Czechoslovak Mathematical Journal

Semeon A. Bogatyi; Jurij Michailov Smirnov

О расположении компактов в Гильбертовом пространстве

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 26 (1976), No. 1, 37–41,42

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101371`

Czechoslovak Mathematical Journal, 26 (101) 1976, Praha

О РАСПОЛОЖЕНИИ КОМПАКТОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С. А. БОГАТЫЙ, Ю. М. СМИРНОВ, Москва

(Поступило в редакцию 12/XII 1973 г.)

1. В работе [4] К. Борсук ввел понятие расположения множества A в X (позиции множества A в X – $\operatorname{Pos}(X, A)$) и доказал, что *плоские континуумы одинаково расположены в плоскости тогда и только тогда, когда их формы* (*шейпы*) *совпадают*. Уже в трехмерном пространстве аналогичная теорема неверна: Если L_1 является дугой в пространстве E^3, содержащей множество Антуана, а L_2 – кусочно-линейной дугой в пространстве E^3, то их расположения в пространстве E^3 различны, то есть $\operatorname{Pos}(E^3, L_1) \neq \operatorname{Pos}(E^3, L_2)$.

Тем не менее оказалось, что в гильбертовом пространстве формы произвольных компактов можно охарактеризовать их расположениями: *формы компактов X и Y, лежащих в гильбертовом пространстве l_2, совпадают* ($\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} Y$) *тогда и только тогда, когда совпадают их расположения в* $l_2(\operatorname{Pos}(l_2, X) = \operatorname{Pos}(l_2, Y))$.

Наше доказательство этого факта существенно опирается на недавние результаты Т. А. Чепмэна [5] о бесконечномерных многообразиях, моделированных над Q.

2. Приведем некоторые определения теории форм, которые можно найти в [4] и которые нам в будущем потребуются. Пусть X является произвольным подмножеством пространства $M \in AR(\mathfrak{M})$ и пусть Y является произвольным подмножеством пространства $N \in AR(\mathfrak{M})$. Под *W – последовательностью из X в Y* (в M, N) мы понимаем систему, состоящую из множеств X, Y, M, N и последовательности отображений $f_k : M \to N$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющую следующему условию: *для всякого компакта $C \subset X$ найдется такой компакт $D \subset Y$, что для всякой окрестности U компакта D (в N) существует такая окрестность V компакта C (в M), что $f_k|_V \simeq f_{k+1}|_V$ в U почти для всех k.*

Эту W-последовательность мы будем обозначать через $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$. Ясно, что если X и Y являются компактами, что W-последовательности – это в точности фундаментальные последовательности [3]. Нетрудно проверить, что система, состоящая из множеств X, X, M, M и последовательности отображений $i_k : M \to M$, $k = 1, 2, \ldots$, является W-последовательностью из X в X (в M, M), которую мы будем обозначать через $\mathbf{i}_{X,M}$.

Если $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ и $\mathbf{g} = \{g_k, Y, Z\}_{N,P}$ являются W-последовательностями, то легко проверить, что $\{g_k \circ f_k, X, Z\}_{M,P}$ является W-последовательностью, которая обозначается через $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ и называется композицией $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$.

Две W-последовательности $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ и $\mathbf{f}' = \{f'_k, X, Y\}_{M,N}$ называются *гомотопными* (обозначение $\mathbf{f} \simeq \mathbf{f}'$), если для всякого компакта $C \subset X$ существует такой компакт $D \subset Y$, что для всякой окрестности U компакта D (в N) существует такая окрестность V компакта C (в M), что $f_k|_V \simeq f'_k|_V$ в U почти для всех k.

Говорят, что два компакта X и Y имеют *одинаковую форму* (обозначение $\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} Y$), если существуют такие пространства $M, N \in AR(\mathfrak{M})$, содержащие X и Y соответственно, и W-последовательности $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{M,N}$ и $\mathbf{g} = \{g_k, Y, X\}_{N,M}$, что $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} \simeq \mathbf{i}_{X,M}$ и $\mathbf{f} \circ \mathbf{g} \simeq \mathbf{i}_{Y,N}$.

Пусть A — произвольное подмножество пространства X, а B — произвольное подмножество пространства Y. Говорят, что *расположения A в X и B в Y одинаковы* (обозначается $\operatorname{Pos}(X, A) = \operatorname{Pos}(Y, B)$), если существуют два пространства $M, N \in AR(\mathfrak{M})$, содержащие X и Y соответственно в виде замкнутых подмножеств, и существуют две такие последовательности отображений

$$f_k : M \to N \quad \text{и} \quad g_k : N \to M\,, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

что

$$\mathbf{f}' = \{f_k, A, B\}_{M,N}\,, \quad \mathbf{f}'' = \{f_k, X \setminus A, Y \setminus B\}_{M,N} \tag{1}$$

$$\mathbf{g}' = \{g_k, B, A\}_{N,M}\,, \quad \mathbf{g}'' = \{g_k, Y \setminus B, X \setminus A\}_{N,M} \tag{2}$$

являются W-последовательностями и

$$\mathbf{g}' \circ \mathbf{f}' \simeq \mathbf{i}_{A,M}\,, \quad \mathbf{g}'' \circ \mathbf{f}'' \simeq \mathbf{i}_{(X \setminus A),M} \tag{3}$$

$$\mathbf{f}' \circ \mathbf{g}' \simeq \mathbf{i}_{B,N}\,, \quad \mathbf{f}'' \circ \mathbf{g}'' \simeq \mathbf{i}_{(Y \setminus B),N}\,. \tag{4}$$

Доказательства того, что введенные отношения являются отношениями эквивалентности на классе всех компактов (на классе пар пространств соответственно) можно найти в [4], где показано также, что введенные отношения не зависят от того, какие объемлющие $AR(\mathfrak{M})$ пространства M и N брались.

3. Пусть гильбертов кирпич Q представляется в виде $\prod_{i=1}^{\infty} I_i$, где I_i — замкнутый интервал $[-1, 1]$, а s обозначает $\prod_{i=1}^{\infty} I_i^0$, где I_i^0 — открытый интервал $(-1, 1)$. Гильбертово пространство l_2 мы будем представлять в виде множества всех квадратично-суммируемых последовательностей действительных чисел с обычной нормой; т. е. $l_2 = \{\{x_i\} : x_i$ является действительным числом $\sum x_i^2 < \infty\}$ и $d(\{x_i\}, \{y_i\}) = (\sum(x_i - y_i)^2)^{1/2}$.

Теорема 1. *Если X и Y — компакты, лежащие в s, то X и Y имеют одинаковую форму (то есть $\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} Y$) в том и только в том случае, когда они одинаково расположены в гильбертовом кирпиче (то есть $\operatorname{Pos}(Q, X) = \operatorname{Pos}(Q, Y)$).*

Доказательство. Если $\operatorname{Pos}(Q, X) = \operatorname{Pos}(Q, Y)$, то, как доказано в [4, теорема 7.3], $\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} Y$, поэтому нам нужно доказать лишь обратное утверждение.

Пусть $\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} Y$. Так как $X, Y \subset s$, то, по теореме Т. А. Чепмэна [5, теорема 2] множества $Q \setminus X$ и $Q \setminus Y$ гомеоморфны, то есть существует гомеоморфизм $f : Q \setminus X \to Q \setminus Y$. Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма из [5].

Лемма. *Если $X \subset s$, то найдется такая гомотопия $F : Q \times I \to Q$, что выполняются следующие свойства:*

1) $F_0 = \mathrm{id}$;
2) *для всякой окрестности U пространства X в Q существует такое число $t_1 \in (0, 1)$, что $F_t(U) \subset U$ для $0 \leqq t \leqq t_1$;*
3) $F_t(Q) \cap X = \emptyset$ *для* $t \in (0, 1]$.

Через $F(X)$ мы обозначим множество гомотопий $F : Q \times I \to Q$, которые удовлетворяют условиям леммы.

Выберем некоторую гомотопию $F \in F(X)$ и для каждого $k > 0$ рассмотрим отображение $f_k = f \circ F_{1/k}$. Покажем, что как $\mathbf{f} = \{f_k, X, Y\}_{Q,Q}$, так и $\mathbf{f}' = \{f_k, Q \setminus X, Q \setminus Y\}_{Q,Q}$ являются W-последовательностями. Пусть $V \subset Q$ является окрестностью компакта Y в Q. Так как f является гомеоморфизмом, то $f^{-1}(Q \setminus V)$ является компактом и не пересекается с множеством X. Следовательно, $U = Q \setminus f^{-1}(Q \setminus V)$ является такой окрестностью компакта X в Q, что $f(U \cap (Q \setminus X)) \subset V$. Теперь выберем такое число $t_1 \in (0, 1)$, что $F_t(U) \subset U$ для $0 \leqq t \leqq t_1$. Если k и l являются такими положительными числами, что $1/k, 1/l \leqq t_1$, то

$$f_k|_U = f \circ F_{1/k}|_U \simeq f \circ F_{1/e}|_U \text{ (в } f(U \cap (Q \setminus X)) \subset V) = f_e|_U\,,$$

как и требуется в определении W-последовательности.

Пусть $C \subset Q \setminus X$ — произвольный компакт. Тогда множество $F(C \times I)$ также является компактным. При этом $F(C \times \{t\}) = F_t(C) \subset Q \setminus X$ при $t \in (0, 1]$ (это вытекает из условия 3) леммы). Кроме того, $F(C \times \{0\}) = F_0(C) = \mathrm{id}(C) = C \subset Q \setminus X$, что следует из выбора компакта C. Следовательно, компакт $D = f \circ F(C \times I)$ лежит в $Q \setminus Y$. Утверждается, что этот компакт является искомым. Пусть U – его произвольная окрестность. Тогда $F^{-1} \circ f^{-1}(U)$ является окрестностью компакта $C \times I$ в $Q \times I$. Так как отрезок I компактен, то существует такая окрестность V компакта X в Q, что $V \times I \subset F^{-1} \circ f^{-1}(U)$. Теперь уже легко видеть, что

$$f_k|_V = f \circ F_{1/k}|_V \simeq f \circ F_{1/l}|_V \text{ (в } f \circ F(V \times I) \subset f \circ F \circ F^{-1} \circ f^{-1}(U) = U) = f_e|_V$$

для всех k и l, чем мы и показали, что последовательность отображений $f_k = f \circ F_{1/k} : Q \to Q$ является W-последовательностью из $Q \setminus X$ в $Q \setminus Y$ (в Q, Q).

Пусть теперь $g : Q \setminus Y \to Q \setminus X$ – гомеоморфизм, обратный к гомеоморфизму $f : Q \setminus X \to Q \setminus Y$. С помощью гомеоморфизма g и некоторой гомотопии $G \in F(Y)$ мы построим (тем же способом, каким мы выше построили последовательность отображений f_k) последовательность таких отображений $g_k : Q \to Q$, что $\mathbf{g} = \{g_k, Y, X\}_{Q,Q}$ и $\mathbf{g}' = \{g_k, Q \setminus Y, Q \setminus X\}_{Q,Q}$ являются W-последовательностями.

Покажем, что $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} \simeq \mathbf{i}_{X,Q}$ и $\mathbf{g}' \circ \mathbf{f}' \simeq \mathbf{i}_{Q \setminus X,Q}$.

Пусть U – произвольная окрестность компакта X в Q. Существуют такие окрестности $V \subset Q$ множества Y и $W \subset Q$ множества X, что $g(V \cap (Q \setminus Y)) \subset U$ и $f(W \cap (Q \setminus Y)) \subset V$ (выше уже обсуждалось, как можно построить такие окрестности). Можно дополнительно считать, что $W \subset U$. Выберем такое число $t_1 \in (0, 1)$, что $F_t(W) \subset W$ и $G_t|(V) \subset V$ для $0 \leqq t \leqq t_1$. Тогда для всех положительных k, удовлетворяющих условию $1/k \leqq t_1$, мы имеем

$$g_k \circ f_k|_W = g \circ G_{1/k} \circ f \circ F_{1/k}|_W \simeq g \circ f \circ F_{1/k}|_W$$

$$\text{(в } g \circ G_{[0,1/k]} \circ f \circ F_{1/k}(W) \subset g \circ G_{[0,1/k]}(V \cap (Q \setminus Y)) =$$

$$= g(V \cap (Q \setminus Y)) \subset U) = F_{1/k}|_W \simeq F_0|_W \text{ (в } F_{[0,1/k]}(W) = W \subset U) = \mathrm{id}_W .$$

Пусть $C \subset Q \setminus X$ – произвольный компакт. Тогда множество $F(C \times I)$ также является компактом и $F(C \times I) \subset Q \setminus X$, поэтому $B = f \circ F(C \times I)$ является компактом, лежащим в $Q \setminus Y$. Теперь повторяем это рассуждение. $G(B \times I)$ является компактом, лежащим в $Q \setminus Y$. Утверждается, что $D = g \circ G(B \times I)$ является искомым компактом, лежащим в $Q \setminus X$. Пусть U – произвольная окрестность компакта D. Так как отрезок I компактен, то существует такая окрестность $V(V \subset Q \setminus Y)$ множества B в Q, что $g \circ G(V \times I) \subset U$. По той же причине существует такая окрестность $W(W \subset Q \setminus X)$ компакта C в Q, что $f \circ F(W \times I) \subset V$. Теперь уже легко видеть, что

$$g_k \circ f_k|_W = g \circ G_{1/k} \circ f \circ F_{1/k}|_W \simeq$$

$$\simeq g \circ G_0 \circ f \circ F_{1/k}|_W \text{ (в } g \circ G(f \circ F_{1/k}(W) \times I)) \subset g \circ G(V \times I) \subset U) \simeq$$

$$\simeq g \circ G_0 \circ f \circ F_0|_W \ (\text{в } g \circ G_0(f \circ F(W \times I)) \subset g \circ G_0(V) \subset$$
$$\subset g \circ G(V \times I) \subset U) = g \circ f|_W = \mathrm{id}_W .$$

Совершенно аналогично проверяется справедливость и следующих гомотопий: $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g} \simeq \boldsymbol{i}_{Y,Q}$, $\boldsymbol{f}' \circ \boldsymbol{g}' \simeq \boldsymbol{i}_{Q\setminus Y,Q}$.

4. Замечание 1. *В теореме I условия „$X, Y \subset s$“ можно ослабить до условий „X, Y являются Z-множествами в Q“* [1] *но нельзя, считать, что компакты X и Y вложены в Q произвольно.* Это видно хотя бы из того, что если $X = Y = Q$, то X можно вложить в Q тождественно, и тогда $Q \setminus X = \emptyset$, а Y можно вложить в виде собственного подмножества, и тогда $Q \setminus Y \neq \emptyset$. Тем не менее Теорема 1 позволяет получить для гильбертова пространства некоторую абсолютную теорему. Так как любой компакт можно вложить в гильбертово пространство, то впредь мы будем говорить просто о компактах, предполагая, что они уже лежат в l_2.

Теорема 2. *Компакты X и Y имеют одинаковую форму в том и только в том случае, когда их расположения в l_2 совпадают.*

Доказательство. Если $\operatorname{Pos}(l_2, X) = \operatorname{Pos}(l_2, Y)$, то по [4, теорема 7.3] $\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} Y$, поэтому нам надо доказать лишь обратное утверждение. Пусть $\operatorname{Sh} X = \operatorname{Sh} Y$. По теореме Р. Д. Андерсона [1] пространства l_2 и s гомеоморфны, то есть существует гомеоморфизм $h : l_2 \to s$ и обратный ему гомеоморфизм $h^{-1} : s \to l_2$. Рассмотрим компакты $X' = h(X)$ и $Y' = h(Y)$. Тогда $\operatorname{Sh} X' = \operatorname{Sh} Y'$ и $X', Y' \subset s$. Множество $Z = X' \cup Y'$ является компактом, поэтому для $i \geqq 1$ существуют такие числа α_i, β_i, что $-1 < \alpha_i < \beta_i < 1$ и $Z \subset \subset s' = \prod_{i=1}^{\infty} (\alpha_i, \beta_i)$. Действительно, множество $\pi_i(Z)$, где π_i – проекция s на i-ый сомножитель, является компактом, поэтому существуют такие числа $\alpha_i > -1$ и $\beta_i < 1$, что для всякой точки $z \in Z$, $\pi_i(z) > \alpha_i$ и $\pi_i(z) < \beta_i$. Полученные числа α_i, β_i являются искомыми. Рассмотрим гильбертов кирпич $Q' = \prod_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i]$. Пусть теперь $r_i : [-1, 1] \to [\alpha_i, \beta_i]$ является такой ретракцией, что $r_i([-1, \alpha_i]) = \alpha_i$ и $r_i([\beta_i, 1]) = \beta_i$. Легко видеть, что отображение $R : s \to Q'$, заданное по формуле $R(\{t_i\}) = \{r_i(t_i)\}$, является такой деформационной ретракцией пространства s на Q', что $R(s \setminus Q') \cap s' = \emptyset$.

К компактам X', Y', лежащим в $s' \subset Q'$, применяем теорему 1. Итак, существуют две последовательности таких отображений

$$f'_k : Q' \to Q' \quad \text{и} \quad g'_k : Q' \to Q', \quad k = 1, 2, \dots,$$

что для них выполнены условия (1), (2), (3) и (4). Рассмотрим теперь две следующие последовательности отображений:

$$f_k : l_2 \to l_2 \quad \text{и} \quad g_k : l_2 \to l_2 , \quad k = 1, 2, \ldots ,$$

где $f_k = h^{-1} \circ f'_k \circ R \circ h$ и $g_k = h^{-1} \circ g'_k \circ R \circ h$. Нетрудно проверить, что последовательности отображений f_k и g_k, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условиям (1), (2), (3) и (4) для (l_2, X), (l_2, Y) в l_2, l_2, поэтому $\operatorname{Pos}(l_2, X) = \operatorname{Pos}(l_2, Y)$, чем доказательство теоремы и завершено.

Замечание 2. *Формы компактов, лежащих в конечномерном евклидовом пространстве, нельзя характеризовать их расположением.* В самом деле, возьмем в пространстве E^3 дугу L_1, содержащую множество Антуана, и кусочно — линейную дугу L_2. Тогда пространства $X = L_1$ и $Y = L_2$ даже гомеоморфны. Но по [2, пример 3] множество $E^3 \setminus L_2$ является гомотопно компактным [2], а по [2, пример 4] множество $E^3 \setminus L_1$ не является гомотопно компактным. Так как множество $E^3 \setminus L_1$ является открытым в E^3 и $E^3 \in AR(\mathfrak{M})$, то по теореме О. Ханнера [6] $E^3 \setminus L_1 \in ANR(\mathfrak{M})$. Следовательно, к пространству $E^3 \setminus L_1$ применима теорема Беннета-Борсука [2], и мы получаем, что $E^3 \setminus L_1$ не может W-доминироваться гомотопно-компактным множеством и, в частности, множеством $E^3 \setminus L_2$. Следовательно, $\operatorname{Pos}(E^3, L_1) \neq \operatorname{Pos}(E^3, L_2)$.

Если от компактов X и Y не требовать связности, то опровергающие примеры можно значительно упростить, и тогда их уже можно найти даже на плоскости. Действительно, пусть

$$X = \{x : x \in E^n \text{ и } \|x\| = 1\} \cup \{x : x_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

и

$$Y = \{x : x \in E^n \text{ и } \|x\| = 1\} \cup \{x : x_i = 2, \ i = 1, 2, \ldots, n\} .$$

Тогда X и Y даже гомеоморфны, но $\operatorname{Pos}(E^n, X) \neq \operatorname{Pos}(E^n, Y)$.

Литература

[1] *R. D. Anderson*, Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines. Bull. Amer. Math. Soc. *72* (1966), 515—519.

[2] *R. Bennet* and *K. Borsuk*, On homotopically compact spaces. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. *20* (1972), 865—869.

[3] *K. Borsuk*, Concerning homotopy properties of compacta. Fund. Math. *62* (1968), 223—254.

[4] *K. Borsuk*, On positions of sets in spaces. Fund. Math. *79* (1973), 141—158.

[5] *T. A. Chapman*, On some applications of infinite-dimensional manifolds to the theory of shape. Fund. Math. *76* (1972), 181—193.

[6] *O. Hanner*, Some theorems on absolute neighborhood retracts. Ark. Math. *1* (1951), 389—408.

Адрес авторов: СССР, Москва В-234, МГУ, Математическое отделение.