Czechoslovak Mathematical Journal

František Machala
Projektive Abbildungen projektiver Räume mit Homomorphismus

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 25 (1975), No. 2, 214–226

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101312

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1975

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Czechoslovak Mathematical Journal, 25 (100) 1975, Praha

PROJEKTIVE ABBILDUNGEN PROJEKTIVER RÄUME MIT HOMOMORPHISMUS

FRANTIŠEK MACHALA, Olomouc

(Eingegangen am 29. October 1973)

W. KLINGENBERG definierte in [3], S. 189, desarguessche projektive Ebenen mit Homomorphismus, in [4], S. 100, projektive Räume mit Homomorphismus endlicher Dimension und er stellte diese Strukturen algebraisch mit Hilfe der freien Moduln über den Stellenringen dar.

In vorliegender Arbeit wird eine Verallgemeinerung des Struktursatzes der projektiven Geometrie (siehe etwa [1], Kap. III, § 1) auf projektive Räume mit Homomorphismus durchgeführt.

Der Beitrag besteht aus drei Teilen. Im ersten Teil werden freie Moduln (R, M) beliebiger (endlicher sowie unendlicher) Dimension über einem Stellenring R betrachtet und mittels einer bevorzugten Basis B des Moduls (R, M) ein gewisser Untermodul M_0 in M bestimmt. Zu jedem Modul (R, M) wird dann ein sog. zugeordneter Vektorraum (R', M') über einem Körper $R' = R/R_0$ konstruiert, dabei ist R_0 ein maximales Ideal in R und $M' = M/M_0$.

Durch die Definitionen 4,5 wird eine halblineare und teilweise halblineare Abbildung der Moduln (R, M), (Q, N) über den Stellenringen R, Q eingeführt. Zu jeder halblinearen Abbildung (φ, σ) der Moduln (R, M), (Q, N) mit der Eigenschaft $M_0^\sigma = N_0$ läßt sich eine halblineare Abbildung der zugeordneten Vektorräume (R', M'), (Q', N') bestimmen und jede teilweise halblineare Abbildung der Moduln (R, M), (Q, N) kann in genau eine halblineare Abbildung derjeniger Moduln erweitert werden.

Im zweiten Teil definiert man mit Hilfe des Moduls (R, M) einen projektiven Raum $P(R, M)$ mit Homomorphismus und mit Hilfe des Vektorraums (R', M') einen zu $P(R, M)$ zugeordneten projektiven Raum $P(R', M')$. Wie sich zeigen läßt, gibt es einen Homomorphismus $P(R, M)$ auf $P(R', M')$. Ist $\dim M = 3$, so ist $P(R, M)$ eine desarguessche projektive Ebene mit Homomorphismus im Sinne von W. Klingenberg. Ist $\dim M = n$, $n > 3$, so ist $P(R, M)$ ein projektiver Raum mit Homomorphismus im Sinne von [4]. Durch die Definition 7 ist eine projektive Abbildung der projektiven Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$ mit Homomorphismus erklärt und im Satz 13 wird gezeigt, daß jede teilweise halblineare Abbildung der Moduln (R, M), (Q, N) eine projektive Abbildung der Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$ induziert.

Im dritten Teil wird der Struktursatz für projektive Räume mit Homomorphismus bewiesen: Jede projektive Abbildung der Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$ wird durch eine teilweise halblineare Abbildung der Moduln (R, M), (Q, N) induziert. Der Beweis hierfür ergibt sich aus der Verallgemeinerung der Beweisfigur von Struktursatz der projektiven Geometrie aus [1] auf projektive Räume mit Homomorphismus. Mit den Ergebnissen aus Teil 1 erhält man hier: Sind die Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$ projektiv äquivalent, so sind die Ringe R, Q isomorph, die zugeordneten projektiven Räumen $P(R', M')$, $P(Q', N')$ sind projektiv äquivalent und die Körper $R' = R/R_0$, $Q' = Q/Q_0$ sind isomorph.

In [5] und [6] benutzte man die Beweisfigur vom Struktursatz der projektiven Geometrie aus [1] zur Verallgemeinerung auf Moduln über einem beliebigen Ring mit Einselement. Die projektive Abbildung der Moduln (R, M), (Q, N) ist hierbei als ein Isomorphismus der durch die Untermoduln aus M, N erzeugten Verbände definiert, der eine bijektive Abbildung von Mengen monogener Untermoduln aus M, N induziert. In der vorliegenden Arbeit wird indessen die projektive Abbildung der Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$ als eine bijektive Abbildung der Punktmengen der beiden Räume definiert, die eine Inzidenz von Punkten und Geraden wiedergeben. Diese Definitionen sind äquivalent, falls (R, M), (Q, N) Vektorräume sind, im allgemeinen ist dies jedoch nicht der Fall. Daher sind die hier gewonnen Ergebnisse durch die Anwendung der Ergebnisse aus [5] und [6] nicht erreichbar.

I

Definition 1. Ein assoziativer Ring R mit Einselement (nicht notwendigerweise kommutativ), der genau ein maximales Rechtsideal R_0 besitzt, heißt ein *Stellenring*. Wir setzen $R^* = R \setminus R_0$.

Satz 1. *Ein maximales Rechtsideal R_0 eines Stellenringes R ist ein zweiseitiges Ideal und bildet eine Menge aller nicht invertierbaren Elemente von R (d. h. derjenigen Elemente zu denen keine inversen existieren). Der Restklassenring R/R_0 ist ein Körper.*

Zum Beweis siehe [2], Kap. 3, § 3.7.

Vorgelegt sei ein freier unitärer Linksmodul M über einem Stellenring R, kurz (R, M). Der vom Element $x \in M$ erzeugter Untermodul von M wird mit Rx bezeichnet. Wählen wir eine Basis B von M. (Im folgenden sei vorausgesetzt, daß card $B \geqq 3$.) Jedes Element $x \in M$ läßt sich eindeutig in der Form $x = \sum_{v \in J} \alpha_v x_v$ schreiben mit $\alpha_v x_v \neq o$ für nur endlich viele v. Mit M_0 bezeichnen wir die Menge aller Elemente $u = \sum_{v \in J} \beta_v x_v$ mit $\beta_v \in R_0 \; \forall v \in J$ und setzen $M^* = M \setminus M_0$. M_0 ist ein Untermodul von M.

Bemerkung 1. Der Untermodul M_0 und die Menge M^* sind von der Wahl der Basis von M abhängig. Es wird weiter vorausgesetzt, daß M_0, M^* vermöge einer gewissen bevorzugten Basis B von M erklärt sind.

Aus der Definition von M_0, M^* folgt: $\alpha u \in M_0$ $\forall \alpha \in R_0$ $\forall a \in M$; $\alpha u \in M^* \Leftrightarrow \alpha \in R^*$, $u \in M^*$.

Satz 2. *Wenn* $\varrho x = o$, $x \in M^*$, *so* $\varrho = o$.

Beweis. Es gelte $x = \sum_{\nu \in J} \alpha_\nu x_\nu$ und es gebe $\nu' \in J$ mit $\alpha_{\nu'} \in R^*$. Dann gibt es ein zu $\alpha_{\nu'}$ inverses Element $\alpha_{\nu'}^{-1} \in R^*$. Aus der Gleichheit $\varrho x = o$ ergibt sich $\varrho \alpha_\nu = o$ $\forall \nu \in J$ und aus der Beziehung $\varrho \alpha_{\nu'} = o$ folgt dann $\varrho = o$.

Definition 2. Eine Menge $S \subseteqq M$ ist *R-abhängig*, wenn es eine edliche Teilmenge $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteqq S$ und Elemente $\varrho_1, \ldots, \varrho_n \in R$ gibt von denen mindestens eins in R^* liegt, mit $\sum_{i=1}^{n} \varrho_i a_i \in M_0$. Anderfalls ist die Menge S *R-unabhängig*.

Bemerkung 2. Ist (R, M) ein Vektorraum, so ist die R-Abhängigkeit linear. Ist $S \cap M_0 \neq \emptyset$, so ist S R-abhängig. Die Basis B ist eine R-unabhängige Menge.

Satz 3. *Für jede zwei R-unabhängige Elemente* $a, b \in M$ *gilt*: 1. *Elemente* αa, βb *sind R-unabhängig für alle* $\alpha, \beta \in R^*$. 2. *Die Elemente* a, $a \pm b$ *sind R-unabhängig.*

Beweis. 1. Es sei $\xi_1 \alpha a + \xi_2 \beta b \in M_0$. Nach Definition 2 ist $\xi_1 \alpha, \xi_2 \beta \in R_0$. Setzen wir $\varrho = \xi_1 \alpha$, dann $\xi_1 = \varrho \alpha^{-1}$. Da R_0 ein zweiseitiges Ideal im R ist und $\varrho \in R_0$, gilt auch $\xi_1 \in R_0$. Entsprechend wird gezeigt, daß $\xi_2 \in R_0$. Nach Definition 2 sind die Elemente αa, βb R-unabhängig.

Es sei $\xi_1 a + \xi_2(a \pm b) \in M_0$. Dann $(\xi_1 + \xi_2)\, a \pm \xi_2 b \in M_0$ und nach Definition 2 gilt $\xi_2 \in R_0$, $\xi_1 + \xi_2 \in R_0$ und daraus $\xi_1 \in R_0$.

Satz 4. *Es seien die Elemente* $a, b \in M^*$ *R-abhängig und* a, c *R-unabhängig. Danach sind* b, c *sowie* $a + c, b$ *R-unabhängig. Wenn* $a + b \in M^*$, *so sind auch* $a + b, c$ *R-unabhängig.*

Beweis. Es bestehen $\xi_1, \xi_2 \in R^*$ mit $\xi_1 a + \xi_2 b = m$, $m \in M_0$. Dann $b = \xi_2^{-1} m - \xi_2^{-1} \xi_1 a$. Wird $n = \xi_2^{-1} m$, $\xi = \xi_2^{-1} \xi_1$ gesetzt, so erhalten wir $b = n - \xi a$, $n \in M_0$, $\xi \in R^*$. Nun werde vorausgesetzt, daß $\alpha_1(a + c) + \alpha_2 b \in M_0$. Dann $\alpha_1 a + \alpha_1 c + \alpha_2(n - \xi a) = (\alpha_1 - \alpha_2 \xi)\, a + \alpha_1 c \in M_0$. Da a, c R-unabhängig sind, gilt $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2 \xi \in R_0$. Wenn $\alpha_1 - \alpha_2 \xi = \gamma$, dann $\alpha_2 = (\alpha_1 - \gamma)\, \xi^{-1} \in R_0$. Somit sind die Elemente $a + c$, b R-unabhängig. Entsprechend wird auch bewiesen, daß b, c R-unabhängig sind. Es sei $a + b \in M^*$. Dann $a + n - \xi a = (1 - \xi)\, a + n \in M^*$ und daraus $1 - \xi \in R^*$. Werde vorausgesetzt, daß $\alpha_1(a + b) + \alpha_2 c \in M_0$. Dann $(\alpha_1 - \alpha_1 \xi)\, a + \alpha_2 c \in M_0$ und $\alpha_1(1 - \xi), \alpha_2 \in R_0$. Da $1 - \xi \in R^*$, gilt $\alpha_1 \in R_0$ und $a + b$, c sind R-unabhängig.

Satz 5. *Für jede R-unabhängige Elemente x, y, z sind auch $x - y, y, z$ bzw. $x - y, x - z$ bzw. $x, x - y - z$ R-unabhängig.*

Der Beweis verläuft ganz analog zum Beweis der Sätze 3,4.

Bezeichnen wir mit $R' = R/R_0$, $M' = M/M_0$ und $\bar{\varrho} \in R'$, $\bar{x} \in M'$ für $\varrho \in R$, $x \in M$. Setzen wir $\bar{\varrho}\bar{x} = \overline{\varrho x}$ $\forall \bar{\varrho} \in R'$ $\forall \bar{x} \in M'$. Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Elemente $\varrho \in R$, $x \in M$ ab: Es sei $\bar{\alpha} = \bar{\varrho}$, $\bar{x} = \bar{y}$. Dann gibt es $\xi \in R_0$, $a \in M_0$ mit $\alpha = \varrho + \xi$, $y = x + a$ und man erhält $\alpha y = (\varrho + \xi)(x + a) = \varrho x + \xi x + \varrho a + \xi a = \varrho x + b$ mit $b = \xi x + \varrho a + \xi a \in M_0$. Daher ist $\overline{\varrho x} = \overline{\alpha y}$ und $\bar{\alpha}\bar{y} = \bar{\varrho}\bar{x}$. Da R' ein Körper ist, ist M' in bezug auf die eingeführte äußere Operation ein Vektorraum, den wir mit (R', M') bezeichnen werden.

Definition 3. Der Vektorraum (R', M') heißt ein *zugeordneter Vektorraum* zum Modul (R, M).

Es sei ein weiterer freier Modul N über einem Stellenring Q vorgelegt. Bezeichnen wir mit Q_0 ein maximales Ideal des Ringes Q und $Q^* = Q \setminus Q_0$. Mit Hilfe der erwählten Basis von (Q, N) definieren wir N_0, N^* genau wie beim Modul (R, M). Den zum Modul (Q, N) zugeordneten Vektorraum bezeichnen wir mit (Q', N').

Definition 4. Das Paar (φ, σ) ist eine *halblineare Abbildung* der Moduln (R, M), (Q, N), wenn es gilt:

1. σ ist ein Isomorphismus der Gruppe M auf die Gruppe N.
2. φ ist ein Isomorphismus des Ringes R auf den Ring Q.
3. $(\varrho u)^\sigma = \varrho^\varphi u^\sigma$ $\forall \varrho \in R$ $\forall u \in M$.

Bemerkung 3. Wenn (φ, σ) eine halblineare Abbildung der Moduln (R, M), (Q, N) mit $M_0^\sigma = N_0$ darstellt, so ist das Paar $(\bar{\varphi}, \bar{\sigma})$, welches durch die Vorschrifte $\bar{x}^{\bar{\sigma}} = \overline{x^\sigma}$, $\bar{\varrho}^{\bar{\varphi}} = \overline{\varrho^\varphi}$ definiert wird, eine halblineare Abbildung der zu (R, M), (Q, N) zugeordneten Vektorräume (R', M'), (Q', N').

Definition 5. Das Paar (φ, σ) ist eine *teilweise halblineare Abbildung* der Moduln (R, M), (Q, N), wenn es gilt:

1. σ ist eine bijektive Abbildung der Menge M^* auf die Menge N^*.
2. φ ist eine Abbildung der Menge R^* auf die Menge Q^*.
3. Für je zwei R-unabhängige Elemente $x, y \in M$ gilt $(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$.
4. $(\varrho u)^\sigma = \varrho^\varphi u^\sigma$ $\forall \varrho \in R^*$ $\forall u \in M^*$.

Satz 6. *Jede teilweise halblineare Abbildung (φ, σ) der Moduln (R, M), (Q, N) läßt sich auf eine halblineare Abbildung (φ', σ') dieser Moduln eindeutig erweitern, wobei $M_0^{\sigma'} = N_0$.*

Beweis. 1. Für ein beliebiges Element $a \in M^*$ ist $(-a)^\sigma = -a^\sigma$: Betrachten wir ein Element $b \in M^*$, welches mit a R-unabhängig ist. Nach Satz 3 sind $b, -a$ sowie $b + a, -a$ R-unabhängig. Nach 3 aus Definition 5 erhält man $[(b + a) + (-a)]^\sigma = (b + a)^\sigma + (-a)^\sigma = b^\sigma + a^\sigma + (-a)^\sigma = b^\sigma$ und daraus $(-a)^\sigma = -a^\sigma$.

2. Jedes Element $u \in M_0$ läßt sich in der Form $u = a + b$ schreiben, wo $a, b \in M^*$. Es genügt ein beliebiges $a \in M^*$ zu wählen und $b = u - a$ zu setzen. Dann $b \in M^*$ und $u = a + b$. Die Elemente a, b sind natürlich R-abhängig. Setzen wir $x^{\sigma'} = x^\sigma \; \forall x \in M^*$. Wenn $u \in M_0$, $u = a + b$, $a, b \in M^*$, dann setzen wir $u^{\sigma'} = a^\sigma + b^\sigma = a^{\sigma'} + b^{\sigma'}$. σ' ist die Abbildung: Es sei $u \in M_0$, $u = a + b = c + d$ mit $a, b, c, d \in M^*$. Zunächst sei vorausgesetzt, daß die Elemente a, c R-unabhängig sind. Dann sind $a, -c$ und $b, a - c$ nach den Sätzen 3,4 R-unabhängig. Nach 3 aus der Definition 5 und nach 1 gilt dann $d^\sigma = [b + (a - c)]^\sigma = b^\sigma + [a + (-c)]^\sigma = b^\sigma + a^\sigma + (-c)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma - c^\sigma$. Daraus folgt $a^\sigma + b^\sigma = c^\sigma + d^\sigma$. Es seien nun a, c R-abhängig. Es existiert ein Element $x \in M^*$, welches mit a R-unabhängig ist. Ebenso sind auch c, x R-unabhängig. Setzen wir $u = x + y$. Nach dem Vorhergehenden gilt dann $a^\sigma + b^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$ und $x^\sigma + y^\sigma = c^\sigma + d^\sigma$, folglich $a^\sigma + b^\sigma = c^\sigma + d^\sigma$.

3. Die Abbildung σ' ist ein Homomorphismus der Gruppe M in N.

a) Für jede R-unabhängige Elemente a, b gilt nach Definition 5 und nach 2 $(a + b)^{\sigma'} = a^{\sigma'} + b^{\sigma'}$.

b) Es seien die Elemente $a, b \in M^*$ R-abhängig. Wenn $a + b = c \in M_0$, so ist nach 2 $c^{\sigma'} = (a + b)^{\sigma'} = a^{\sigma'} + b^{\sigma'}$. Weiter sei vorausgesetzt, daß $a + b \in M^*$. Wählen wir ein Element $u \in M^*$, welches mit a R-unabhängig ist. Nach Satz 4 sind u, $a + b$ und $a + u, b$ R-unabhängig und nach a) erhält man $[(a + b) + u]^{\sigma'} = (a + b)^{\sigma'} + u^{\sigma'} = [(a + u) + b]^{\sigma'} = (a + u)^{\sigma'} + b^{\sigma'} = a^{\sigma'} + u^{\sigma'} + b^{\sigma'}$. Daraus ergibt sich dann $(a + b)^{\sigma'} = a^{\sigma'} + b^{\sigma'}$.

c) Es seien $a \in M_0$, $b \in M^*$. Wählen wir ein Element c, welches mit b R-unabhängig ist, dann $b + c \in M^*$. Wird $u = a - c$ gesetzt, so ist $u \in M^*$ und $a = u + c$. Nach 2 ist $a^{\sigma'} = u^{\sigma'} + c^{\sigma'}$. Weiter ist $(a + b)^{\sigma'} = [u + (b + c)]^{\sigma'}$. Nach a), b) ist dann $[u + (b + c)]^{\sigma'} = u^{\sigma'} + (b + c)^{\sigma'} = u^{\sigma'} + b^{\sigma'} + c^{\sigma'} = a^{\sigma'} + b^{\sigma'}$. Hieraus $(a + b)^{\sigma'} = a^{\sigma'} + b^{\sigma'}$.

d) Es seien $a, b \in M_0$. Setzen wir $a = u + v$, $u, v \in M^*$. Dann ist nach 2 $a^{\sigma'} = u^{\sigma'} + v^{\sigma'}$ und $(a + b)^{\sigma'} = [u + (v + b)]^{\sigma'}$, wo $v + b \in M^*$. Nach a), b), c) ist $(a + b)^{\sigma'} = u^{\sigma'} + (v + b)^{\sigma'} = u^{\sigma'} + v^{\sigma'} + b^{\sigma'} = a^{\sigma'} + b^{\sigma'}$.

4. Die Abbildung σ' ist ein Isomorphismus der Gruppen M, N mit $M_0^{\sigma'} = N_0$: Es sei x ein beliebiges Element aus N. Wenn $x \in N^*$, so nach 1 aus der Definition 5 gibt es genau ein Element $a \in M^*$ mit $a^{\sigma'} = x$. Wenn $x \in N_0$, so gibt es $y, z \in N^*$ und $a, b \in M^*$ mit $x = y + z$, $a^{\sigma'} = y$, $b^{\sigma'} = z$. Nach 3 gilt $(a + b)^{\sigma'} = a^{\sigma'} + b^{\sigma'} = y + z = x$. Folglich σ' ist eine Abbildung auf N. Es sei $x^{\sigma'} = o$. Dann $x \in M_0$ und man kann $x = a + b$, $a, b \in M^*$ setzen. Es gilt $x^{\sigma'} = a^{\sigma'} + b^{\sigma'} = o$

und nach 1 ist $a^{\sigma'} = -b^{\sigma'} = (-b)^{\sigma'}$. Nach 1 aus der Definition 5 ist $a = -b$ und $x = a + b = o$. Wenn $x^{\sigma'} \in N_0$, so $x \in M_0$ denn sonst nach 1 aus der Definition 5 $x^{\sigma'} \in N^*$. Daher $N_0 \subseteqq M_0^{\sigma'}$. Es sei $a \in M_0$ und vorausgesetzt, daß $a^{\sigma'} \in N^*$. Danach gibt es $b \in M^*$ mit $b^{\sigma'} = a^{\sigma'}$ im Widerspruch zur Annahme, daß σ' einen Isomorphismus ist. Es gilt also $M_0^{\sigma'} \subseteqq N_0$.

5. Vorgelegt sei ein Element $\varrho \in R_0$; wählen wir $\xi \in R^*$ und setzen wir $\mu = \varrho - \xi$. Dann $\mu \in R^*$ und $\varrho = \mu + \xi$. Setzen wir weiter $\varrho^{\varphi'} = \varrho^{\varphi}$ $\forall \varrho \in R^*$ und $\varrho^{\varphi'} = \xi^{\varphi} + \mu^{\varphi} = \xi^{\varphi'} + \mu^{\varphi'}$ für $\varrho \in R_0$. φ' ist die Abbildung: Es sei $\varrho \in R_0$ und $\varrho = \xi + \mu = \alpha + \beta$, wo $\alpha, \beta, \xi, \mu \in R^*$. Wählen wir ein Element $u \in M^*$. Nach 4 aus Definition 5 und nach 3 gewinnt man $(\varrho u)^{\sigma'} = [(\xi + \mu) u]^{\sigma'} = (\xi u + \mu u)^{\sigma'} = (\xi u)^{\sigma'} + (\mu u)^{\sigma'} = \xi^{\varphi'} u^{\sigma'} + \mu^{\varphi'} u^{\sigma'} = (\xi^{\varphi'} + \mu^{\varphi'}) u^{\sigma'} = [(\alpha + \beta) u]^{\sigma'} = (\alpha u + \beta u)^{\sigma'} = \alpha^{\varphi'} u^{\sigma'} + \beta^{\varphi'} u^{\sigma'} = (\alpha^{\varphi'} + \beta^{\varphi'}) u^{\sigma'}$. Da $u^{\sigma'} \in N^*$, gilt nach Satz 2 $\xi^{\varphi'} + \mu^{\varphi'} = \alpha^{\varphi'} + \beta^{\varphi'}$.

6. Es gilt $(\varrho u)^{\sigma'} = \varrho^{\varphi'} u^{\sigma'}$ $\forall \varrho \in R$ $\forall u \in M$.

a) Wenn $\varrho \in R^*$, $u \in M^*$, dann gilt $(\varrho u)^{\sigma'} = \varrho^{\varphi'} u^{\sigma'}$ nach 2,5 und nach Definition 5.

b) Es sei $\varrho \in R_0$, $u \in M^*$. Dann setzen wir $\varrho = \alpha + \beta$, wo $\alpha, \beta \in R^*$. Nach 5 gilt $\varrho^{\varphi'} = \alpha^{\varphi'} + \beta^{\varphi'}$ und nach 3 und a) ist $(\varrho u)^{\sigma'} = [(\alpha + \beta) u]^{\sigma'} = [\alpha u + \beta u]^{\sigma'} = (\alpha u)^{\sigma'} + (\beta u)^{\sigma'} = \alpha^{\varphi'} u^{\sigma'} + \beta^{\varphi'} u^{\sigma'} = (\alpha^{\varphi'} + \beta^{\varphi'}) u^{\sigma'} = \varrho^{\varphi'} u^{\sigma'}$.

c) Es sei $\varrho \in R$, $u \in M_0$. Wir setzen $u = a + b$, wo $a, b \in M^*$. Nach 3 und a), b) gewinnt man $(\varrho u)^{\sigma'} = [\varrho(a + b)]^{\sigma'} = (\varrho a + \varrho b)^{\sigma'} = (\varrho a)^{\sigma'} + (\varrho b)^{\sigma'} = \varrho^{\varphi'} a^{\sigma'} + \varrho^{\varphi'} b^{\sigma'} = \varrho^{\varphi'}(a^{\sigma'} + b^{\sigma'}) = \varrho^{\varphi'} u^{\sigma'}$.

7. Die Abbildung φ' ist ein Isomorphismus der Ringe R, Q:

a) Vorgelegt seien beliebige Elemente $\alpha, \beta \in R$ und wählen wir $u \in M^*$. Nach 6 ist $[(\alpha\beta) u]^{\sigma'} = (\alpha\beta)^{\varphi'} u^{\sigma'} = [\alpha(\beta u)]^{\sigma'} = \alpha^{\varphi'}(\beta u)^{\sigma'} = \alpha^{\varphi'} \beta^{\varphi'} u^{\sigma'}$. Daraus folgt $(\alpha\beta)^{\varphi'} = \alpha^{\varphi'} \beta^{\varphi'}$. Ferner ist $[(\alpha + \beta) u]^{\sigma'} = (\alpha + \beta)^{\varphi'} u^{\sigma'} = [\alpha u + \beta u]^{\sigma'} = \alpha^{\varphi'} u^{\sigma'} + \beta^{\varphi'} u^{\sigma'} = (\alpha^{\varphi'} + \beta^{\varphi'}) u^{\sigma'}$ und daraus $(\alpha + \beta)^{\sigma'} = \alpha^{\sigma'} + \beta^{\sigma'}$.

b) Falls $\varrho \in Q^*$, dann nach 2 aus Definition 5 gibt es ein Element $\alpha \in R^*$ so, daß $\alpha^{\varphi'} = \varrho$. Es sei $\varrho \in Q_0$. Setzen wir $\varrho = \xi + \mu$ mit $\xi, \mu \in Q^*$. Es existieren $\alpha, \beta \in R^*$ so, daß $\alpha^{\varphi'} = \xi$, $\beta^{\varphi'} = \mu$. Dann $(\alpha + \beta)^{\varphi'} = \alpha^{\varphi'} + \beta^{\varphi'} = \xi + \mu = \varrho$. Die Abbildung φ' ist somit eine Abbildung auf Q. Es sei $\varrho^{\varphi'} = o$. Wählen wir wieder $u \in M^*$. Dann $(\varrho u)^{\sigma'} = \varrho^{\varphi'} u^{\sigma'} = o u^{\sigma'} = o$. Nach 4 ist $\varrho u = o$ und nach Satz 2 ist $\varrho = o$.

8. Das Paar (φ', σ') ist nach 1–7 eine halblineare Abbildung der Moduln (R, M), (Q, N) mit $x^{\sigma} = x^{\sigma'}$, $\varrho^{\varphi} = \varrho^{\varphi'}$ $\forall x \in M^*$ $\forall \varrho \in R^*$. Setzen wir voraus, daß (φ_1, σ_1) eine halblineare Abbildung der Moduln (R, M), (Q, N) mit derselben Eigenschaften ist. Es sei $u \in M_0$ und wählen wir $a, b \in M^*$ mit $u = a + b$. Dann $u^{\sigma_1} = (a + b)^{\sigma_1} = a^{\sigma_1} + b^{\sigma_1} = a^{\sigma} + b^{\sigma} = a^{\sigma'} + b^{\sigma'} = (a + b)^{\sigma'} = u^{\sigma'}$. Ähnlich setzen wir $\varrho = \xi + \mu$, $\xi, \mu \in R^*$ für $\varrho \in R_0$. Dann $\varrho^{\varphi_1} = (\xi + \mu)^{\varphi_1} = \xi^{\varphi_1} + \mu^{\varphi_1} = \xi^{\varphi} + \mu^{\varphi} = \xi^{\varphi'} + \mu^{\varphi'} = (\xi + \mu)^{\varphi'} + \varrho^{\varphi'}$. Es gilt somit $\sigma_1 = \sigma'$, $\varphi_1 = \varphi'$.

Damit ist der Beweis beendet.

Bemerkung 4. Existiert eine teilweise halblineare Abbildung (φ, σ) der Moduln (R, M), (Q, N), so gibt es nach Satz 6 eine halblineare Abbildung (φ', σ') derjenigen Moduln, woraus sich ergibt, daß die Ringe R, Q isomorph sind. Wegen der Gültigkeit von $M_0^{\varphi'} = N_0$ gibt es nach Bemerkung 3 auch eine halblineare Abbildung der zu (R, M), (Q, N) zugeordneten Vektorräume (R', M'), (Q', N'). Folglich sind die Körper $R' = R/R_0$, $Q' = Q/Q_0$ isomorph.

Satz 7. *Es sei (φ, σ) eine teilweise halblineare Abbildung der Moduln (R, M), (Q, N). Die Elemente $x, y \in M$ sind R-unabhängig genau dann, wenn die Elemente x^σ, y^σ Q-unabhängig sind.*

Beweis. a) Nehmen wir an, daß $x, y \in M$ R-unabhängig und x^σ, y^σ Q-abhängig sind. Dann gibt es Elemente $\varrho_1, \varrho_2 \in Q^*$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in R^*$ so, daß $\varrho_1 x^\sigma + \varrho_2 y^\sigma \in N_0$ und $\varrho_1 = \alpha_1^\varphi$, $\varrho_2 = \alpha_2^\varphi$. Nach Satz 3 sind $\alpha_1 x, \alpha_2 y$ R-unabhängig, $\alpha_1 x + \alpha_2 y \in M^*$ und $(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^\sigma \in N^*$. Zugleich nach Definition 5 gilt $(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^\sigma = (\alpha_1 x)^\sigma + (\alpha_2 y)^\sigma = \alpha_1^\varphi x^\sigma + \alpha_2^\varphi y^\sigma = \varrho_1 x^\sigma + \varrho_2 y^\sigma \in N_0$. Man hat somit einen Widerspruch und die Elemente x^σ, y^σ sind Q-unabhängig.

b) Nehmen wir an, daß die Elemente $x^\sigma, y^\sigma \in N$ Q-unabhängig und x, y R-abhängig sind. Dann gibt es $\alpha_1, \alpha_2 \in R^*$ mit $\alpha_1 x + \alpha_2 y \in M_0$. Betrachten wir nach Satz 6 eine halblineare Abbildung (φ', σ'). Dann $(\alpha_1 x + \alpha_2 y)^{\sigma'} = (\alpha_1 x)^{\sigma'} + (\alpha_2 y)^{\sigma'} = \alpha_1^\varphi x^\sigma + \alpha_2^\varphi y^\sigma \in N_0$, wo $\alpha_1^\varphi, \alpha_2^\varphi \in Q^*$. Man hat somit einen Widerspruch, denn x^σ, y^σ sind Q-unabhängig.

II

Definition 6. Der Untermodul $X = Rx$, $x \in M^*$ des Moduls (R, M) heißt ein *Punkt*. Zwei Punkte Rx, Ry sind R-verschieden genau dann, wenn die Elemente x, y R-unabhängig sind. Jeder Untermodul $l = Rx + Ry$, wo Rx, Ry R-verschieden sind, heißt eine *Gerade*. Ein *projektiver Raum $P(R, M)$ mit Homomorphismus* ist die Menge $B(M)$ aller Punkte und die Menge aller Geraden, wobei die Inzidenz der Punkte und Geraden als Inklusion definiert wird. Der projektive Raum $P(R', M')$, wo (R', M') einen zu (R, M) zugeordneten Vektorraum ist, heißt ein zugeordneter zum projektiven Raum $P(R, M)$ mit Homomorphismus.

Bemerkung 5. Wenn Rx ein Punkt ist, so $Rx = Ry$ genau dann, wenn $x = \varrho y$, $\varrho \in R^*$.

Bemerkung 6. Die Abbildung der Punktmenge $B(M)$ des projektiven Raums $P(R, M)$ mit Hompmorphismus auf die Punktmenge $B(M')$ des projektiven Raums $P(R', M')$, welche die Inzidenz der Punkte und Geraden reproduziert, heißt ein *Homomorphismus* $P(R, M)$ auf $P(R', M')$. Die Abbildung $\varkappa : Rx \to R'\bar{x}\ \forall Rx \in B(M)$ ist ein Homomorphismus $P(R, M)$ auf $P(R', M')$. Die Punkte Rx, Ry sind R-verschieden genau dann, wenn $(Rx)^\varkappa \neq (Ry)^\varkappa$. Wenn card $B = n$, $n > 3$, so läßt sich beweisen, daß $P(R, M)$ ein projektiver Raum mit Homomorphismus im Sinne von W. Klingenberg ist (siehe [4], Seite 100). Wenn $n = 3$, so ist $P(R, M)$ eine desarguessche Ebene mit Homomorphismus im Sinne von [3], S. 189.

Satz 8. *Durch jede zwei R-verschiedene Punkte $X = Rx$, $Y = Ry$ geht genau eine Gerade.*

Beweis. Nach der Definition 6 ist $p = X + Y$ eine Gerade und $X, Y \in p$. Es sei $l = Ru + Rv$ eine beliebige Gerade mit $X, Y \in l$. Dann gibt es Elemente $\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in R$ derart, daß $x = \alpha u + \beta v$, $y = \alpha' u + \beta' v$ gilt. Da $x \in M^*$ und u, v R-unabhängig sind, muß entweder $\alpha u \in M^*$ oder $\beta v \in M^*$ gelten. Setzen wir z. B. voraus, daß $\alpha u \in M^*$. Dann gilt $\alpha \in R^*$. So folgt $u = \alpha^{-1}x - \alpha^{-1}\beta v$ und $y - \alpha'\alpha^{-1}x = (\beta' - \alpha^{-1}\beta)\, v$. Es gebe $\xi = \beta' - \alpha^{-1}\beta$. Da x, y R-unabhängig sind, gilt $\xi v \in M^*$ und $\xi \in R^*$. Danach ist $v = \xi^{-1}y - \xi^{-1}\alpha'\alpha^{-1}x$ und $u = (\alpha^{-1} - \alpha^{-1}\beta\xi^{-1}\alpha'\alpha^{-1})\, x - \alpha^{-1}\beta\xi^{-1}y$. Es ergibt sich somit $u, v \in Rx + Ry$ und $p = l$.

Satz 9. *Für jedes Paar von R-verschiedenen Punkten Rx, Ry gilt $Rx \cap Ry = o$.*

Beweis. Setzen wir voraus, daß $\xi x = \eta y$, $\xi x \neq o$ gilt. Nach Satz 2 ist $\xi, \eta \neq o$. Setzen wir $x = \sum_{\nu \in J} \alpha_\nu x_\nu$, $y = \sum_{\nu \in J} \beta_\nu x_\nu$, so gilt $\xi\alpha_\nu = \eta\beta_\nu$ $\forall \nu \in J$. Da $x, y \in M^*$, existieren $\nu', \nu'' \in J$ mit $\alpha_{\nu'}, \beta_{\nu''} \in R^*$. Setzen wir weiter $x' = \alpha_{\nu'}^{-1}x$, $\xi' = \xi\alpha_{\nu'}$ und $\alpha'_\nu = \alpha_{\nu'}^{-1}\alpha_\nu$ $\forall \nu \in J$, so $\xi'\alpha'_\nu = \eta\beta_\nu$. Für ν' gilt speziell $\xi'\alpha'_{\nu'} = \xi' = \eta\beta_{\nu'}$, also $\eta\beta_{\nu''} = \xi\alpha_{\nu''} = \xi'\alpha'_{\nu''} = \eta\beta_{\nu'}\alpha'_{\nu''}$. Hieraus ergibt sich $\eta(\beta_{\nu''} - \beta_{\nu'}\alpha'_{\nu''}) = o$. Da $\eta \neq o$, gilt $\beta_{\nu''} - \beta_{\nu'}\alpha'_{\nu''} \in R_0$. Da $\beta_{\nu''} \in R^*$, gilt $\beta_{\nu'}\alpha'_{\nu''} \in R^*$, woraus $\beta_{\nu'}, \alpha'_{\nu''} \in R^*$ folgt. Setzen wir schließlich $y' = \beta_{\nu'}^{-1}y$, $\eta' = \eta\beta_{\nu'}$ und $\beta'_\nu = \beta_{\nu'}^{-1}\beta_\nu$ $\forall \nu \in J$. Danach ist $\xi'\alpha'_\nu = \eta'\beta'_\nu$ $\forall \nu \in J$ und für ν' erhalten wir $\xi' = \eta'$. Es folgt somit $\xi'(\alpha'_\nu - \beta'_\nu) = o$ $\forall \nu \in J$. Nach Satz 3 sind die Elemente $x' = \alpha_{\nu'}^{-1}x$, $y' = \beta_{\nu'}^{-1}y$ R-unabhängig und $x' - y' \in M^*$. Wegen $x' - y' = \sum_{\nu \in J} (\alpha'_\nu - \beta'_\nu)\, x$ gibt es $\nu_1 \in J$ derart, daß $\alpha'_{\nu_1} - \beta'_{\nu_1} \in R^*$. Aus der Beziehung $\xi'(\alpha'_{\nu_1} - \beta'_{\nu_1}) = o$ folgt dann $\xi' = o$ und $\xi = \xi'\alpha_{\nu'}^{-1} = o$ im Widerspruch zur Annahme $\xi \neq o$. Es gilt also $Rx \cap Ry = o$.

Satz 10. *Für jede R-unabhängige Elemente x, y, z gilt $Rx \cap (Ry + Rz) = o$.*

Beweis. Nehmen wir an, es gebe Elemente $\alpha, \beta, \gamma \in R$, $\alpha \neq o$ so, daß $\alpha x = \beta y + \gamma z$ gilt. Dann ist auch $\beta, \gamma \neq o$. Wäre etwa $\beta = o$, dann $\alpha x = \gamma z$. Da x, z R-unabhängig sind, gilt nach Satz 9 $\alpha = o$, was ein Widerspruch ist.

Es gilt $x = \sum_{\nu \in J} \alpha_\nu x_\nu$, $y = \sum_{\nu \in J} \beta_\nu x_\nu$, $z = \sum_{\nu \in J} \gamma_\nu x_\nu$. Nach unserer Voraussetzung ist $\alpha\alpha_\nu = \beta\beta_\nu + \gamma\gamma_\nu$ $\forall \nu \in J$.

a) Wegen $x \in M^*$ gibt es $\alpha_{\nu'} \in R^*$. Setzen wir $x' = \alpha_{\nu'}^{-1}x$, $\alpha' = \alpha\alpha_{\nu'}$ und $\alpha'_\nu = \alpha_{\nu'}^{-1}\alpha_\nu$ $\forall \nu \in J$. Es gilt $\alpha'\alpha'_\nu = \beta\beta_\nu + \gamma\gamma_\nu$ $\forall \nu \in J$ und $\alpha'\alpha'_{\nu'} = \alpha' = \beta\beta_{\nu'} + \gamma\gamma_{\nu'}$ für ν'.

b) Wegen $y \in M^*$ gibt es $\beta_{\nu''} \in R^*$. So folgt $\alpha'\alpha'_{\nu''} = \beta\beta_{\nu''} + \gamma\gamma_{\nu''} = (\beta\beta_{\nu'} + \gamma\gamma_{\nu'})\, \alpha'_{\nu''}$ und daraus $\beta(\beta_{\nu'}\alpha'_{\nu''} - \beta_{\nu''}) + \gamma(\gamma_{\nu'}\alpha'_{\nu''} - \gamma_{\nu''}) = o$. Nehmen wir an, daß $\varrho = \beta_{\nu'}\forall\alpha'_{\nu''} -$

$- \beta_{\nu''} \in R^*$ gilt. Danach ist $\beta = -\gamma(\gamma_{\nu'}\alpha'_{\nu''} - \gamma_{\nu''})\,\varrho^{-1} = \gamma\xi$ und $\alpha x = \gamma(\xi y + z)$. Da y, z R-unabhängig sind, gilt $\xi y + z \in M^*$ und $x, \xi y + z$ sind R-unabhängig. Nach Satz 9 erhalten wir $\alpha = o$ und somit einen Widerspruch. Es gilt also $\varrho \in R_0$. Wegen $\beta_{\nu''} \in R^*$, auch $\beta_{\nu'}, \alpha'_{\nu''} \in R^*$.

c) Da auch $z \in M^*$, gibt es $\gamma_{\nu_1} \in R^*$. Analog zu b) beweist man, daß $\gamma_{\nu'} \in R^*$.

Setzen wir $\beta' = \beta\beta_{\nu'}$, $\gamma' = \gamma\gamma_{\nu'}$ und $y' = \beta_{\nu'}^{-1}y$, $z' = \gamma_{\nu'}^{-1}z$. So folgt $\alpha'x' = \beta'y' + \gamma'z'$. Nach a) ist $\alpha' = \beta' + \gamma'$ und somit $(\beta' + \gamma')\,x' = \beta'y' + \gamma'z'$, d. h. $\beta'(x' - y') = \gamma'(z' - x')$. Da x, y, z R-unabhängig sind, sind auch x', y', z' R-unabhängig und nach Satz 5 sind $x - y$, $z - x$ R-unabhängig. Nach Satz 9 gilt $\beta' = \gamma' = o$ und daher auch $\alpha' = o$, $\alpha = \alpha'\alpha_{\nu'}^{-1} = o$ im Widerspruch zur Annahme. Es gilt daher $Rx \cap (Ry + Rz) = o$.

Satz 11. *Für jedes Paar von Geraden $p = Ra + Rb$, $q = Rx + Ry$, wo a, b, x R-unabhängig sind, gilt: Wenn $v \in p \cap q$, $v \in M^*$, so $Rv = p \cap q$.*

Beweis. Es sei $v = \alpha_1 a + \alpha_2 b = \beta_1 x + \beta_2 y$, $v \in M^*$. Danach ist entweder $\alpha_1 \in R^*$ oder $\alpha_2 \in R^*$. Wegen $\alpha_1 a + \alpha_2 b - \beta_1 x = \beta_2 y$, ergibt sich aus der R-Unabhängigkeit der Elemente a, b, x, daß $\beta_2 \in R^*$. Somit gilt $y = \beta_1^{-1}(\alpha_1 a + \alpha_2 b - \beta_1 x)$. Nun werde vorausgesetzt, daß $w = \alpha'_1 a + \alpha'_2 b = \beta'_1 x + \beta'_2 y$ gilt. Dann erhalten wir $\alpha'_1 a + \alpha'_2 b = \beta'_1 x + \beta'_2\beta_1^{-1}(\alpha_1 a + \alpha_2 b - \beta_1 x)$ und $(\alpha'_1 - \beta'_2\beta_1^{-1}\alpha_1)\,a + (\alpha'_2 - \beta'_2\beta_1^{-1}\alpha_2)\,b = (\beta'_1 - \beta_2^{-1}\beta_1^{-1}\beta_1)\,x$. Setzen wir $\varrho = \beta'_2\beta_1^{-1}$, so ist nach Satz 10 $\alpha'_1 = \varrho\alpha_1$, $\alpha'_2 = \varrho\alpha_2$ und es gilt $w = \varrho\alpha_1 a + \varrho\alpha_2 b = \varrho v$.

Satz 12. *Für jede R-unabhängige Elemente x, y, z gilt*

a) $R(y - z) = (Ry + Rz) \cap [R(x - y) + R(x - z)]$.

b) $R(x - y - z) = [R(x - y) + Rz] \cap [R(x - z) + Ry]$.

c) $R(y + z) = (Ry + Rz) \cap [R(x - y - z) + Rx]$.

Beweis. a) Die Elemente $x - y$, $x - z$ sind nach Satz 5 R-unabhängig. Daher ist $l = R(x - y) + R(x - z)$ eine Gerade. Zugleich ist auch $p = Ry + Rz$ eine Gerade. Die Elemente $y, z, x - y$ sind nach Satz 5 R-unabhängig und gilt $y - z \in M^*$, $y - z \in p \cap l$. Nach Satz 11 ist dann $R(y - z) = p \cap l$. Ganz entsprechend beweist man b) und c).

Definition 7. Vorgelegt seien freie Moduln (R, M), (Q, N) über den Stellenringen R, Q und seien $P(R, M)$, $P(Q, N)$ entsprechende projektive Räume mit Homomorphismus. Eine bijektive Abbildung $\varkappa$ der Menge $B(M)$ auf die Menge $B(N)$ heißt eine *projektive Abbildung* der Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$, wenn es gilt:

a) Die Punkte $X, Y \in B(M)$ sind R-verschieden genau dann, wenn die Punkte $X^\varkappa$, $Y^\varkappa$ Q-verschieden sind.

b) Liegt der Punkt $X \in B(M)$ auf der Geraden $Y + Z$, so liegt $X^\varkappa$ auf der Geraden $Y^\varkappa + Z^\varkappa$.

Wenn es eine projektive Abbildung der Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$ gibt, so sind diese Räume projektiv äquivalent.

Satz 13. *Es sei (φ, σ) eine teilweise halblineare Abbildung der Moduln (R, M), (Q, N). Setzen wir $(Rx)^\varkappa = Qx^\sigma\ \forall x \in M^*$, so ist $\varkappa$ eine projektive Abbildung der Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$.*

Beweis. a) $\varkappa$ ist eine bijektive Abbildung der Mengen $B(M)$, $B(N)$: Es sei $Rx = Ry$, $x \in M^*$. Dann besteht $\varrho \in R^*$ so, daß $y = \varrho x$ ist. Nach der Definition 5 ist $y^\sigma = \varrho^\varphi x^\sigma$, $\varrho^\varphi \in Q^*$ und wir erhalten $Qx^\sigma = Qy^\sigma$, $(Rx)^\varkappa = (Ry)^\varkappa$. Somit ist $\varkappa$ eine Abbildung der Menge $B(M)$ in $B(N)$. Es gebe $Qz \in B(N)$. Dann besteht genau ein Element $y \in M^*$ derart, daß $y^\sigma = z$ und $(Ry)^\varkappa = Qy^\sigma = Qz$. Es sei $(Ry)^\varkappa = (Ry)^\varkappa$, also $Qx^\sigma = Qy^\sigma$. Es besteht ein Element $\alpha \in Q^*$ mit $y^\sigma = \alpha x^\sigma$ und ein $\beta \in R^*$ mit $\beta^\varphi = \alpha$. Danach gilt $y^\sigma = \beta^\varphi x = (\beta x)^\sigma$, $y = \beta x$ und $Rx = Ry$.

b) Es gebe zwei R-verschiedene Punkte $X = Rx$, $Y = Ry$. Dann sind x, y R-unabhängig. Nach Satz 7 sind x^σ, y^σ Q-unabhängig und die Punkte $X^\varkappa = Qx^\sigma$, $Y^\varkappa = Qy^\sigma$ sind Q-verschieden. Entsprechend mit Hilfe des Satzes 7 beweist man die Umkehrung.

c) Es liege der Punkt Rx auf der Geraden $l = Ry + Rz$. Nehmen wir zuerst an, daß die Punktpaare Rx, Ry und Rx, Rz R-verschieden sind. Es gilt dann $x = \varrho_1 y + \varrho_2 z$ und daher $x - \varrho_1 y = \varrho_2 z$. Da x, y R-unabhängig sind, gilt $\varrho_2 z \in M^*$ und $\varrho_2 \in R^*$. Ähnlich wird gezeigt, daß $\varrho_1 y \in M^*$ und $\varrho_1 \in R^*$. Nach Satz 3 sind $\varrho_1 y, \varrho_2 z$ R-unabhängig und nach der Definition 5 gilt $x^\sigma = \varrho_1^\varphi y^\sigma + \varrho_2^\varphi z^\sigma$. Dann $x^\sigma \in Qy^\sigma + Qz^\sigma$, d. h. $Qx^\sigma = (Rx)^\varkappa \subseteqq (Ry)^\varkappa + (Rz)^\varkappa$. Nun werde angenommen, daß Rx, Ry nicht R-verschieden sind. Nach Satz 4 sind Rx, Rz R-verschieden, nach Satz 3 sind $Ry, R(y - z)$ R-verschieden. Ähnlich sind auch Rz, $R(y - z)$ und Rx, $R(y - z)$ R-verschieden. Nach Satz 8 gilt $Ry + Rz = Rz + R(y - z)$. Mit dem vorangehenden Teil und mit Satz 8 wird bewiesen, daß $(Ry)^\varkappa + (Rz)^\varkappa = (Rz)^\varkappa + [R(y - z)]^\varkappa$. Weiter gilt $(Rx)^\varkappa \subseteqq (Rz)^\varkappa + [R(y - z)]^\varkappa$ und $(Rx)^\varkappa \subseteqq (Ry)^\varkappa + (Rz)^\varkappa$.

Definition 8. Die projektive Abbildung $\varkappa$ der Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$ wird durch eine teilweise halblineare Abbildung (φ, σ) der Moduln (R, M), (Q, N) induziert, wenn $(Rx)^\varkappa = Qx^\sigma$ für jeden Punkt $Rx \in B(M)$ gilt.

III

Theorem. Jede projektive Abbildung der projektiven Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$ mit Homomorphismus wird durch eine teilweise halblineare Abbildung der Moduln (R, M), (Q, N) induziert.

Der Beweis des Theorems wird in einige Teile geteilt, in welchen eine Reihe von Teilbehauptungen bewiesen wird. Nehmen wir an, daß $\varkappa$ eine projektive Abbildung der Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$ darstellt.

a) *Es gebe R-verschiedene Punkte* Rx, Ry *und setzen wir* $(Rx)^\varkappa = Qx'$. *Dann gibt es ein einziges Element* $y' = h(x, x', y)$, $y' \in N^*$, *für welches* $(Ry)^\varkappa = Qy'$, $[R(x - y)]^\varkappa = Q(x' - y')$ *gilt.*

Beweis. Es gilt $x - y \in M^*$ und $R(x - y) \subseteqq Rx + Ry$. Nach der Definition 7 sind die Punkte $(Rx)^\varkappa, (Ry)^\varkappa$ Q-verschieden, $(Rx)^\varkappa + (Ry)^\varkappa$ ist eine Gerade und $[R(x - y)]^\varkappa \subseteqq (Rx)^\varkappa + (Ry)^\varkappa$. Setzen wir $[R(x - y)]^\varkappa = Qt'$, $(Ry)^\varkappa = Qz'$. Die Punktepaare $Rx, R(x - y)$ und $Ry, R(x - y)$ sind nach Satz 3 R-verschieden und daher sind die Punktepaare Qx', Qt' und Qz', Qt' auch Q-verschieden. Die Elemente $x', t' \in N^*$ und $z', t' \in N^*$ sind dann Q-unabhängig. Es gibt Elemente $\alpha, \beta \in Q$ mit $t' = \alpha x' + \beta z'$ und nach Satz 9 sind eindeutig bestimmt. Da t', x' Q-unabhängig sind, ergibt sich aus der Gleichheit $t' - \alpha x' = \beta z'$, daß $\beta z' \in N^*$ und $\beta \in Q^*$. Entsprechend wird gezeigt, daß $\alpha \in Q^*$. Setzen wir $y' = -\alpha^{-1}\beta z'$. Dann gilt $y' \in N^*$, $(Ry)^\varkappa = Qy'$ und $[R(x - y)]^\varkappa = Qt' = Q\alpha^{-1}t' = Q(x' - y')$. Damit ist die Existenz des Elementes y' bewiesen.

Es gebe ein Element $y'' \in N^*$ mit $(Ry)^\varkappa = Qy''$, $[R(x - y)]^\varkappa = Q(x' - y'')$. Dann existieren $\varrho, \xi \in Q$ so, daß $y' = \varrho y''$, $\xi(x' - y'') = x' - y'$ gilt. Daraus folgt $\xi x' - \xi y'' = x' - \varrho y''$ und $(\xi - 1)\, x' + (\varrho - \xi)\, y'' = o$. Da die Punkte Qx', Qy'' Q-verschieden sind, gilt nach Satz 9, daß $Qx' \cap Qy'' = o$. Nach Satz 2 ist dann $\xi = 1$, $\varrho = \xi$ und somit $\varrho = 1$, d. h. $y' = y''$.

b) *Die Gleichheit* $h(x, x', y) = y'$ *gilt genau dann, wenn* $h(y, y', x) = x'$.

c) *Es seien die Elemente* $x, y, z \in M$ *R-unabhängig und* $(Rx)^\varkappa = Qx'$. *Aus den Gleichheiten* $y' = h(x, x', y)$, $z' = h(x, x', z)$ *ergibt sich* $z' = h(y, y', z)$.

Beweis. Nach den Voraussetzungen gilt $(Rx)^\varkappa = Qx'$, $(Ry)^\varkappa = Qy'$, $(Rz)^\varkappa = Qz'$, $[R(x - y)]^\varkappa = Q(x' - y')$, $[R(x - z)]^\varkappa = Q(x' - z')$. Aus der Definition 7 ergibt sich , daß die Elemente x', y', z' Q-unabhängig sind. Nach Satz 12 gilt $R(y - z) = (Ry + Rz) \cap [R(x - y) + R(x - z)]$ und aus der Definition 7 folgt $[R(y - z)]^\varkappa \subseteqq [Qy' + Qz'] \cap [Q(x' - y') + Q(x' - z')]$. Die Elemente $y', z', x' - y'$ sind Q-unabhängig und daher nach Satz 11 ist $[R(y - z)]^\varkappa = [Qy' + Qz'] \cap [Q(x' - y') + Q(x' - z')]$. Bei weiterer Anwendung von Satz 12 erhalten wir $[R(y - z)]^\varkappa = Q(y' - z')$. Die Punkte Ry, Rz sind R-verschieden und es gilt $(Ry)^\varkappa = Qy'$, $(Rz)^\varkappa = Qz'$, $[R(y - z)]^\varkappa = Q(y' - z')$. Nach a) ist somit $z' = h(y, y', z)$.

d) *Es seien die Elemente* $x, y, z \in M$ *R-unabhängig,* $(Rx)^\varkappa = Qx'$ *und* $y' = h(x, x', y)$, $z' = h(x, x', z)$. *Dann gilt* $h(x, x', y + z) = y' + z'$.

Beweis. Die Elemente $x, y + z$ sind R-unabhängig, es gibt daher ein Element $h(x, x', y + z)$. Die Elemente x', y', z' sind Q-unabhängig. Analog zu c) erhält man mit Hilfe des Satzes 12 b): $[R(x - y - z)]^\varkappa = [(R(x - y))^\varkappa + (Rz)^\varkappa] \cap [(R(x - z))^\varkappa + (Ry)^\varkappa] = [Q(x' - y') + Qz'] \cap [Q(x' - z') + Qy'] = Q(x' - y' - z')$. Aus Satz 12c) erhalten wir weiter $[R(y - z)]^\varkappa = (Qy' + Qz') \cap [Q(x' - y' - z') + Qx'] = Q(y' + z')$. Aus den Gleichheiten $(Rx)^\varkappa = Qx'$, $[R(y + z)]^\varkappa =$

$= Q(y' + z'), [R(x - (y + z))]^\varkappa = Q(x' - y' - z') = Q(x' - (y' + z'))$ folgt nach a) $h(x, x', y + z) = y' + z'$.

Da card $B \geqq 3$ ist, gibt es im M nach Bemerkung 2 drei R-unabhängige Elemente u, v, w. Setzen wir $(Ru)^\varkappa = Qu'$. Danach sind die Elemente $v' = h(u, u', v)$, $w' = h(u, u'w)$ eindeutig bestimmt. Wenn wir x, y als beliebige verschiedene Elemente aus u, v, w bezeichnen, dann gilt nach b), c) $y' = h(x, x', y)$. Für ein beliebiges Element $t \in M^*$ gibt es mindestens zwei Elemente aus u, v, w, etwa u, v derart, daß u, v, t R-unabhängig sind. Setzen wir $t' = h(u, u', t)$. Da $h(u, u', v) = v'$ ist, gilt nach c) $h(v, v', t) = t' = h(u, u', t)$. Für jedes Element $t \in M^*$ werden mindestens zwei von den drei Funktionswerten $h(u, u', t)$, $h(v, v', t)$, $h(w, w', t)$ definiert und diese Werte sind gleich. Der gemeinsame Wert wird mit t^σ bezeichnet. Somit ist die Abbildung σ der Menge M^* in N^* definiert. Für ein $t \in M^*$ gilt dann nach a) $(Rt)^\varkappa = Qt^\sigma$. Weiter werden wir einige Eigenschaften der Abbildung σ beweisen.

(i) Es gebe beliebige R-unabhängige Elemente $a, b \in M^*$. Von den Elementen u, v, w kann ein solches gewählt werden, etwa u, daß a, b, u R-unabhängig sind. Es gilt $a^\sigma = h(u, u', a)$, $b^\sigma = h(u, u', b)$ und nach d) ist $a^\sigma + b^\sigma = h(u, u', a + b) = (a + b)^\sigma$.

(ii) σ ist eine bijektive Abbildung der Mengen M^*, N^*: Wählen wir ein beliebiges Element $s \in N^*$. Nach der Definition 7 gibt es einen einzigen Punkt $T \in B(M)$ derart, daß $T^\varkappa = Qs$. Dieser Punkt T ist R-verschieden von mindestens einem Punkt aus Ru, Rv, Rw, etwa vom Punkt Ru. Dann sind auch die Punkte Qs, $(Ru)^\varkappa = Qu^\sigma$ Q-verschieden und die Elemente s, u^σ sind Q-unabhängig. Danach $u^\sigma + s \in N^*$ und $Q(u^\sigma + s)$ ist ein Punkt. Es besteht genau ein Punkt $P \in B(M)$ derart, daß $P^\varkappa = Q(u^\sigma + s)$. Es gilt $P^\varkappa \subseteqq Qu^\sigma + Qs = (Ru)^\varkappa + T^\varkappa$ und daher $P \subseteqq Ru + T$. Die Punkte Qs, $Q(u^\sigma + s)$ bzw. Qu^σ, $Q(u^\sigma + s)$ sind Q-verschieden, weshalb die Punkte T, P und Ru, P R-verschieden sind. Wird $P = Rp'$ gesetzt, so ist $p' = \varrho u + t'$ mit $\varrho \in R$, $t' \in T$. Da $p' \in M^*$, muß entweder ϱu oder t' in M^* liegen. Setzen wir $\varrho u \in M^*$ voraus. Da die Punkte Ru, P R-verschieden sind, so folgt auch $t' \in M^*$. Setzen wir $p = \varrho^{-1}p' = u + \varrho^{-1}t = u + t$, dann ist $P = Rp$, $T = Rt$. Nach (i) gilt $P^\varkappa = Q(u^\sigma + s) = [R(u + t)]^\varkappa = Q(u + t)^\sigma = Q(u^\sigma + t^\sigma)$. Da $u^\sigma + s$, $u^\sigma + t^\sigma \in P^\varkappa$, so ist $s - t^\sigma \in P^\varkappa$. Dies bedeutet, daß $s - t^\sigma \in P^\varkappa \cap T^\varkappa$ gilt. Da $P^\varkappa, T^\varkappa$ Q-verschieden sind, so gilt nach Satz 9 $P^\varkappa \cap T^\varkappa = o$ und daher $s = t^\sigma$. Dann ist σ die Abbildung M^* auf N^*. Die Eineindeutigkeit ergibt sich dann aus a).

(iii) Es gebe $x \in M^*$, $\alpha \in R^*$. Dann gilt $Rx = R(\alpha x)$ und $(Rx)^\varkappa = [R(\alpha x)]^\varkappa = Rx^\sigma = R(\alpha x)^\sigma$. Nach Satz 2 gibt es ein eindeutig bestimmtes Element $g(\alpha, t) \in R^*$ derart, daß $(\alpha x)^\sigma = g(\alpha, t)\, x^\sigma$ gilt. Für beliebige $x, y \in M^*$ ist $g(\alpha, x) = g(\alpha, y)$: Es seien x, y zuerst R-unabhängig. Dann $x + y \in M^*$ und es gilt $g(\alpha, x + y)\, x^\sigma + g(\alpha, x + y)\, y^\sigma = g(\alpha, x + y)\,(x + y)^\sigma = [\alpha(x + y)]^\sigma = (\alpha x + \alpha y)^\sigma$. Da $\alpha x, \alpha y$ auch R-unabhängig sind, so gilt nach (i) $(\alpha x + \alpha y)^\sigma = (\alpha x)^\sigma + (\alpha y)^\sigma = g(\alpha x)\, x^\sigma + g(\alpha, y)\, y^\sigma$ und daraus folgt $[g(\alpha, x) - g(\alpha, x + y)]\, x^\sigma = [g(\alpha, x + y) - g(\alpha, y)]\, y^\sigma$. Da Rx, Ry R-verschieden sind, sind Qx^σ, Qy^σ Q-verschieden und nach

Satz 9 ist $Qx^\sigma \cap Qy^\sigma = o$. So folgt $g(\alpha, x) = g(\alpha, x + y) = g(\alpha, y)$. Sind x, y R-abhängig, so wählen wir $z \in M^*$ derart, daß x, z und y, z R-unabhängig sind. Dann gilt nach dem Vorhergehenden $g(\alpha, x) = g(\alpha, z) = g(\alpha, y)$ und das Element $g(\alpha, x) \in R^*$ ist von der Wahl des Elementes $x \in M^*$ nicht abhängig. Wir können deshalb $g(\alpha, x) = \alpha^\varphi$ setzen. Dann ist φ eine Abbildung R^* in Q^* und für sämtliche $\alpha \in R^*$, $x \in M^*$ gilt $(\alpha x)^\sigma = \alpha^\varphi x^\sigma$.

(iv) φ ist die Abbildung auf die Menge Q^*: Wählen wir ein beliebiges Element $\gamma \in Q^*$ und es sei $x \in M^*$. Dann $\gamma x^\sigma \in N^*$, $Q\gamma = Q$. Nach (ii) gibt es ein $s \in M^*$ mit $s^\sigma = \gamma x^\sigma$ und $(Rs)^\varkappa = Qs^\sigma = Qx^\sigma = (Rx)^\varkappa$. Es gilt $Rs = Rx$ und es besteht $\beta \in R^*$ mit $s = \beta x$. Nach (iii) ist dann $s^\sigma = \gamma x^\sigma = (\beta x)^\sigma = \beta^\varphi x^\sigma$ und daher $\gamma = \beta^\varphi$.

Nach (i)–(iv) ist (φ, σ) eine teilweise halblineare Abbildung und es gilt $(Rx)^\varkappa = Qx^\sigma\ \forall x \in M^*$. Nach Definition 8 wird also die projektive Abbildung $\varkappa$ der Räume $P(R, M)$, $P(Q, N)$ durch diese teilweise halblineare Abbildung induziert. Damit is das Theorem bewiesen.

Bemerkung 7. Existiert eine projektive Abbildung der Räume $P(R, M)$. $P(Q, N)$, so gibt es nach dem Theorem eine teilweise halblineare Abbildung der Moduln M, N und nach Satz 6 gibt es eine halblineare Abbildung derjenigen Moduln. Folglich sind die Ringe R, Q isomorph. Nach Bemerkung 3 gibt es auch eine halblineare Abbildung der zu (R, M), (Q, N) zugeordneten Vektorräumen (R', M'), (Q', N'). Also, die Körper $R' = R/R_0$, $Q' = Q/Q_0$ sind isomorph und die zu $P(R, M)$, $P(Q, N)$ zugeordneten projektiven Räume $P(R', M')$, $P(Q', N')$ sind projektiv äquivalent.

Literatur

[1] *Baer, R.:* Linear algebra and projective geometry, 1952.

[2] *Lambek, J.:* Lectures on rings and modules, Toronto, London, 1966.

[3] *Klingenberg, W.:* Projective Geometrien mit Homomorphismus, Math. Annalen, *132* (1956), 180–200.

[4] *Klingenberg, W.:* Projektive Geometrie und lineare Algebra über verallgemeinerten Bewertungsringen. Oxford: Proc. Coll. Utrecht, 1959: Algebraical and topological foundations of geometry, 99–107, 1962.

[5] *Machala, F.:* Projektive Abbildung von Moduln, Czech. Math. Journal, *24* (*99*) (1974), 26–39.

[6] *Скорняков, Л. А.:* Проективное отображение модулей, Изв. Акад. наук СССР *24* (1960), № 4, 511–520.

Anschrift des Verfassers: 771 46 Olomouc, Leninova 26 ČSSR (Přírodovědecká fakulta UP).