$, $l({}_2\mathbf{x}, {}^*\mathbf{x})$ mit $l({}_1\mathbf{x}, {}^*\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$, $l({}_2\mathbf{x}, {}^*\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$ und der zusammengesetzte stückweise lineare Bogen

$$l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) = l({}_1\mathbf{x}, {}^*\mathbf{x}) \cup l({}^*\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$$

besitzt ebenfalls die Eigenschaft

$$l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset\,. \tag{43}$$

O.B.d.A. kann man voraussetzen, dass $l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ ein sich nicht durchschneidender stückweise linearer Bogen ist.

Es sei nun $\prod$ ein beliebiges n-dimensionales und beschränktes konvexes Polyeder in A_n mit den Eigenschaften

$$l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \subset \operatorname{int} \prod\,, \tag{44$_\mathrm{a}$}$$

$$U({}_0\mathbf{x}) \subset \operatorname{int} \prod\,. \tag{44$_\mathrm{b}$}$$

Da $l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ und $U({}_0\mathbf{x})$ beschränkt sind, ist die Existenz eines solchen Polyeders gesichert. Der Durchschnitt

$${}^*M_{n-1} = \prod \cap M_{n-1} \tag{45$_\mathrm{a}$}$$

ist dann – wegen $\overline{M}_{n-1} = M_{n-1}$ und ${}_0\mathbf{x} \in M_{n-1}$ eine nichtleere abgeschlossene und beschränkte Menge in A_n mit

$${}^*M_{n-1} \subset M_{n-1}\,. \tag{45$_\mathrm{b}$}$$

Die Menge ${}^*M_{n-1}$ aus $(45)_\mathrm{a}$ besteht aus einer Anzahl von abgeschlossenen und beschränkten Teilmengen von M_{n-1} [14]), die untereinander disjunkt sind, wobei eine jede von ihnen – falls sie sich nicht auf einen einzigen Punkt reduziert – eine in A_n zusammenhängende Menge in dem Sinne darstellt, dass jedes Paar von verschiedenen Punkten einer solchen Teilmenge sich durch einen einfachen Bogen im Sinne der Definition 10 verbinden lässt. Dies ergibt sich aus der Tatsache, dass der Durchschnitt

$${}^*M'_{n-1} = \operatorname{int} \prod \cap M_{n-1}\,,$$

der wegen ${}_0\mathbf{x} \in M_{n-1}$, ${}_0\mathbf{x} \in U({}_0\mathbf{x}) \subset \operatorname{int} \prod$ nicht leer ist, eine $(n - 1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit in im Sinne der Definition 9 darstellt. Wir bezeichnen mit ${}^*_0M_{n-1}$ diejenige abgeschlossene Teilmenge von ${}^*M_{n-1}$, die zusammenhängend in dem obigen Sinne ist, den Punkt ${}_0\mathbf{x}$ enthält und disjunkt mit den übrigen abgeschlossenen fraglichen Teilmengen von ${}^*M_{n-1}$ (falls es solche noch gibt) ist. Die Menge ${}^*_0M_{n-1}$, stellt dann eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge der Hyperfläche M_{n-1}, die durch zylindrische polyedrische Umgebungen $U(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x} \in {}^*_0M_{n-1}$ aus der ge-

[14]) Diese Anzahl kann auch unendlich sein.

wählten Z-Überdeckung $Z(M_{n-1})$ von M_{n-1} überdeckt wird. Dann gibt es aber auch eine endliche Anzahl $U({}_j\mathbf{x}^*)$, ${}_j\mathbf{x}^* \in {}_0^*M_{n-1}$, $j = 1, \ldots, s$, von solchen Umgebungen aus der Menge

$$\bigcup_{\mathbf{x} \in {}^*{}_0M_{n-1}} U(\mathbf{x}),$$

die die Menge ${}_0^*M_{n-1}$ ebenfalls überdecken. Wir fügen diesen Umgebungen $U({}_j\mathbf{x}^*)$, $j = 1, \ldots, s$, noch die Umgebung $U({}_0\mathbf{x})$ zu und bezeichnen

$$(46) \qquad {}^*Z = \bigcup_{j=0}^{s} U({}_j\mathbf{x}^*) \quad \text{mit} \quad {}_0\mathbf{x}^* = {}_0\mathbf{x}\,.$$

O.B.d.A. kann man

$$U({}_j\mathbf{x}^*) \cap U({}_{j+1}\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} \neq \emptyset\,, \quad j = 0, 1, \ldots, s-1\,,$$

voraussetzen. Offenbar ist es möglich — da die abgeschlossenen, disjunkten und in dem obigen Sinne zusammenhängenden Teilmengen von ${}^*M_{n-1}$ in dem beschränkten Polyeder $\prod$ liegen — die Z-Überdeckung von M_{n-1} so geeignet „fein“ zu wählen, dass die Punkte des Randes ∂^*Z, soweit sie dem Polyeder $\prod$ angehören, keinen gemeinsamen Punkt mit der Menge M_{n-1} haben, d. h.

$$(47) \qquad \partial^*Z \cap \prod \cap M_{n-1} = \emptyset\,.$$

Jeder der zylindrischen polyedrischen Umgebung $U({}_j\mathbf{x}^*)$, $j = 0, 1, \ldots, s$, sind zwei Gebiete ${}^{(1)}U({}_j\mathbf{x}^*)$, ${}^{(2)}U({}_j\mathbf{x}^*)$ im Sinne der Behauptung 1 zugeordnet, d. h. sie besitzen die Eigenschaften

$$(48) \qquad {}^{(1)}U({}_j\mathbf{x}^*) \cap {}^{(2)}U({}_j\mathbf{x}^*) = \emptyset\,, \quad {}^{(1)}U({}_j\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} = \emptyset\,,$$

$${}^{(2)}U({}_j\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} = \emptyset\,, \quad U({}_j\mathbf{x}^*) = {}^{(1)}U({}_j\mathbf{x}^*) \cup {}^{(2)}U({}_j\mathbf{x}^*) \cup (U({}_j\mathbf{x}^*) \cap M_{n-1})\,.$$

Auf eine ähnliche Art und Weise wir im Beweis der Behauptung 3, Fall III, kann nun gezeigt werden, dass bei geeigneter Nummerierung (Anordnung) der Mengen ${}^{(1)}U({}_j\mathbf{x}^*)$, ${}^{(2)}U({}_j\mathbf{x}^*)$ (für ein jedes $j \in \{1, \ldots, s\}$; für j = 0 wurde sie beliebig festgewählt) die Mengen

$$(49)_a \qquad {}^*Z^{(1)} = \bigcup_{j=0}^{s} {}^{(1)}U({}_j\mathbf{x}^*)\,, \quad {}^*Z^{(2)} = \bigcup_{j=0}^{s} {}^{(2)}U({}_j\mathbf{x}^*)$$

Gebiete in A_n mit der Eigenschaft

$$(49)_b \qquad {}^*Z^{(1)} \cap {}^*Z^{(2)} = \emptyset$$

sind, wobei

$$(49)_c \qquad {}_1\mathbf{x} \in {}^*Z^{(1)}\,, \quad {}_2\mathbf{x} \in {}^*Z^{(2)}$$

gilt. Aus (46), (48) und $(49)_{a,b}$ folgt

$$(49)_d \qquad {}^*Z = {}^*Z^{(1)} \cup {}^*Z^{(2)} \cup ({}^*Z \cap M_{n-1}),$$
$${}^*Z^{(1)} \cap M_{n-1} = \emptyset, \quad {}^*Z^{(2)} \cap M_{n-1} = \emptyset.$$

Für den stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ mit den Eigenschaften (43), $(44)_a$ gilt dann

$$(50) \qquad l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \not\subset {}^*Z$$

denn sonst müsste er – wie es aus $(49)_{a,c,d}$ folgt – mindestens einen gemeinsammen Punkt mit der Menge M_{n-1} haben, was nach (43) nicht der Fall ist. Es gibt offenbar einen stückweise linearen Teilbogen $l({}_2\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$ von $l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ mit $l({}_2\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \cap {}^*Z^{(1)} = \emptyset$, wobei ${}_1\mathbf{x}'$ ein Randpunkt des Gebietes ${}^*Z^{(1)}$ ist; ähnlich gibt es einen stückweise linearen Teilbogen $l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}')$ von $l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ mit $l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}') \cap {}^*Z^{(2)} = \emptyset$, wobei ${}_2\mathbf{x}'$ einen Randpunkt von ${}^*Z^{(2)}$ darstellt[15]). Wir definieren nun

$$(51) \qquad L = l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}') \cap l({}_2\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}').$$

Die Menge L ist also entweder ein stückweise linearer Teilbogen von $l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$, der die Punkte ${}_1\mathbf{x}'$, ${}_2\mathbf{x}'$ im Falle ${}_1\mathbf{x}' \neq {}_2\mathbf{x}'$ verbindet, oder, sie reduziert sich im Falle ${}_1\mathbf{x}' = {}_2\mathbf{x}'$ auf einen einzigen Punkt (d. h. auf den Punkt ${}_1\mathbf{x}' = {}_2\mathbf{x}'$). Es gilt dann

$$l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) = l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \cup L \cup l({}_2\mathbf{x}', {}_2\mathbf{x}),$$
$$l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \cap L = \{{}_1\mathbf{x}'\}, \quad l({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}') = \{{}_2\mathbf{x}'\}.$$

Da ${}_1\mathbf{x}'$ (bzw. ${}_2\mathbf{x}'$) ein Randpunkt des Gebietes ${}^*Z^{(1)}$ (bzw. ${}^*Z^{(2)}$) ist, folgt daraus – mit Hinsicht auf die spezielle Gestaltung der Menge ${}^*Z$ (bzw. ${}^*\bar{Z}$), die aus zylindrischen polyedrischen Umgebungen in endlicher Anzahl besteht – dass der Punkt ${}_1\mathbf{x}'$ (bzw. ${}_2\mathbf{x}'$) aus dem Punkt ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$ (bzw. ${}_2\mathbf{x} \in {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$) durch einen stückweise linearen Bogen $\bar{l}({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$ (bzw. $\bar{l}({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}')$) mit

$$(52)_a \qquad \bar{l}({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') - \{{}_1\mathbf{x}'\} \subset {}^*Z^{(1)} \quad (\text{bzw. } \bar{l}({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}') - \{{}_2\mathbf{x}'\} \subset {}^*Z^{(2)}),$$
$$\bar{l}({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \subset \operatorname{int} \prod, \quad l({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}') \subset \operatorname{int} \prod$$

erreichbar ist. Der stückweise lineare Bogen

$$(52)_b \qquad \bar{l}({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) = \bar{l}({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') \cup L \cup \bar{l}({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}')$$

hat dann – auf Grund der Definition $(49)_a$ von ${}^*Z^{(1)}$, ${}^*Z^{(2)}$ und nach $(49)_d$ – die Eigenschaft

$$(52)_c \qquad \bar{l}({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset,$$

also dieselbe Eigenschaft wie der frühere Bogen $l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ [16]).

---

[15]) Der Fall ${}_1\mathbf{x}' = {}_2\mathbf{x}'$ wird nicht ausgeschlossen.

[16]) Sieh (43).

Die Menge

(53) $$K = \{\mathbf{x} \in A_n \mid \mathbf{x} = {}_0\mathbf{x} + t(\mathbf{y} - {}_0\mathbf{x}),\ \mathbf{y} \in \tilde{l}({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}),\ t \in \langle 0, 1 \rangle\},$$

die also aus allen solchen abgeschlossenen Strecken, die aus dem Punkt ${}_0\mathbf{x}$ ausgehen, wobei ihr zweite Randpunkt dem Bogen $\tilde{l}({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ angehört, besteht, gehört – wegen der Konvexität der Menge int $\prod$ und wegen ${}_0\mathbf{x} \in \text{int} \prod$, $\tilde{l}({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \subset \text{int} \prod$ – der Menge int $\prod$ an, also

(54) $$K \subset \text{int} \prod .$$

Der Durchschnitt

(55) $$D = \partial^* Z \cap K ,$$

wobei $\partial^* Z$ den Rand des Gebietes $^*Z$ aus (46) bedeutet, ist nicht leer, denn die obigen Punkte ${}_1\mathbf{x}'$, ${}_2\mathbf{x}'$ gehören diesem Durchschnitt an. Da das Gebiet $^*Z$ aus (46) eine Vereinigung von endlich vielen zylindrischen polyedrischen Umgebungen und $\tilde{l}({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ ein stückweise linearer Bogen ist, folgt daraus, dass die Menge D aus (55) aus einer endlichen Anzahl von stückweise linearen Bögen[17]), bzw. aus isolierten Punkten besteht. Jedenfalls gibt es dann entweder einen stückweise linearen Bogen mit den Randpunkten ${}_1\mathbf{x}'$, ${}_2\mathbf{x}'$ (der sich allgemein auch durchschneiden kann), im Falle ${}_1\mathbf{x}' = {}_2\mathbf{x}'$ entweder eine stückweise lineare geschlossene Kurve, die den Punkt ${}_1\mathbf{x}' = {}_2\mathbf{x}'$ enthält, oder ist ${}_1\mathbf{x}' = {}_2\mathbf{x}'$ ein isolierter Punkt, wobei in allen drei Fällen die entsprechende Menge dem Durchschnitt D angehört. Bezeichnet man in diesen drei Fällen die entsprechende Menge mit $\tilde{L}$, so ist $\tilde{L}$ eine in A_n abgeschlossene und beschränkte Menge, die dem Rand $\partial^* Z$ des Gebietes $^*Z$ angehört. Wegen $\tilde{L} \subset K$ gilt nach (54) $\tilde{L} \subset \text{int} \prod$ und da zugleich $\tilde{L} \subset \partial^* Z$ wegen $\tilde{L} \subset D$ [18]) gilt, ist

$$\tilde{L} \subset (\text{int} \prod \cap \partial^* Z) .$$

Daraus und aus (47) ergibt sich

(56) $$\tilde{L} \cap M_{n-1} = \emptyset .$$

Da $\overline{M}_{n-1} = M_{n-1}$ vorausgesetzt wurde, ist $A_n \setminus M_{n-1}$ eine offene Menge in A_n, der nach (56) die Menge $\tilde{L}$ angehört. Es gibt dann zu jedem Punkt $\mathbf{x} \in \tilde{L}$ eine (polyedrische) Umgebung $O(\mathbf{x})$ mit $O(\mathbf{x}) \subset A_n \setminus M_{n-1}$ und die Menge

(57) $$Q = \bigcup_{\mathbf{x} \in \tilde{L}} O(\mathbf{x})$$

stellt dann ein Gebiet (eine Umgebung von $\tilde{L}$) dar. Da $\tilde{L}$ kompakt ist, gibt es auch eine endliche Anzahl $O({}_k^*\mathbf{x})$, $k = 1, \ldots, v$, von Umgebungen aus der Überdeckung Q

---

[17]) von denen ein jedes Paar von Bögen keinen gemeinsamen Punkt haben.

[18]) Sieh (55).

von $\tilde{L}$, so dass $*Q = \bigcup_{k=1}^{v} O(\overset{*}{_k}\mathbf{x})$ eine Teilmenge von Q mit $\tilde{L} \subset *Q$ ist und ebenfalls ein Gebiet in A_n mit $*Q \subset A_n \setminus M_{n-1}$, also

$$(58) \qquad *Q \cap M_{n-1} = \emptyset\,,$$

darstellt. Es lässt sich nun beweisen, dass — auf Grund von $\tilde{L} \subset \partial *Z$ — der Durchschnitt $*Z \cap *Q$ ebenfalls ein Gebiet ist. Die stückweise lineare Bögen $\bar{l}({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$, $\bar{l}({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}')$ mit $(52)_a$ besitzen dann die Eigenschaft $\bar{l}({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') - \{{}_1\mathbf{x}'\} \subset *Z$, ${}_1\mathbf{x}' \in \tilde{L}$, $l({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}') - \{{}_2\mathbf{x}'\} \subset *Z$, ${}_2\mathbf{x}' \in \tilde{L}$. Da also ${}_1\mathbf{x}' \in *Q$, ${}_2\mathbf{x}' \in *Q$ gilt, gibt es Punkte ${}_1\mathbf{x}''$, ${}_2\mathbf{x}''$ mit ${}_1\mathbf{x}'' \in \bar{l}({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$, ${}_2\mathbf{x}'' \in l({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}'')$, die innere Punkte dieser Bögen sind und die Eigenschaft ${}_1\mathbf{x}'' \in *Z \cap *Q$, ${}_2\mathbf{x} \in *Z \cap *Q$ besitzen. Da $*Z \cap *Q$ ein Gebiet ist, gibt es dann einen stückweise linearen Bogen $l({}_1\mathbf{x}'', {}_2\mathbf{x}'')$ mit $l({}_1\mathbf{x}'', {}_2\mathbf{x}'') \subset$ $\subset *Z \cap *Q$ und daher mit

$$(59)_a \qquad l({}_1\mathbf{x}'', {}_2\mathbf{x}'') \subset *Z\,.$$

Die Teilbögen $l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}'')$, $l({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}'')$ von $l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}')$, $l({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}')$ besitzen aber ebenfalls die Eigenschaft

$$(59)_b \qquad l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}'') \subset *Z\,, \quad l({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}'') \subset *Z\,.$$

Für den zusammengesetzten stückweise linearen Bogen

$$(60)_a \qquad *l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) = l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}'') \cup l({}_1\mathbf{x}'', {}_2\mathbf{x}'') \cup l({}_2\mathbf{x}'', {}_2\mathbf{x})$$

gilt dann nach $(59)_a$, $(59)_b$, $(49)_c$

$$(60)_b \qquad *l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \subset *Z\,, \quad {}_1\mathbf{x} \in *Z^{(1)}\,, \quad {}_2\mathbf{x} \in *Z^{(2)}$$

und nach $(52)_a$, (58), $(49)_a$ — wegen $l({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}'') \subset \bar{l}({}_1\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}') - \{{}_1\mathbf{x}'\} \subset *Z^{(1)}$, $l({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}'') \subset \bar{l}({}_2\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}') - \{{}_2\mathbf{x}'\} \subset *Z^{(2)}$, $l({}_1\mathbf{x}'', {}_2\mathbf{x}'') \subset *Q$ —

$$(60)_c \qquad *l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset\,.$$

Der stückweise lineare Bogen $*l({}_1\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$, zu dem wir durch die obige Überlegung unter der Annahme (42) gelangen sind, besitzt nach $(60)_c$ keinen Punkt der Hyperfläche M_{n-1} und nach $(60)_b$ verläuft er in dem Gebiet $*Z$, wobei sein Randpunkt ${}_1\mathbf{x}$ der Menge $*Z^{(1)}$, sein Randpunkt ${}_2\mathbf{x}$ der Menge $*Z^{(2)}$ angehört. Dies steht aber im Widerspruch mit $(49)_{b,d}$. Da die Annahme (42) zum Widerspruch führt, muss statt (42) die Aussage $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ gelten.

Hiemit ist der Beweis des Satzes 4 vollendet worden.

Satz 5. *Eine im Sinne der Definition* 12 *geschlossene einfache Hyperfläche* M_{n-1} *in* A_n *teilt den Raum* A_n *in zwei disjunkte Gebiete* G_1 *und* G_2 *ein, wobei das eine Gebiet eine unbeschränkte, das andere eine beschränkte Menge in* A_n *darstellt.*

Beweis. Da nach Definition 12 die Hyperfläche M_{n-1} beschränkt ist, gibt es ein n-dimensionales beschränktes und konvexes Polyeder $\prod \subset A_n$ mit

$$M_{n-1} \subset \operatorname{int} \prod . \tag{61}$$

Es sei $\mathbf{x}^* \in A_n \setminus \operatorname{int} \prod$ und ${}_0\mathbf{x}' \in M_{n-1}$ beliebig festgewählt. Wir bilden die abgeschlossene Strecke

$$p(\mathbf{x}^*, {}_0\mathbf{x}') = \{\mathbf{x} \in A_n \mid \mathbf{x} = \mathbf{x}^* + t({}_0\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*),\ t \in \langle 0, 1 \rangle\}$$

und definieren

$$T = \{t \in \langle 0, 1 \rangle \mid \mathbf{x}^* + t({}_0\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*) \in M_{n-1}\} .$$

Wegen $t = 1 \in T$ ist $T \neq \emptyset$, die nach unten durch $t = 0$ beschränkt ist. Da wegen $\overline{M}_{n-1} = M_{n-1}$ die Menge $A_n \setminus M_{n-1}$ offen in A_n ist, und wegen (61) $A_n \setminus \operatorname{int} \prod \subset \subset A_n \setminus M_{n-1}$ gilt, gibt es eine polyedrische Umgebung $O(\mathbf{x}^*)$ des Punktes $\mathbf{x}^*$ mit $O(\mathbf{x}^*) \in A_n \setminus M_{n-1}$. Daraus folgt, dass die Zahl

$${}_0t = \operatorname*{int}_{t \in T} \{t\}$$

die Eigenschaft $0 < {}_0t \leqq 1$ besitzt. Wegen $\overline{M}_{n-1} = M_{n-1}$ gilt dann für den Punkt

$${}_0\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + {}_0t({}_0\mathbf{x}' - \mathbf{x}^*)$$

einerseits ${}_0\mathbf{x} \in M_{n-1}$, anderseits $p(\mathbf{x}^*, {}_0\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \{{}_0\mathbf{x}\}$. Es sei $Z(M_{n-1})$ eine Z-Überdeckung von M_{n-1} und $U({}_0\mathbf{x})$, ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$, ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$ die den obigen Punkt ${}_0\mathbf{x}$ zugehörige Mengen mit der Bedeutung aus dem Beweis des Satzes 4. Wegen $p(\mathbf{x}^*, {}_0\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \{{}_0\mathbf{x}\}$, hat die zylindrische polyedrische Umgebung $U({}_0\mathbf{x})$ von ${}_0\mathbf{x}$, für die nach (21)

$$U({}_0\mathbf{x}) = {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}) \cup {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}) \cup (M_{n-1} \cup U({}_0\mathbf{x})) ,$$
$${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}) \cap {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}) = \emptyset , \quad {}^{(i)}U({}_0\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset \quad (i = 1, 2)$$

gilt, die Eigenschaft, dass der Durchschnitt

$$(p(\mathbf{x}^*, {}_0\mathbf{x}) \setminus \{{}_0\mathbf{x}\}) \cap U({}_0\mathbf{x})$$

nur einer der Mengen ${}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$, ${}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$ angehört. O.B.d.A. kann man also

$$\begin{gathered}((p(\mathbf{x}^*, {}_0\mathbf{x}) - \{{}_0\mathbf{x}\}) \cap U({}_0\mathbf{x})) \subset {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x}) , \\ ((p(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}_0) - \{{}_0\mathbf{x}\}) \cap U({}_0\mathbf{x})) \cap {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x}) = \emptyset\end{gathered} \tag{62}$$

voraussetzen. Wir wählen ${}_1\mathbf{x} \in (p(\mathbf{x}^*, {}_0\mathbf{x}) - \{{}_0\mathbf{x}\}) \cap U({}_0\mathbf{x})$ und ${}_2\mathbf{x} \in {}^{(2)}U({}_0\mathbf{x})$ beliebig fest. Wegen (62) ist ${}_1\mathbf{x} \in {}^{(1)}U({}_0\mathbf{x})$. Wir definieren die Mengen G_1, G_2 nach (41). Da $\overline{M}_{n-1} = M_{n-1}$ gilt, kann man den Satz 4 anwenden, wobei — nach dem Beweis des Satzes 4 – die fraglichen Mengen G_1 und G_2 Gebiete in A_n mit der Eigenschaft

$$(63)\qquad G_1 \cup G_2 \cup M_{n-1} = A_n\,, \quad G_1 \cap G_2 = \emptyset\,, \quad G_i \cap M_{n-1} = \emptyset \quad (i = 1, 2)$$

sind. Die Menge $A_n \setminus \operatorname{int} \prod$ ist offenbar unbeschränkt und jeder Punkt $\mathbf{x} \in A_n \setminus \operatorname{int} \prod$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ kann durch einen stückweise linearen Bogen $l(\mathbf{x}^*, \mathbf{x})$ mit $l(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}) \subset \subset A_n \setminus \operatorname{int} \prod$ verbunden werden. Der zusammengesetzte stückweise lineare Bogen

$$l(\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) = l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \cup l(\mathbf{x}^*, {}_1\mathbf{x})$$

hat dann wegen $l(\mathbf{x}, \mathbf{x}^*) \cap M_{n-1} = \emptyset$, $l(\mathbf{x}^*, {}_1\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$ die Eigenschaft $l(\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) \cap M_{n-1} = \emptyset$ und nach (41) gilt dann $l(\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x}) \subset G_1$. Da aber $\mathbf{x} \in A_n \setminus \operatorname{int} \prod$ beliebig gewählt wurde und $A_n \setminus \operatorname{int} \prod$ eine in A_n unbeschränkte Menge ist, muss auch G_1 eine in A_n unbeschränkte Menge sein (wegen $A_n \setminus \operatorname{int} \prod \subset G_1$). Alle Punkte der Menge $A_n \setminus \operatorname{int} \prod$ gehören also dem unbeschränkten Gebiet G_1 an. Das Gebiet G_2 hat dann – wegen $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ – keinen gemeinsamen Punkt mit der Menge $A_n \setminus \operatorname{int} \prod$, woraus $G_2 \subset \operatorname{int} \prod$ folgt. Da aber $\prod$ eine in A_n beschränkte Menge ist, folgt daraus die Beschränktheit des Gebietes G_2.

Satz 6. *Eine unilaterale einfache Hyperfläche M_{n-1} in A_n stellt keine in A_n abgeschlossene Menge dar.*

Beweis. Ist $Z(M_{n-1})$ eine Z-Überdeckung von M_{n-1} und ${}^{(1)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_1\mathbf{x})$, ${}^{(2)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_2\mathbf{x})$ die der Menge $Z(M_{n-1})$ zugehörige Gebiete aus der Behauptung 2, wobei, nach Bemerkung 5, ${}^{(i)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_i\mathbf{x})$ $(i = 1, 2)$ durch ${}^{(i)}Z(M_{n-1})$ $(i = 1, 2)$ ersetzt werden kann, so ergibt sich aus der Definition der Mengen ${}^{(i)}Z(M_{n-1}; {}_0\mathbf{x}, {}_i\mathbf{x})$, $i = 1, 2$ in der Behauptung 2 und aus der Definition (41) der Mengen G_i $(i = 1, 2)$ die Inklusion

$$(64)\qquad {}^{(i)}Z(M_{n-1}) \subset G_i \quad (i = 1, 2)\,.$$

Gäbe es nun eine unilaterale einfache Hyperfläche M_{n-1} mit $\overline{M}_{n-1} = M_{n-1}$, so würde (nach Satz 4) (63) gelten, woraus dann nach (64) sich ${}^{(1)}Z(M_{n-1}) \cap \cap {}^{(2)}Z(M_{n-1}) = \emptyset$ ergeben würde, was aber der Definition einer unilateralen einfachen Hyperfläche in A_n widerspricht.

Bemerkung 8. Ist M_{n-1} eine einfache Hyperfläche in A_n und ∂M_{n-1} die Menge aller Häufungspunkte von M_{n-1}, die der Menge M_{n-1} nicht angehören, so heisst die Menge ∂M_{n-1} der Rand der Hyperfläche M_{n-1}. Für eine unilaterale einfache Hyperfläche M_{n-1} in A_n gilt dann – nach Satz 6 – $\partial M_{n-1} \neq \emptyset$, d. h. eine unilaterale einfache Hyperfläche besitzt stets einen nichtleeren Rand.

Definition 17. Ist M_{n-1} eine geschlossene einfache Hyperfläche in A_n, so nennt man dasjenige Gebiet von den zwei Gebieten, in die der Raum A_n durch die Menge M_{n-1} eingeteilt wird, welches beschränkt ist, den Innenraum der geschlossenen einfachen Hyperfläche M_{n-1}. Wir bezeichnen ihn mit $I(M_{n-1})$.

Definition 18. Eine jede Menge $K \subset A_n$, für die es eine geschlossene einfache Hyperfläche $M_{n-1} \subset A_n$ mit der Eigenschaft

$$K = M_{n-1} \cup I(M_{n-1})$$

gibt, heisst *ein dichter (geometrischer) Körper in* A_n.

Ist $K \subset A_n$ eine Menge, für die es eine endliche Anzahl von geschlossenen einfachen Hyperflächen ${}_0M_{n-1}, {}_1M_{n-1}, \ldots, {}_sM_{n-1}$ [19] gibt, so dass

$$K = ({}_0M_{n-1} \cup I({}_0M_{n-1})) \setminus \bigcup_{j=1}^{s} I({}_jM_{n-1}),$$

$${}_jM_{n-1} \subset I({}_0M_{n-1}), \quad j = 1, \ldots, s,$$

$${}_jM_{n-1} \cap {}_kM_{n-1} = \emptyset, \quad j \neq k \quad (j, k \in \{1, \ldots, s\})$$

gilt, so heisst K *ein (geometrischer) Körper in* A_n.

Bemerkung 9. Die Definition 18 eines (geometrischen) Körpers in A_n entspricht im Falle $n = 3$ unserer Vorstellung eines festen Massenkörpers im Sinne der klassischen Mechanik. Die Vorstellung, dass ein fester Massenkörper die Eigenschaft hat, dass es für einen jeden Punkt seiner Oberfläche eine Richtung in diesem Punkt gibt, die in das Innere dieses Körpers gerichtet ist, ist natürlich. Der Begriff einer einfachen geschlossenen Hyperfläche entspricht dann ausreichend dieser physikalischen Vorstellung.

Bemerkung 10. Am Abschluss dieser Arbeit wollen wir – um unsere obige Serie von Grunddefinitionen vollzuenden – noch eine Definition zufügen, die einen Versuch einer Erweiterung des aus A_2 bekannten Begriffs eines einfach zusammenhängenden Gebietes auf einen n-dimensionalen affinen Raum A_n mit $n \geqq 3$ darstellt. Auf eine nähere Untersuchung dieses Begriffs sowie auf eine Beantwortung der Frage nach seiner Nützlichkeit wird hier verzichtet.

Definition 19. Ein Gebiet $G \subset A_n$ $(n \geqq 3)$ mit den Eigenschaften

1) Jede geschlossene einfache Hyperfläche M_{n-1} mit $M_{n-1} \subset G$ hat auch die Eigenschaft $I(M_{n-1}) \subset G$.

2) Ist d eine beliebige natürliche Zahl mit $d \leqq n - 2$ und M_d eine beliebige d-dimensinale einfache geschlossene Fläche, bzw. eine einfache geschlossene Kurve, mit $M_d \subset G$, so gibt es eine einfache $(d + 1)$-dimensionale Fläche $\tilde{M}_{d+1}$ in der Weise, dass

[19]) Also $s \geqq 1$.

a) die Menge $G_{d+1} = M_d \cup \tilde{M}_{d+1}$ ein $(d + 1)$-dimensionales einfaches Gewölbe[20]) mit dem Rand M_d ist;

b) $G_{d+1} \subset G$,

gilt,

heisst *ein einfach zusammenhängendes Gebiet in* A_n.

Literaturangabe

[1] *Abadie, J.:* Nonlinear Programming, Amsterdam, North-Holl., 1967.

[2] *Alexandrov, A. D.:* Géométrie „en grand" (Ein Artikel aus dem Sammelbuch „30 Jahre der sowjetischen Mathematik", Moskva, 1948).

[3] *Bourbaki, N.:* Variétés différentielles et analytiques, Fascicule de résultats, Herrmann-Édit., Paris, 1967.

[4] *Cartan, E.:* Leçons sur les espaces de Riemann, Gauthier-Villars, 1928, chap. III.

[5] *Hopf, H. - Rinow, W.:* Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, Commentarii Math. Helvetici, 1931, Vol. 3.

[6] *Karékjárto, B.:* Vorlesungen über Topologie (I. Flächentopologie), Berlin, Springer-Verlag, 1923.

[7] *Lichnerowicz, A.:* Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie, Rome, 1955.

[8] *Reidemeister, K.:* Topologie der Polyeder, Akademie Verlag, Leipzig, 1953.

[9] *Sikorski, R.:* Rachunek rożniczkowy i całkowy (Funkcje wielu zmiennych), Pańs̆twowe wydawnictwo naukowe, Warszawa 1969.

[10] *Thomas, T. Y.:* The differential invariants of generalized spaces, Cambridge, University Press, 1934.

[11] *Veblen, O. - Whitehead, I. M. C.:* The Foundations of Differential Geometry, Cambridge Press, 1938.

Anschrift des Verfassers: 118 00 Praha 1, Malostranské nám. 25, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta UK).

[20]) im Sinne der Definition 14.