Czechoslovak Mathematical Journal

Tibor Katriňák

Die Kennzeichnung der beschränkten Brouwerschen Verbände

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 22 (1972), No. 3, 427–434

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101112`

Czechoslovak Mathematical Journal, 22 (97) 1972, Praha

DIE KENNZEICHNUNG DER BESCHRÄNKTEN BROUWERSCHEN VERBÄNDE

TIBOR KATRIŇÁK, Bratislava

(Eingegangen am 15. Marz 1971)

Alle pseudokomplementären Strukturen – von den distributiven pseudokomplementären Halbverbänden beginnend bis hin zu den beschränkten relativ Stoneschen Verbänden – lassen eine Tripelcharakterisierung im Sinne der Arbeit [3] zu. Die distributiven pseudokomplementären Verbände sind mit Hilfe einer anderen Methode in [4] konstruiert worden. Das Gleiche tun wir hier auch für die beschränkten Brouwerschen Verbände (s. Satz 3). Die beschränkten Brouwerschen Halbverbände waren früher in [5] gekennzeichnet worden. Wie aus einem Beispiel in [5] hervorgeht, braucht ein beschränkter Brouwerscher Halbverband, dessen Filter der dichten Elemente ein Brouwerscher Verband ist, kein Brouwerscher Verband zu sein. Wann dies besteht, besagt uns Satz 2. Alle angeführten Ergebnisse stützen sich auf Satz 1, der diejenigen distributiven pseudokomplementären Verbände beschreibt, die einen Brouwerschen Verband bilden.

1. VORBEREITENDE BEMERKUNGEN

Was die Bezeichnung und Terminologie betrifft, werden wir uns am meisten an der Arbeit [3] halten. Wir geben doch einige Begriffe wieder.

Ein Halbverband $\langle L, \cap \rangle$ (ferner nur kurz mit L bezeichnet) heisst *distributiv*, falls aus $t \geqq x \cap y$ die Existenz von Elementen $x_1 \geqq x$ und $y_1 \geqq y$ derart, folgt, dass $t = x_1 \cap y_1$ gilt.

Eine nichtleere Teilmenge J eines Halbverbandes L heisst ein *Filter*, wenn aus $y \geqq x$ und $x \in J$ stets $y \in J$ folgt, und $x, y \in J$ die Beziehung $x \cap y \in J$ nach sich zieht. Es ist leicht zu sehen, dass für $a \in L$ die Menge $[a) = \{x \in L;\ x \geqq a\}$ einen Filter bildet, den wir einen *Hauptfilter* nennen werden. $F(L)$ wird die Gesamtheit aller Filter von L bezeichnen, die bezüglich der mengentheoretischen Inklusion halbgeordnet ist. Falls der Halbverband L ein grösstes Element 1 enthält, dann bildet $F(L)$ einen Verband, wobei für $J_1, J_2 \in F(L)$ $J_1 \cap J_2$ der mengentheoretische Durchschnitt von J_1 und J_2 ist. Setzt man noch die Distributivität von L voraus, dann gilt (s. [2])

$$(1) \qquad J_1 \cup J_2 = \{t \in L;\ t = x \cap y,\ x \in J_1 \text{ und } y \in J_2\}\,.$$

Wie aus dem folgenden Satz hervorgeht, stellen die distributiven Halbverbände eine Verallgemeinerung von distributiven Verbänden dar.

1.1. (s. [2]). *Ein Halbverband L ist genau dann distributiv, wenn der Filterverband $F(L)$ distributiv ist.*

Durch einen Filter J eines distributiven Halbverbandes L kann man eine Kongruenzrelation $\Theta(J)$ in L erklären:

(2) $x \equiv y(\Theta(J))$ *genau dann, wenn es ein* $v \in J$ *gibt, so dass* $x \cap v = y \cap v$ *gilt.*

$\Theta(J)$ ist offenbar die kleinste Kongruenzrelation in L, die J als Kern enthält.

Ein Filter J eines distributiven Halbverbandes L mit 1 heisst *comonomial*, wenn jede $\Theta(J)$-Klasse ein grösstes Element besitzt. $[a]\,\Theta$ wird die Element a enthaltende Θ-Klasse bedeuten.

1.2. *Es seien L ein distributiver Halbverband mit* 1 *und J_1, J_2 zwei Filter von L. Es gelte $J_1 \cup J_2 = L$ und $J_1 \cap J_2 = [d)$ für ein $d \in L$. Dann bildet*

$$(3) \qquad \varphi : x \to [x]\,\Theta(J_1)$$

den Teilhalbverband $L_d = \{x \in J_2;\ x \leqq d\}$ isomorph auf den Faktorhalbverband $L/\Theta(J_1)$ ab.

Beweis. Bekanntlich gilt $(x \cap y)\,\varphi = x\varphi \cap y\varphi$. Angenommen $x\varphi = y\varphi$ $(x, y \in L_d)$. Daher ergibt sich nach (2) $x \cap v = y \cap v$ für ein $v \in J_1$. Der Distributivität wegen gibt es Elemente $x_1 \geqq x$ und $v_1 \geqq v$ mit $y = x_1 \cap v_1$. Folglich ist $x_1 \equiv x(\Theta(J_1))$, was mit $x = x_1 \cap w$ für ein $w \in J_1$ äquivalent ist. Wegen $x, y \in L_d$ ist $w, v_1 \geqq d$, was $y = x_1 \cap d = x$ liefert. Also φ ist injektiv.

Es sei $[t]\,\Theta(J_1)$ ein beliebiges Element von $L/\Theta(J_1)$. Es gibt zwei Elemente $t_1 \in J_1$ und $t_2 \in J_2$ mit $t = t_1 \cap t_2$. Wegen $d \equiv 1(\Theta(J_1))$ ist $t \equiv t_2 \cap d(\Theta(J_1))$ und $t_2 \cap d \in L_d$. Somit ist $(t_2 \cap d)\,\varphi = [t]\,\Theta(J_1)$ gezeigt, was noch zu beweisen war.

Wir erwähnen noch einige Begriffe. Gibt es für zwei Elemente a und b eines Halbverbandes L ein Element $c = a_* b \in L$ mit der Eigenschaft

$$(4) \qquad a \cap x \leqq b \quad \textit{genau dann, wenn} \quad x \leqq a_* b\,,$$

dann ist $a_* b$ in L eindeutig bestimmt und heisst ein *Relativpseudokomplement.* Wenn es für je zwei Elemente $a, b \in L$ das Relativpseudokomplement $a_* b$ in L gibt, dann heisst L ein *Brouwerscher* Halbverband. Ein Halbverband L mit 0, der für alle $a \in L$ Elemente $a_* 0$ besitzt, wird *pseudokomplementär* genannt. $a_* 0$ wird kurz mit a^* bezeichnet. Brouwersche und pseudokomplementäre Halbverbände besitzen stets 1.

Einem pseudokomplementären Halbverband L ordnet man zwei wichtige Teilmengen zu: $B(L) = \{x \in L;\ x = x^{**}\}$ und $D(L) = \{x \in L;\ x^* = 0\}$. $B(L)$ bildet bezüglich der induzierten Halbordnung von L eine Boolesche Algebra $\langle B(L), \wedge, \vee, ', 0, 1\rangle$, wobei $a \wedge b = a \cap b$ und $a^* = a'$ für $a, b \in B(L)$ gilt. $D(L)$ stellt einen Filter von L dar, den Filter der *dichten* Elemente von L.

1.3. *Für jedes Element x eines distributiven pseudokomplementären Halbverbandes L gibt es ein Element $d \in D(L)$ derart, dass*

$$x = x^{**} \cap d \tag{5}$$

gilt.

1.4. *Ein Brouwerscher Halbverband ist distributiv.*

Beide Sätze findet man in [3, 2.4 und 2.7].

2. BROUWERSCHE HALBVERBÄNDE MIT 0

2.1. *Seien J_1 und J_2 Filter von einem Brouwerschen Halbverband L. Es gelte $J_1 \cup J_2 = L$ und $J_1 \cap J_2 = [d)$ für ein $d \in L$. Dann sind die beiden Filter J_1 und J_2 comonomial. Ferner ist d_*t für $t \in J_2$ das grösste Element in der Klasse $[t]\ \Theta(J_1)$.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass z. B. J_1 ein comonomialer Filter ist. Sei $p \in L$. Wegen $J_1 \cup J_2 = L$ gibt es zwei Elemente $q \in J_1$ und $t \in J_2$ derart, dass $p = q \cap t$ gilt. Daher ergibt sich $p \equiv t(\Theta(J_1))$. $d \in J_1$ und $d \cap t = d \cap (d_*t)$ impliziert $t \equiv d_*t(\Theta(J_1))$. Angenommen, dass $r \equiv p(\Theta(J_1))$ für ein $r \in L$ gilt. Folglich ist $r \equiv d_*t(\Theta(J_1))$. Demnach gibt es ein $w \in J_1$ mit

$$r \cap w = (d_*t) \cap w\,.$$

Der Distributivität von L wegen gibt es wiederum Elemente $v \geqq w$ und $r_1 \geqq r$ mit

$$d_*t = r_1 \cap v\,.$$

Daraus folgt $r_1 \geqq d_*t$ und $r_1 \equiv d_*t(\Theta(J_1))$. Ferner $t \leqq d_*t \leqq v$, $t \in J_2$ und $w \leqq v$ liefert uns $v \geqq d$. Weiterhin gilt

$$d \cap r_1 = d \cap (v \cap r_1) = d \cap d_*t \leqq t\,.$$

Daher ergibt sich $r \leqq r_1 \leqq d_*t$. Damit haben wir bewiesen, dass d_*t das grösste Element in der Klasse $[p]\ \Theta(J_1) = [t]\ \Theta(J_1)$ ist.

Es sei L ein distributiver pseudokomplementärer Halbverband. Bezeichne $a\Psi^L = \{x \in D(L);\ x \geqq a\}$ für $a \in B(L)$. Es ist klar, dass $a\Psi^L$ ein Filter von $D(L)$ mit

$$a\Psi^L \cup a^*\Psi^L = 0\Psi^L = D(L)$$

ist (s. [3]).

2.2. *Es sei L ein distributiver pseudokomplementärer Halbverband, wobei der Filter $D(L)$ der dichten Elemente von L einen Brouwerschen Halbverband bildet. Es sei noch $a\Psi^L \cap a^*\Psi^L$ für jedes $a \in B(L)$ ein Hauptfilter in $D(L)$. Dann stellt L einen Brouwerschen Halbverband (mit 0) dar.*

Beweis. Wegen der Voraussetzung und $a\Psi^L \cup a^*\Psi^L = D(L)\ (a \in B(L))$ bildet $a\Psi^L$ nach 2.1 einen comonomialen Filter in $D(L)$ für alle $a \in B(L)$. Unsere Behauptung folgt nun aus [3, 4.2 und Satz 5.9].

Satz 1. *Es sei L ein distributiver pseudokomplementärer Verband. L ist genau dann brouwersch, wenn $D(L)$ ein Brouwerscher Verband ist.*

Beweis folgt aus 2.2. Wir bringen noch einen anderen, konstruktiven Beweis. Es ist zu zeigen, dass für alle $x, y \in L$ $x_* y$ in L existiert.

Fall 1. $x \in L$, $y = a \in B(L)$. Wir zeigen, dass $x_* a \in B(L)$ und

$$x_* a = x^* \vee a = (x^* \cup a)^{**} \tag{2.1}$$

gilt. Bekanntlich ist $x^{**} \geqq x$ und $x^{**} \in B(L)$. Demzufolge gilt

$$x \cap (x^* \vee a) \leqq x^{**} \cap (x^* \vee a) = (x^{**} \cap x^*) \vee (x^{**} \cap a) \leqq a\,.$$

Umgekehrt, sei $x \cap z \leqq a$ für ein $z \in L$. Wegen

$$(x \cap z) \leqq (x \cap z)^{**} = x^{**} \cap z^{**} \leqq a^{**} = a$$

(s. [3, 2.3]) gilt dann $z \leqq z^{**} \leqq x^* \vee a$, weil x^{**}, z^{**} und a in der Booleschen Algebra $B(L)$ liegen. Damit haben wir (2.1) nachgewiesen.

Fall 2. $x = a$ und $a \in B(L)$, $y = d$ und $d \in D(L)$. $x_* y$ existiert, liegt in $D(L)$ und gilt

$$a_* d = (a \cup a^*)_* (a^* \cup d)\,. \tag{2.2}$$

Wegen $a \cup a^*$, $a^* \cup d \in D(L)$ und der Annahme nach existiert das Element $(a \cup a^*)_*(a^* \cup d)$ in $D(L)$. Offensichtlich

$$a \cap [(a \cup a^*)_*(a^* \cup d)] = a \cap (a \cup a^*) \cap [(a \cup a^*)_*(a^* \cup d)] \leqq$$
$$\leqq a \cap (a^* \cup d) = a \cap d \leqq d\,.$$

Es sei für $t \in D(L)$ $a \cap t \leqq d$. Demzufolge

$$(a \cap t) \cup a^* = (a \cup a^*) \cap (t \cup a^*) \leqq a^* \cup d\,.$$

Daraus ergibt sich $t \leqq a^* \cup t \leqq (a \cup a^*)_*(a^* \cup d)$. Falls $a \cap z \leqq d$ für ein $z \in L$ ist, dann gilt für $t := z \cup (a \cup a^*)_*(a^* \cup d) \in D(L)$ auch $a \cap t \leqq d$, woraus schon $z \leqq t \leqq (a \cup a^*)_*(a^* \cup d)$ folgt. Damit ist (2.2) bewiesen.

Angenommen, dass die Elemente x_*y und x_*z in L existieren $(x, y, z \in L)$. Wir zeigen, dass auch das Element $x_*(y \cap z)$ in L existiert und gilt

$$x_*(y \cap z) = (x_*y) \cap (x_*z) . \tag{2.3}$$

Offensichtlich $x \cap (x_*y) \cap (x_*z) \leqq y \cap z$. $x \cap t \leqq y \cap z$ $(t \in L)$ impliziert $x \cap t \leqq y$ und $x \cap t \leqq z$, woraus schon $t \leqq (x_*y) \cap (x_*z)$ folgt. (2.3) ist nachgewiesen.

Schliesslich nehmen wir an, dass das Element $x_*(y_*z)$ in L existiert. Dann existiert in L auch $(x \cap y)_*z$ und gilt

$$(x \cap y)_*z = x_*(y_*z) . \tag{2.4}$$

Offenbar $(x \cap y) \cap [x_*(y_*z)] = y \cap [x \cap x_*(y_*z)] \leqq y \cap (y_*z) \leqq z$. Sei für $t \in L$ $(x \cap y) \cap t \leqq z$. Daraus ergibt sich $x \cap t \leqq y_*z$ und folglich auch $t \leqq x_*(y_*z)$. (2.4) ist bewiesen.

Nun können wir die bisherigen Resultate zusammenfassen. Seien $x, y \in L$. Es gibt nach 1.3 Elemente $d_1, d_2 \in D(L)$ derart, dass $x = x^{**} \cap d_1$ und $y = y^{**} \cap d_2$ gelten wird. Wegen (2.2) existiert das Element x_*d_2 in L und gilt $x_*^{**}(d_{1*}d_2) = (x^{**} \cap d_1)_*d_2 = x_*d_2$ (s. (2.4)). Das Element x_*y^{**} existiert auch in L (s. (2.1)). Mithin existiert x_*y in L (s. (2.3)) und gilt

$$\begin{aligned} x_*y &= (x_*y^{**}) \cap (x_*d_2) = (x^* \vee y^{**}) \cap x^{**}{}_*(d_{1*}d_2) = \\ &= (x^* \vee y^{**}) \cap [(x^{**} \cup x^*)_*(x^* \cup (d_{1*}d_2))] . \end{aligned}$$

In [5] wurde anhand eines Beispieles gezeigt, dass es Brouwersche Halbverbände L mit 0 und mit einem Brouwerschen Verband $D(L)$ gibt, die keinesfalls Verbände zu sein brauchen. Dazu sagt uns der folgende Satz

Satz 2. *Es sei L ein Brouwerscher Halbverband mit* 0, *wobei der Filter der dichten Elemente $D(L)$ einen Verband bildet. L ist genau dann ein Brouwerscher Verband, wenn für alle $a \in B(L)$ $a\Psi^L \cap a^*\Psi^L$ einen Hauptfilter von $D(L)$ darstellt.*

Beweis. Die notwendige Bedingung folgt aus $[a \cup a^*) = a\Psi^L \cap a^*\Psi^L$. Die hinreichende Bedingung ergibt sich aus [3, Satz 5.12] und Satz 1.

3. TRIPELCHARAKTERISIERUNG DER BROUWERSCHEN VERBÄNDE MIT 0

Die Teilmengen $B(L)$, $D(L)$ und die Abbildung Ψ^L von $B(L)$ in den Filterverband $F(D(L))$ ist von der grundlegenden Bedeutung für die distributiven pseudokomplementären und Brouwerschen (Halb-) Verbände, wie aus [3], [4] und [5] zu entnehmen ist. Die erste Kennzeichnung der Brouwerschen Halbverbände mit 0 in dieser Richtung ist in [5] unternommen worden. In [3] ist dies ganz allgemein für verschiedene Strukturen besprochen. In [4] ist eine andere Methode zur Konstruierung der distributiven pseudokomplementären Verbände entwickelt worden. Wir möchten hier noch in dieser Richtung einen Beitrag für die Brouwerschen Verbände mit 0 leisten. Zuerst einige Begriffe und Resultate aus [4].

Seien $B = \langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1\rangle$ ein Boolescher Verband, $D = \langle D, \cup, \cap, _*, 1\rangle$ ein Brouwerscher Verband und Φ ein $(e, \cup)$-Homomorphismus von B in $F(D)$ (d. h. $0\Phi = [1)$, $1\Phi = D$, $(x \vee y)\Phi = x\Phi \cup y\Phi$). Ein Tripel $\langle B, D, \Phi\rangle$ wird ein *b-Tripel* heissen, wenn für alle $a \in B$ $a\Phi \cap a'\Phi$ ein Hauptfilter ist. Es ist leicht zu sehen, dass im Falle eines Brouwerschen Verbandes L mit 0 $\langle B(L), D(L), \Phi^L\rangle$ für $a\Phi^L := a^*\Psi^L$ $(a \in B(L))$ ein b-Tripel bildet.

Für ein b-Tripel $\langle B, D, \Phi\rangle$ und $a \in B$ bezeichne $d_a \in D$ das Element, das durch

$$[d_a) = a\Phi \cap a'\Phi$$

bestimmt ist. Ferner bildet für ein $d \in D$ und $a \in B$

$$[d) \cap a\Phi$$

einen Hauptfilter von D. Es bezeichne $d\varrho_a$ das erzeugende Element dieses Hauptfilters. (Es gilt nämlich $[d_a \cup d) = ([d) \cap a\Phi) \cap ([d) \cap a'\Phi)$ und $([d) \cap a\Phi) \cup ([d) \cap \cap a'\Phi) = [d)$. Beide Filter sind dann Hauptfilter (s. [3, 1.9]).) Ferner bezeichne noch $D_a = \{x \in a\Phi;\ x \leqq d_a\}$ $(a \in B)$.

Satz 3. *Es sei $\langle B, D, \Phi\rangle$ ein b-Tripel. Bezeichne L die Gesamtheit aller Paare $\langle a, d\rangle$ mit $a \in B$ und $d \in D_a$. Dann ist die Menge L durch*

$$(3.1)\qquad \langle a, d\rangle \leqq \langle b, e\rangle \text{ genau dann, wenn } a \leqq b \text{ und } d \leqq e\varrho_a$$

halbgeordnet. Bezüglich dieser Halbordnung bildet L einen Brouwerschen Verband mit 0, wobei für $x = \langle a, d\rangle$, $y = \langle b, e\rangle \in L$

$$(3.2)\qquad x \cap y = \langle a \wedge b,\ (d \cap e)\,\varrho_{a\wedge b}\rangle\,,$$

$$(3.3)\qquad x \cup y = \langle a \vee b,\ (d\varrho_{b'} \cap e) \cup (e\varrho_{a'} \cap d)\rangle\,,$$

$$(3.4)\qquad x^* \quad = \langle a', d_{a'}\rangle\,,$$

$$(3.5)\qquad \langle 0, 1\rangle \leqq x \leqq \langle 1, 1\rangle$$

und

$$(3.6)\qquad x_* y = \langle a' \vee b,\ d_*(e\varrho_a) \cap d_{a'\vee b}\rangle$$

in L gilt.

Beweis. Nach [4, 4.3] bildet die Menge L einen distributiven pseudokomplementären Verband, in dem die Beziehungen (3.1)–(3.5) gelten. Ferner gilt nach [4, Satz 2]

$$B(L) = \{\langle a, d\rangle \in L;\ d = d_a,\ a \in B\},$$

$$D(L) = \{\langle 1, d\rangle \in L;\ d \in D\} \quad \text{und} \quad \langle a, d_a\rangle\, \Phi^L = \{\langle 1, d\rangle \in L;\ d \in a\Phi\}.$$

Daher folgt $B(L) \simeq B$ und $D(L) \simeq D$. Also $D(L)$ bildet sogar einen Brouwerschen Verband. Nach Satz 1 ist L ein Brouwerscher Verband mit 1. Es bleibt noch zu zeigen, dass die Operation des Relativpseudokomplementes in L durch (3.6) gegeben ist. Zuerst betrachten wir zwei Spezialfälle:

Fall 1. $x = \langle a, d\rangle \in L$, $y = \langle 1, e\rangle \in D(L)$. Es ist $x_* y = \langle 1, d_*(e\varrho_a)\rangle$ zu zeigen. Wegen (3.1) und (3.2) gilt

$$\langle a, d\rangle \cap \langle 1, d_*(e\varrho_a)\rangle = \langle a, (d \cap e\varrho_a)\, \varrho_a\rangle = \langle a, d \cap e\varrho_a\rangle \leqq \langle 1, e\rangle.$$

Angenommen, dass $\langle a, d\rangle \cap \langle c, f\rangle \leqq \langle 1, e\rangle$ für ein $\langle c, f\rangle \in L$ ist. Wegen der Distributivität von L gilt

$$\langle a, d\rangle \cap (\langle c, f\rangle \cup \langle 1, e\rangle) = \langle a, d\rangle \cap \langle 1, e \cup (e\varrho_{c'} \cap f)\rangle =$$
$$= \langle a, (d \cap e)\, \varrho_a \cup (d \cap f \cap e\varrho_{c'})\, \varrho_a\rangle \leqq \langle 1, e\rangle.$$

Die letzte Beziehung ist nach (3.1) mit

$$d \cap f\varrho_a \cap e\varrho_{c'}\varrho_a \leqq e\varrho_a$$

und dies schliesslich mit

$$f\varrho_a \cap e\varrho_{c'}\varrho_a \leqq d_*(e\varrho_a)$$

äquivalent. Setzen wir nun $t_1 := f\varrho_a \cup (d_*(e\varrho_a))$ und $t_2 := e\varrho_a\varrho_{c'} \cup (d_*(e\varrho_a))$. Daher ergibt sich $t_1 \cap t_2 = d_*(e\varrho_a)$. Setzt man ferner $p_1 := (d_*(e\varrho_a))\, \varrho_c$ und $p_2 := (d_*(e\varrho_a))\, \varrho_{c'}$, dann gilt

$$p_1 \cap p_2 = d_*(e\varrho_a).$$

Wegen $f\varrho_a \in c\Phi$ ist $p_1 \leqq t_1$. Analog wegen $e\varrho_a\varrho_{c'} \in c'\Phi$ gilt $p_2 \leqq t_2$. $e\varrho_a \leqq d_*(e\varrho_a)$ impliziert $e\varrho_a\varrho_{c'} \leqq (d_*(e\varrho_a))\, \varrho_{c'}$, woraus schon $p_2 = t_2$ folgt. Offenbar ist $p_2 \in c'\Phi$ und $p_1 \in c\Phi$. Ferner gilt $p_1 \equiv t_1(\Theta(c'\Phi))$. Nach 2.1 ist $d_{c*}p_1$ das grösste Element in der Klasse $[p_1]\, \Theta(c'\Phi))$. Daher ergibt sich

$$t_1 \leqq d_{c*}p_1.$$

Folglich ist

$$f \leqq d_{c*}p_1.$$

Wegen $f \leqq d_c$ gilt

$$f \leqq d_c \cap p_1 \leqq p_1 = (d_*(e\varrho_a))\, \varrho_c.$$

Die letzte Beziehung mit (3.1) liefert uns

$$\langle c, f \rangle \leqq \langle 1, d_*(e\varrho_a) \rangle .$$

Fall 2. $x = \langle a, d \rangle \in L$, $y = \langle b, d_b \rangle \in B(L)$. L stellt einen Brouwerschen Verband mit 0 dar. Im Beweis von Satz 1 (s. (2.1)) haben wir gezeigt

$$x_* y = (x^* \cup y)^{**} .$$

Wegen (3.3) und (3.4) erhält man

$$x_* y = (\langle a', d_{a'} \rangle \cup \langle b, d_b \rangle)^{**} = \langle a' \vee b, d_{a' \vee b} \rangle .$$

Betrachten wir nun ganz allgemein $x = \langle a, d \rangle$ und $y = \langle b, e \rangle$ aus L. Offenbar gilt $y = \langle b, d_b \rangle \cap \langle 1, e \rangle$. Daher erhält man (s. (2.3))

$$x_* y = \langle a, d \rangle_* (\langle b, d_b \rangle \cap \langle 1, e \rangle) = \langle a, d \rangle_* \langle b, d_b \rangle \cap$$
$$\cap \langle a, d \rangle_* \langle 1, e \rangle = \langle a' \vee b, a_{a' \vee b} \rangle \cap \langle 1, d_*(e\varrho_a) \rangle =$$
$$= \langle a' \vee b, (d_*(e\varrho_a) \cap d_{a' \vee b})\, \varrho_{a' \vee b} \rangle = \langle a' \vee b, d_*(e\varrho_a) \cap d_{a' \vee b} \rangle ,$$

weil $e \leqq d_*(e\varrho_a)$ und $e \in b\Phi \subseteq (a' \vee b)\, \Phi$ gilt.

Literatur

[1] *G. Birkhoff,* Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. *25,* third edition 1967.

[2] *T. Katriňák,* Pseudokomplementäre Halbverbände, Mat. časop. *18* (1968), 121—143.

[3] *T. Katriňák,* Die Kennzeichnung der distributiven pseudokomplementären Halbverbände, J. reine und angew. Math. *241* (1970), 160—179.

[4] *T. Katriňák,* Über eine Konstruktion der distributiven pseudokomplementären Verbände, Math. Nachr. *53* (1972), 85—99.

[5] *W. C. Nemitz,* Implicative semi-lattices, Trans. Amer. Math. Soc. *117* (1965), 128—142.

Anschrift des Verfassers: Bratislava-Mlynská dolina, Matematický pavilon, ČSSR, (Prírodovedecka fakulta UK).