Manfred Müller; Jindřich Nečas

Über die Regularität der schwachen Lösungen von Randwertaufgaben für quasilineare elliptische Differentialgleichungen höherer Ordnung

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 2, 227–239

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101313`

Czechoslovak Mathematical Journal, 25 (100) 1975, Praha

ÜBER DIE REGULARITÄT DER SCHWACHEN LÖSUNGEN VON RANDWERTAUFGABEN FÜR QUASILINEARE ELLIPTISCHE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN HÖHERER ORDNUNG

MANFRED MÜLLER, Berlin und JINDŘICH NEČAS, Praha

(Eingengangen am 22. November 1973)

1. EINLEITUNG

Im beschränkten Gebiet $\Omega \subset E_N$ mit hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$ betrachten wir eine schwache Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{|i| \leqq k} (-1)^{|i|} D^i a_i(x, D^j u) = \sum_{|i| \leqq k} (-1)^{|i|} D^i f_i \,, \tag{1.1}$$

die zum reellen Sobolewraum $W_m^k(\Omega)$ gehört.

Hierbei ist k positiv und ganzzahlig, $m \geqq 2$, $D^i = \partial^{|i|}/\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_N^{i_N}$, $f_i \in L_{m/m-1}(\Omega)$.

Wir nehmen an, daβ die Dirichletsche Randbedingung

$$u - u_0 \in \mathring{W}_m^k(\Omega) \tag{1.2}$$

erfüllt ist, wobei $\mathring{W}_m^k(\Omega)$ die Abschließung der Menge $D(\Omega)$ aller beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω in der $W_m^k(\Omega)$-Norm bedeutet und $u_0 \in W_m^k(\Omega)$.

Sei M eine Menge von Multiindizes i, $|i| \leqq k$, mit folgenden Eigenschaften: M enthält alle Multiindizes der Länge k und mit einem Multiindex der Länge $k' < k$ enthält M auch alle anderen Multiindizes der Länge k'.

$\xi = \{\xi_j\}_{j \in M}$ sei ein Element des r-dimensionalen euklidischen Raumes E_r, wobei r die Anzahl der Elemente von M angibt.

Wir bezeichnen

$$V = 1 + \sum_{j \in M} |\xi_j| \,.$$

Voraussetzungen:

$$a_i \in C^1(\bar{\Omega} \times E_r) \,, \quad |i| \leqq k \tag{1.3}$$

$$(1.4)\qquad |a_{ij}(x,\xi)| \equiv \left|\frac{\partial}{\partial \xi_j} a_i(x,\xi)\right| \leqq C_1 V^{m-2},$$

$$\gamma_1 V^{m-2} \sum_{|i|=k} \lambda_i^2 \leqq \sum_{|i|,|j|\leqq k} a_{ij}(x,\xi)\,\lambda_i \lambda_j,$$

$$|a_i(x,\xi)| + \left|\frac{\partial}{\partial x_l} a_i(x,\xi)\right| \leqq C_2 V^{m-1}.$$

Solche Voraussetzungen findet man z. B. bei Vischik [1] und Morrey [2].

Der Hauptschritt zum Nachweis der Regularität (oder partieller Regularität) für die Lösung des Problems (1.1), (1.2) im Inneren von Ω besteht in der Abschätzung

$$(1.5)\qquad \int_{\Omega'} \sum_{|i|,|j|=k} a_{ij} D^i \frac{\partial u}{\partial x_l} D^j \frac{\partial u}{\partial x_l}\, \mathrm{d}x < \infty,$$

wobei $\bar{\Omega}' \subset \Omega$ ($\bar{\Omega}'$ ist die Abschließung von Ω'), $l = 1, \ldots, N$.

Eine genauere Abschätzung findet man bei Nečas [3], [4]:

$$(1.6)\qquad \int_{\Omega} \varrho^{k-2} V^{m-2} \sum_{|i|=k+1} (D^i u)^2\, \mathrm{d}x < \infty$$

mit $\varrho(x) = \text{Abstand}\,(x, \partial\Omega)$.

Diese inneren Abschätzungen sind bisher im Falle $N \geqq 3$ die besten für die Lösung des Problems (1.1), (1.2). Das Gegenbeispiel von Giusti und Miranda [12] deutet darauf hin, daß sie nicht wesentlich verbessert werden können.

Für die Dimension $N = 2$ hat Nečas in [5], [6] unter entsprechenden Voraussetzungen über die Funktionen u_0, f_i gezeigt, daß die Ableitungen $D^\alpha u$, $|\alpha| = k$, in Ω hölderstetig sind. Dieser Fakt ist (entsprechend den bekannten Sätzen aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen) der Ausgangspunkt für Aussagen über Regularität höherer Ordnung.

Im vorliegenden Artikel werden für $N \geqq 3$ Abschätzungen der Art bewiesen

$$(1.7)\qquad \int_{\Omega} V^{m-2} \sum_{|i|\leqq k} (D^i \partial_t u)^2\, \mathrm{d}x < \infty,$$

wobei $\partial_t u$ die unten definierte „Tangentialableitung" ist, und

$$(1.8)\qquad \int_{\Omega} \Big(V^{m-2} \sum_{|i|\leqq k+1} |D^i u|\Big)^q\, \mathrm{d}x < \infty$$

mit

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{(N-2)(m-2)}{2Nm}.$$

Für $m = 2$ ist auch $q = 2$, d. h. die $(k + 1)$-ten Ableitungen sind zur gleichen Potenz integrierbar wie die k-ten Ableitungen. Regularitätsaussagen für $m = 2$ sind von Müller in [10], [11] bewiesen worden.

2. DEFINITIONEN UND HILFSSÄTZE

Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß das Gebiet Ω einen unendlich oft differenzierbaren Rand $\partial\Omega$ hat.

Mit $E(\bar{\Omega})$ bezeichnen wir die Menge aller reellen, unendlich oft differenzierbaren und in $\bar{\Omega}$ zusammen mit allen Ableitungen stetigen Funktionen.

$D(\Omega)$ ist die Teilmenge von $E(\bar{\Omega})$ aller Funktionen mit kompaktem Träger.

Sei k positiv und ganzzahlig, $1 \leqq p < \infty$. Mit $W_p^k(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum aller reellen Funktionen, die zusammen mit allen Ableitungen (im Sinne der Distributionen) $D^i u$, $|i| \leqq k$, zur p-ten Potenz integrierbar sind. Die Norm in $W_p^k(\Omega)$ ist gegeben durch

$$\|u\|_{W_p{}^k(\Omega)} \equiv \|u\|_{k,p} = \left(\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} |D^i u|^p \, dx\right)^{1/p} .$$

Alle positiven Konstanten in den folgenden Sätzen und Beweisen bezeichnen wir mit C oder C_i. Wichtige Konstanten, deren Werte während des ganzen Artikels unverändert bleiben, bezeichnen wir mit $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$

Das folgende Lemma findet man z. B. in der Monografie von Nečas [7]:

Lemma 2.1. *Für $\mathring{W}_p^k(\Omega)$ gibt es die äquivalente Norm*:

$$\left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| = k} |D^\alpha u|^p \, dx\right)^{1/p} .$$

Für $W_p^k(\Omega)$ gibt es die äquivalente Norm:

$$\left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| = k} |D^\alpha u|^p \, dx + \int_M |u|^p \, dx\right)^{1/p} , \quad M \subset \Omega , \quad \mu(M) \neq 0 .$$

Für $k < 0$ definieren wir den Raum $W_p^k(\Omega)$ folgendermaßen: Es sei im folgenden stets $1/p + 1/p' = 1$. Dann setzen wir $W_p^k(\Omega) = (\mathring{W}_{p'}^{-k}(\Omega))^*$, wobei B^* der zu B duale Raum ist.

Die folgende wichtige Aussage gilt für Gebiete mit lipschitzstetigem Rand (vgl. Nečas [8]):

Lemma 2.2. *Sei $f \in W_p^l(\Omega)$, l ganzzahlig positiv, negativ oder Null, $1 < p < \infty$, v positiv, ganzzahlig. Dann gilt*:

$$\|f\|_{l,p} \leqq C\Big(\sum_{|\alpha| \leqq v} \|D^\alpha f\|_{l-v,p} + \|f\|_{l-v,p}\Big) .$$

Definition. Die Funktion $u \in W_m^k(\Omega)$ heißt *schwache Lösung* des Problems (1.1), (1.2), wenn (1.2) erfüllt ist und

$$\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i \varphi a_i(x, D^j u)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i \varphi f_i\, \mathrm{d}x \tag{2.1}$$

für jedes $\varphi \in \mathring{W}_m^k(\Omega)$ gilt.

Die Existenz einer schwachen Lösung des Problems (1.1), (1.2) beweisen wir hier nicht, denn diese Frage ist bereits in vielen Arbeiten untersucht worden (vgl. z. B. Vischik [1], Nečas [4]).

Aus den Voraussetzungen (1.4) folgt für die schwache Lösung des Problems (1.1), (1.2) ohne Schwierigkeit die Abschätzung:

Satz 2.1.

$$\|u\|_{k,m}^{m-1} \leqq C(1 + \sum_{|i| \leqq k} \|f_i\|_{0,m'} + \|u_0\|_{k,m}^{m-1}).$$

Beweis. Aus der Identität (2.1) erhalten wir mit $\varphi = u - u_0$:

$$\int_0^1 \mathrm{d}t \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leqq k} a_{ij}(x, D^\alpha u_0 + t(D^\alpha u - D^\alpha u_0))\, D^i(u - u_0)\, D^j(u - u_0)\, \mathrm{d}x = \tag{2.2}$$

$$= \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i(u - u_0) f_i\, \mathrm{d}x - \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i(u - u_0)\, a_i(x, D^\alpha u_0)\, \mathrm{d}x .$$

Es läßt sich aber leicht zeigen, daß für beliebige reelle Zahlen a, c gilt:

$$\int_0^1 |a + tc|^{m-2}\, \mathrm{d}t \geqq C_1 |c|^{m-2} . \tag{2.3}$$

Die Behauptung des Satzes folgt dann aus (2.2), (2.3) unter Berücksichtigung von (1.4).

3. DIE ABSCHÄTZUNGEN

Zuerst definieren wir ein lokales Tangentialvektorfeld. Sei $\tilde{x} \in \partial\Omega$ beliebig und $(x_1, \ldots, x_N)$ ein Koordinatensystem mit dem Ursprung in $\tilde{x}$, dessen x_N-Achse parallel zur inneren Normalen an $\partial\Omega$ in $\tilde{x}$ verläuft. Entsprechend unseren Voraussetzungen genügt der Rand von Ω in einer gewissen Umgebung von $\tilde{x}$ der Gleichung

$$x_N = \omega(x') , \quad x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}) ,$$

wobei $\omega \in E(\Delta_{\alpha_1})$ für

$$\Delta_{\alpha_1} = \{x' \mid -\alpha_1 < x_i < \alpha_1,\ i = 1, \ldots, N - 1\} .$$

Wir wählen α_1 außerdem noch so, daß alle Punkte $x = (x', x_N)$ mit $x' \in \Delta_{\alpha_1}$, $\omega(x') < x_N \leqq \omega(x') + \alpha_1$ zu Ω gehören.

Sei α reell, $0 < \alpha < \alpha_1$. Mit $\zeta = \zeta(x)$ bezeichnen wir eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

i) $\zeta \in D(E_N)$,

ii) $\operatorname{supp} \zeta \subset M_{\alpha_1} = \{(x', x_N) \mid x' \in \Delta_{\alpha_1},\ \omega(x') - \alpha_1 < x_N < \omega(x') + \alpha_1\}$,

iii) $\zeta(x) \equiv 1$ in $\bar{N}_\alpha = \{(x', x_N) \mid x' \in \bar{\Delta}_\alpha,\ \omega(x') \leqq x_N \leqq \omega(x') + \alpha\}$.

Angenommen, wir haben endlich viele Mengen N_α ausgewählt, die den Rand $\partial\Omega$ überdecken.

Für hinreichend kleines τ, $|\tau| \leqq \varepsilon$, und $v = 1, \ldots, N-1$ definieren wir folgende Abbildung von $\operatorname{supp} \zeta$ in M_{α_1}:

$$y = x + h(x, \tau)\,,$$

wobei

$$\begin{aligned} h_l(x, \tau) &= o \quad \text{für} \quad 1 \leqq l \leqq N-1\,, \quad l \neq v \\ h_v(x, \tau) &= \tau\,, \\ h_N(x, \tau) &= \omega(x' + h'(x, \tau)) - \omega(x')\,. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt:

$$x = y + h(y, -\tau)$$

und wenn $x \in \partial\Omega$, so auch $y \in \partial\Omega$. Außerdem haben wir für die Jacobi-Determinante $D(y)/D(x) = 1$.

Für $x \in \operatorname{supp} \zeta$ definieren wir den „Tangentialdifferentiationsoperator“

$$\partial_t u = \frac{\partial u}{\partial x_v}(y) + \frac{\partial u}{\partial x_N}(y)\frac{\partial \omega}{\partial x_v}(y')\,.$$

Es gilt dann der folgende grundlegende Satz:

Satz 3.1. *Sei $u \in W_m^k(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems* (1.1), (1.2). *Unter den Voraussetzungen* (1.3), (1.4) *und $f_i \in W_2^1(\Omega)$, $u_0 \in W_m^{k+1}(\Omega)$ gilt die Abschätzung*:

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} &\int_{N_\alpha} \Big(1 + \sum_{j\in M} |D^j u|\Big)^{m-2} \sum_{|i|\leqq k} \left(D^i\left(\frac{\partial u}{\partial x_v} + \frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial \omega}{\partial x_v}\right)\right)^2 \mathrm{d}x \leqq \\ &\leqq C\Big(1 + \|u\|_{k,m}^m + \sum_{|i|\leqq k} \|f_i\|_{1,2}^2 + \|u_0\|_{k+1,m}^m\Big)\,. \end{aligned}$$

B e w e i s. Zunächst vermerken wir folgenden wichtigen Fakt: Die Voraussetzungen (1.3), (1.4) sind invariant bezüglich Drehung und Translation des Koordinatensystems. Wir können also annehmen, daß sowohl die Identität (2.1), als auch die Voraussetzungen (1.3), (1.4) bereits in dem Ortskoordinatensystem mit dem Ursprung in $\tilde{x}$ notiert sind.

Sei $T(x)$ eine lokal definierte, unendlich oft differenzierbare Abbildung von Ω in Ω. Für $\varphi \in W_p^l(\Omega)$ bezeichnen wir dann mit $\partial^i\varphi(T(x))$ die verallgemeinerte Ableitung $D^i\varphi$, berechnet im Punkte $T(x)$.

Offensichtlich gilt:

$$D^i\varphi(x + h(x, \tau)) = \partial^i\varphi(x + h(x, \tau)) + \sum_{|\alpha| \leqq |i|} \partial^\alpha\varphi(x + h(x, \tau))\, b_\alpha^i(x, \tau)\,, \tag{3.2}$$

wobei die Funktionen $b_\alpha^i(x, \tau)$ beliebig oft differenzierbar sind und

$$\left|\frac{b_\alpha^i(x, \tau)}{\tau}\right| \leqq C\,. \tag{3.3}$$

Sei nun $\varphi \in \mathring{W}_m^k(\Omega)$ mit supp $\varphi \subseteq$ supp ζ. Dann folgt aus (2.1) zunächst:

$$\int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i(\varphi(x + h(x, \tau)) - \varphi(x))\, a_i(x, D^j u)\, \mathrm{d}x =$$
$$= \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} D^i(\varphi(x + h(x, \tau)) - \varphi(x))\, f_i(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Unter Berücksichtigung von (3.2) ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^1 \sum_{|i|,|j| \leqq k} a_{ij}(y + h(y, -t\tau), \partial^\alpha u(y) + t(\partial^\alpha u(y + h(y, -\tau)) - \partial^\alpha u(y)))\, \mathrm{d}t \times \\
&\qquad \times (\partial^j u(y + h(y, -\tau)) - \partial^j u(y))\, \partial^i\varphi(y)\, \mathrm{d}y - \\
&- \tau \int_\Omega \int_0^1 \sum_{|i| \leqq k} \sum_{l=1}^N \frac{\partial a_i}{\partial x_l}(y + h(y, -t\tau), \partial^\alpha u(y) + t(\partial^\alpha u(y + h(y, -\tau)) - \partial^\alpha u(y)))\,. \\
&\qquad . \frac{\partial h_l}{\partial \tau}(y, -t\tau)\, \mathrm{d}t\, \partial^i\varphi(y)\, \mathrm{d}y + \\
&+ \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} \sum_{|\alpha| \leqq |i|} a_i(x, \partial^j u(x))\, b_\alpha^i(x, \tau)\, \partial^\alpha\varphi(x + h(x, \tau))\, \mathrm{d}x = \\
&= -\tau \int_\Omega \int_0^1 \sum_{|i| \leqq k} \sum_{l=1}^N \frac{\partial f_i}{\partial x_l}(y + h(y, -t\tau))\, \frac{\partial h_l}{\partial \tau}(y, -t\tau)\, \mathrm{d}t\, \partial^i\varphi(y)\, \mathrm{d}y + \\
&+ \int_\Omega \sum_{|i| \leqq k} \sum_{|\alpha| \leqq |i|} f_i(x)\, b_\alpha^i(x, \tau)\, \partial^\alpha\varphi(x + h(x, \tau))\, \mathrm{d}x\,.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Wir setzen

$$\varphi(y) = \frac{1}{\tau^2}\zeta^{2k}(y)[u(y + h(y, -\tau)) - u(y) - u_0(y + h(y, -\tau)) + u_0(y)]$$

und

$$J = \int_\Omega \int_0^1 (1 + \sum_{\alpha\in M} |\partial^\alpha u(y) + t(\partial^\alpha u(y + h(y, -\tau)) - \partial^\alpha u(y))|)^{m-2}\, \mathrm{d}t \times$$

$$\times \sum_{|i|=k} \left(D^i \left(\frac{u(y + h(y, -\tau)) - u(y)}{\tau}\right)\right)^2 \zeta^{2k}\, \mathrm{d}y\,.$$

Aus der Ungleichung (2.3) erhalten wir

$$\int_0^1 |a + t(b - a)|^{m-2}\, \mathrm{d}t \geqq C|b|^{m-2} \tag{3.5}$$

und damit

$$J \geqq C \int_\Omega (1 + \sum_{\alpha\in M} |\partial^\alpha u(y + h(y, -\tau))|)^{m-2} \times \tag{3.6}$$

$$\times \sum_{|i|=k} \left(D^i \left(\frac{u(y + h(y, -\tau)) - u(y)}{\tau}\right)\right)^2 \zeta^{2k}\, \mathrm{d}y\,.$$

Aus (3.4) erhalten wir unter Berücksichtigung der Wachstumsbedingungen (1.4) sowie der Voraussetzungen über f_i, u_0:

$$J \leqq C(1 + \|u\|_{k,m}^m + \|u_0\|_{k+1,m}^m + \sum_{|i|\leqq k} \|f_i\|_{1,2}^2)\,. \tag{3.7}$$

Wir haben die Darstellung:

$$\frac{u(y + h(y, -\tau)) - u(y)}{\tau} =$$

$$= -\int_0^1 \left[\frac{\partial u}{\partial x_\nu}(y + h(y, -t\tau)) + \frac{\partial u}{\partial x_N}(y + h(y, -t\tau))\frac{\partial \omega}{\partial x_\nu}(y' + h'(y, -t\tau))\right] \mathrm{d}t\,.$$

Da aber $u \in W_2^{k+1}(\Omega')$ für jedes echte Teilgebiet $\Omega' \subset \Omega$ gilt (vgl. [3]), können wir annehmen, daß die Funktion u zusammen mit ihren Ableitungen $D^i u$, $|i| \leqq k$, für fast alle $y \in \operatorname{supp} \zeta$ auf der Kurve $y + h(y, -\tau)$, $0 \leqq \tau \leqq \varepsilon$, absolut stetig ist. Diese Tatsache folgt aus den Eigenschaften von $W_2^1(\Omega)$ (vgl. Nečas [7] oder Deny, Lions [9]).

Damit hat der nichtnegative Integrand in (3.6) für $\tau \to 0$ f. ü. den Grenzwert:

$$(1 + \sum_{\alpha\in M} |D^\alpha u(y)|)^{m-2} \sum_{|i|=k} (D^i \partial_t\, u(y))^2\,.$$

Die Behauptung des Satzes folgt dann aus (3.7) und aus dem Lemma von Fatou.

Lemma 3.1. *Unter den Voraussetzungen von Satz* 3.1 *genügt die schwache Lösung des Problems* (1.1), (1.2) *für jedes echte Teilgebiet* $\Omega' \subset \Omega$ *und* $N \geqq 3$ *der Abschätzung*:

$$\left(\int_{\Omega'} [(1 + \sum_{\alpha \in M} |D^\alpha u|)^{m-2} \sum_{|i|=k+1} |D^i u|]^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqq$$

$$\leqq C(\Omega')\,(1 + \|u\|_{k,m}^m + \|u_0\|_{k+1,m}^m + \sum_{|i| \leqq k} \|f_i\|_{1,2}^2)^{1-1/m},$$

wobei

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{(N-2)(m-2)}{2mN}.$$

Beweis. Es gilt folgende Abschätzung (vgl. [3]):

$$\int_{\Omega'} (1 + \sum_{\alpha \in M} |D^\alpha u|)^{m-2} \sum_{|i| \leqq k+1} (D^i u)^2 \,\mathrm{d}x \leqq C(\Omega')\,(1 + \tag{3.8}$$

$$+ \|u\|_{k,m}^m + \|u_0\|_{k+1,m}^m + \sum_{|i| \leqq k} \|f_i\|_{1,2}^2).$$

Wir können o.B.d.A. annehmen, daß Ω' einen lipschitzstetigen Rand hat. Für $|j| = k$ folgt aus (3.8):

$$|D^j u|^{m/2} \in W_2^1(\Omega').$$

Nach dem Sobolewschen Einbettungssatz und Lemma 2.1 erhalten wir dann für $|\beta| \leqq k$:

(3.9)

$$\left(\int_{\Omega'} |D^\beta u|^{mN/(N-2)} \,\mathrm{d}x\right)^{(N-2)/mN} \leqq C(\Omega')\,(1 + \|u\|_{k,m}^m + \|u_0\|_{k+1,m}^m + \sum_{|i| \leqq k} \|f_i\|_{1,2}^2)^{1/m}.$$

Sei nun

$$\frac{q}{2-q} = \frac{mN}{(N-2)(m-2)}.$$

Dann folgt aus (3.8) und (3.9):

$$\left(\int_{\Omega'} (1 + \sum_{\alpha \in M} |D^\alpha u|)^{(m-2)q} \sum_{|i|=k+1} |D^i u|^q \,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \leqq$$

$$\leqq C\left(\int_{\Omega'}(1+\sum_{\alpha\in M}|D^\alpha u|)^{(m-2).q/(2-q)}\,dx\right)^{(2-q)/2q}\times$$

$$\times\left(\int_{\Omega'}(1+\sum_{\alpha\in M}|D^\alpha u|^{m-2})\sum_{|i|=k+1}|D^i u|^2\,dx\right)^{1/2}\leqq$$

$$\leqq C(\Omega')\,(1+\|u\|_{k,m}^m+\|u_0\|_{k+1,m}^m+\sum_{|i|\leqq k}\|f_i\|_{1,2}^2)^{1-1/m}\,.$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

Wir führen nun für $0\leqq\sigma\leqq\frac{1}{2}\alpha$ folgende Bezeichnung ein:

$$N_{\alpha,\sigma}=\{(x',x_N)\mid x'\in\Delta_\alpha,\ \omega(x')+\sigma<x_N<\omega(x')+\alpha\}\,.$$

Offensichtlich ist $N_{\alpha,0}=N_\alpha$.

Wir beweisen den folgenden grundlegenden Satz:

Satz 3.2. *Sei $u\in W_m^k(\Omega)$ eine schwache Lösung des Randwertproblems (1.1), (1.2). Unter den Voraussetzungen (1.3), (1.4) und $f_i\in W_2^1(\Omega)$, $u_0\in W_m^{k+1}(\Omega)$, $N\geqq 3$, $1/q=\frac{1}{2}+(N-2)(m-2)/2mN$ gilt folgende Abschätzung:*

$$\left(\int_{\Omega}(1+\sum_{\alpha\in M}|D^\alpha u|)^{(m-2)q}\sum_{|i|\leqq k+1}|D^i u|^q\,dx\right)^{1/q}\leqq \tag{3.10}$$

$$\leqq C(1+\|u\|_{k,m}^m+\|u_0\|_{k+1,m}^m+\sum_{|i|\leqq k}\|f_i\|_{1,2}^2)^{1-1/m}\,.$$

Beweis. Sei $y=y(x)$ eine Abbildung, die durch die Formeln definiert wird:

$$y'=x'\,,\quad x'=(x_1,\dots,x_{N-1})\,,$$
$$y_N=x_N-\omega(x')\,.$$

Diese Abbildung transformiert die Menge $N_{\alpha,\sigma}$ in die Menge $K_\sigma=\Delta_\alpha\times(\sigma,\alpha)$. Ihre Determinante ist gleich Eins.

Wenn wir setzen

$$u(x(y))=v(y)\,,\quad \varphi(x(y))=\psi(y)\,,$$

so haben wir

$$D_x^i\,u(x)=\sum_{|\alpha|\leqq|i|}t_\alpha^i(x)\,D_y^\alpha\,v(y(x))\,. \tag{3.11}$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehung erhalten wir aus der Identität (2.1) für jedes $\psi\in D(K_\sigma)$:

$$\int_{K_\sigma}\sum_{|\alpha|\leqq k}D^\alpha\,\psi(y)\,A_\alpha(y,D^\beta\,v(y))\,dy=\int_{K_\sigma}\sum_{|\alpha|\leqq k}D^\alpha\,\psi(y)\,F_\alpha(y)\,dy\,. \tag{3.12}$$

Wir bezeichnen

$$r(y, \eta_j) = 1 + \sum_{i \in M} \Big| \sum_{|\beta| \leqq |i|} t^i_\beta(x(y))\, \eta_\beta \Big| .$$

Dann gilt für die Koeffizienten $A_\alpha(y, \eta)$:

(3.13)
$$|A_\alpha(y, \eta_\beta)| + \left|\frac{\partial A_\alpha}{\partial y_l}(y, \eta_\beta)\right| \leqq C\big(1 + \sum_{|\gamma| \leqq k} |\eta_\gamma|\big)^{m-1} ,$$

$$|A_{\alpha\beta}(y, \eta_\gamma)| \leqq C r(y, \eta_\gamma)^{m-2} ,$$

$$\sum_{|\alpha|, |\beta| = k} A_{\alpha\beta}(y, \eta_\gamma)\, \omega_\alpha \omega_\beta \geqq C r(y, \eta_\gamma)^{m-2} \sum_{|\alpha| = k} \omega_\alpha^2 .$$

Hierbei ist lediglich die letzte Ungleichung nicht trivial. Wir erhalten sie unmittelbar aus der Beziehung (3.11), den Bedingungen (1.4) sowie unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die Determinante $D(y)/D(x) = 1$ ist.

Seien nun $\psi \in \mathring{W}^{k-1}_{q'}(K_\sigma)$, $1/q + 1/q' = 1$, und

$$S = \sum_{|\alpha| = k-1} \sup_{\|\psi\|_{W_{q'}{}^{k-1}(K_\sigma)} = 1} \left| \int_{K_\sigma} D^\alpha \psi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_N} A_{\bar{\nu}}(y, D^\beta_y v)\, \mathrm{d}y \right| +$$

$$+ \sup_{\|\psi\|_{W_{q'}{}^{k-1}(K_\sigma)} = 1} \left| \int_{K_\sigma} \psi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_N} A_\nu(y, D^\beta_y v)\, \mathrm{d}y \right| .$$

Dabei bezeichnen $\bar{\nu} = (0, \ldots, k)$, $\nu = (0, \ldots, k-1)$. $\mathrm{d}/\mathrm{d}y_N$ bedeutet die vollständige Ableitung.

Aus Lemma 2.2 folgt:

(3.14)
$$\left(\int_{K_\sigma} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_N} A_{\bar{\nu}}(y, D^\beta_y v) \right|^q \mathrm{d}y \right)^{1/q} \leqq CS .$$

Unter Berücksichtigung von (3.13) erhalten wir für $\mu = 1, \ldots, N$:

$$\left(\int_{K_\sigma} \left| \frac{\partial A_{\bar{\nu}}}{\partial y_\mu}(y, D^\beta_y v) \right|^q \mathrm{d}y \right)^{1/q} \leqq C \left[1 + \left(\int_{K_\sigma} \sum_{|\alpha| \leqq k} |D^\alpha_y v|^{(m-1)q}\, \mathrm{d}y \right)^{1/q} \right] \leqq$$

$$\leqq C \left[1 + \|u\|^{m/2}_{k,m} \left(\int_{K_\sigma} \sum_{|\alpha| \leqq k} |D^\alpha_y v|^{mN/(N-2)}\, \mathrm{d}y \right)^{(N-2)(m-2)/2mN} \right] .$$

Wir setzen

$$\varrho(v) = \left(\int_{K_\sigma} r(y, D^\alpha v)^{(m-2)q} \sum_{|\alpha| = k+1} |D^\alpha v|^q\, \mathrm{d}y \right)^{1/q} .$$

Aus den Einbettungssätzen für $N \geqq 3$ folgt aber:

$$(3.15)\qquad \left(\int_{K_\sigma} \sum_{|\alpha| \leqq k} \left|D^\alpha v\right|^{mN/(N-2)} \mathrm{d}y\right)^{(N-2)/mN} \leqq C\,\varrho(v)^{1/(m-1)} + C\|u\|_{k,m}$$

und damit für $\mu = 1, \ldots, N$:

$$(3.16)\qquad \left(\int_{K_\sigma} \left|\frac{\partial A_{\bar{\nu}}}{\partial y_\mu}(y, D_y^\beta v)\right|^q \mathrm{d}y\right)^{1/q} \leqq C[1 + \|u\|_{k,m}^{m/2}\,\varrho(v)^{(m-2)/2(m-1)} + \|u\|_{k,m}^{m-1}]\,.$$

Offensichtlich ist

$$\frac{\partial v}{\partial y_\mu} = \frac{\partial u}{\partial x_\mu} + \frac{\partial u}{\partial x_N}\frac{\partial \omega}{\partial x_\mu}, \quad \mu \neq N\,.$$

Deshalb erhalten wir für $|\beta|, |j| \leqq k$, $j \neq \bar{\nu}$ unter Berücksichtigung von (3.13) und (3.15) sowie (3.1) ähnlich wie im Beweis von Lemma 3.1:

$$(3.17)\qquad \left(\int_{K_\sigma} \left|A_{\bar{\nu}\beta} D_y^i \frac{\partial v}{\partial y_N}\right|^q \mathrm{d}y\right)^{1/q} \leqq C\,(1 + \|u\|_{k,m}^m + \|u_0\|_{k+1,m}^m + \sum_{|i| \leqq k} \|f_i\|_{1,2}^2)^{1/2}\,(1 + \varrho(v)^{(m-2)/2(m-1)} + \|u\|_{k,m}^{m/2-1})\,.$$

Mit Hilfe der positiven Definitheit der quadratischen Form $\sum A_{\alpha\beta}\omega_\alpha\omega_\beta$ gewinnen wir aus (3.14), (3.16) und (3.17) die Abschätzung:

$$(3.18)\qquad \left(\int_{K_\sigma} r(y, D_y^\alpha v)^{(m-2)q} \left|\frac{\partial^{k+1} v}{\partial y_N^{k+1}}\right|^q \mathrm{d}y\right)^{1/q} \leqq$$
$$\leqq CS + C(1 + \|u\|_{k,m}^m + \|u_0\|_{k+1,m}^m + \sum_{|i| \leqq k} \|f_i\|_{1,2}^2)^{1/2} \times$$
$$\times\,(1 + \varrho(v)^{(m-2)/2(m-1)} + \|u\|_{k,m}^{m/2-1})\,.$$

Wir schätzen nun noch den Ausdruck S ab. Genau wie (3.16) erhalten wir:

$$(3.19)\qquad \sup_{\|\psi\|_{W_{q'}{}^{k-1}(K_\sigma)}=1} \left|\int_{K_\sigma} \psi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_N} A_{\bar{\nu}}\,\mathrm{d}y\right| = \sup \left|\int_{K_\sigma} \frac{\partial \psi}{\partial y_N} A_{\bar{\nu}}\,\mathrm{d}y\right| \leqq$$
$$\leqq C(1 + \|u\|_{k,m}^{m/2}\,\varrho(v)^{(m-2)/2(m-1)} + \|u\|_{k,m}^{m-1})\,.$$

Ist nun $\alpha \neq \nu$, so erhalten wir unter Verwendung von (3.16) und (3.17) mit einem gewissen $\mu \neq N$:

$$(3.20)\qquad \sup_{\|\psi\|_{W_{q'}{}^{k-1}(K_\sigma)}=1} \left|\int_{K_\sigma} D^\alpha \psi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_N} A_{\bar{\nu}}\,\mathrm{d}y\right| = \sup \left|\int_{K_\sigma} D^\beta \psi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_\mu} A_{\bar{\nu}}\,\mathrm{d}y\right| \leqq$$
$$\leqq C(1 + \|u\|_{k,m}^m + \|u_0\|_{k+1,m}^m + \sum_{|i| \leqq k} \|f_i\|_{1,2}^2)^{1/2} \times$$
$$\times\,(1 + \varrho(v)^{(m-2)/2(m-1)} + \|u\|_{k,m}^{m/2-1})\,.$$

Für $\alpha = \nu$ drücken wir

$$\int_{K_\sigma} D^{\bar\nu}\psi A_{\bar\nu}\,\mathrm{d}y$$

mit Hilfe der Identität (3.12) durch Größen aus, die bereits abgeschätzt sind, und erhalten:

$$\sup_{\|\psi\|_{W_q{}^{,k-1}(K_\sigma)}=1} \left|\int_{K_\sigma} D^{\nu}\psi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_N} A_{\bar\nu}\,\mathrm{d}y\right| \leqq \tag{3.21}$$

$$\leqq C\big(1 + \|u\|^m_{k,m} + \|u_0\|^m_{k+1,m} + \sum_{|i|\leqq k} \|f_i\|^2_{1,2}\big)^{1/2} \times$$

$$\times \big(1 + \varrho(v)^{(m-2)/2(m-1)} + \|u\|^{m/2-1}_{k,m}\big).$$

Schließlich bekommen wir wie in (3.17):

$$\left(\int_{K_\sigma} r(y, D^\alpha_y v)^{(m-2)q} \sum_{|\beta|\leqq k}\sum_{l=1}^{N-1} \left|D^\beta \frac{\partial v}{\partial y_l}\right|^q \mathrm{d}y\right)^{1/q} \leqq \tag{3.22}$$

$$\leqq C\big(1 + \|u\|^m_{k,m} + \|u_0\|^m_{k+1,m} + \sum_{|i|\leqq k} \|f_i\|^2_{1,2}\big)^{1/2} \times$$

$$\times \big(1 + \varrho(v)^{(m-2)/2(m-1)} + \|u\|^{m/2-1}_{k,m}\big)$$

Aus (3.18)–(3.22) folgt dann:

$$\varrho(v) \leqq C\big(1 + \|u\|^m_{k,m} + \|u_0\|^m_{k+1,m} + \sum_{|i|\leqq k} \|f_i\|^2_{1,2}\big)^{1/2} \times \tag{3.23}$$

$$\times \big(1 + \varrho(v)^{(m-2)/2(m-1)} + \|u\|^{m/2-1}_{k,m}\big)$$

und hieraus unter Verwendung der Youngschen Ungleichung:

$$\varrho(v) \leqq C\big(1 + \|u\|^m_{k,m} + \|u_0\|^m_{k+1,m} + \sum_{|i|\leqq k} \|f_i\|^2_{1,2}\big)^{1-1/m}. \tag{3.24}$$

Diese Abschätzung hängt nicht von σ ab und gilt demzufolge auch für $\sigma = 0$. Unter Berücksichtigung von Lemma 3.1 sowie der Tatsache, daß die Gebiete N_α den Rand $\partial\Omega$ überdecken, erhalten wir schließlich die Behauptung des Satzes.

Literaturverzeichnis

[1] *М. И. Вишик:* Квазилинейные сильно-эллиптические системы дифференциальных уравнений, имеющие дивергентную форму, Труды Московского математического общества, *12*, (1963), 125–182.

[2] *Ch. B. Morrey:* Multiple integrals in the calculus of variations, Springer-Verlag, New York, 1966.

[3] *J. Nečas:* Sur la méthode variationnelle pour les équations aux dérivées partielles non linéaires du type elliptique; l'existence et la régularité des solutions, Commentationes Math. Universitatis Carol., *7*, 3, (1966), 301—317.
[4] *J. Nečas:* Les équations elliptiques non linéaires, Czechoslovak Math. Journal, *19 (94)*, (1969), 252—274.
[5] *J. Nečas:* Sur la régularité des solutions variationnelles des équations elliptiques non-linéaires d'ordre $2k$ en deux dimensions, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, *XXI*, fasc. III, (1967), 427—457.
[6] *J. Nečas:* Sur la régularité des solutions faibles des équations elliptiques non linéaires, Commenationes Math. Universitatis Carol., *9, 3* (1968), 365—413.
[7] *J. Nečas:* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Academia, Prag, 1967.
[8] *J. Nečas:* Sur les normes equivalentes dans W_p^k et sur las coercivité des formes formellement positives, Semin. Mathem. Sup. Montreal 1965, Presse de l'Université Montreal, 1966.
[9] *J. Deny, J. L. Lions:* Les espaces du type de Beppo Levi, Ann. Inst. Fourier, *5*, (1953—54), 305—370.
[10] *M. Müller:* Über die Differenzierbarkeit der Lösungen gewisser quasilinearer elliptischer Differentialgleichungen am Rande des Gebiets, Tagungsberichte der Sommerschule über monotone Operatoren Hiddensee 1972, (erscheint).
[11] *M. Müller:* Über die Regularität der Lösungen quasilinearer elliptischer Differentialgleichungen höherer Ordnung am Rande des Gebiets, Mathem. Nachrichten (im Druck).
[12] *E. Giusti, M. Miranda:* Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni, Boll. Un. Mat. Ital., *4*, 1, (1968), 219—226.

Anschrift der Autoren: M. Müller, 108 Berlin, Unter den Linden 6, DDR (Humboldt-Universität zu Berlin, Sektion Mathematik). J. Nečas, 115 67 Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).