Miroslav Sova

Régularité de l'évolution linéaire isochrone

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 20 (1970), No. 2, 251–302

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100966

Czechoslovak Mathematical Journal, 20 (95) 1970, Praha

RÉGULARITÉ DE L'ÉVOLUTION LINÉAIRE ISOCHRONE

MIROSLAV SOVA, Praha

(Reçu le 11 mars 1969)

Le présent article est consacré à l'étude des équations de l'évolution linéaire isochrone d'ordre un et deux

$$\text{(I)} \qquad u'(t) + A\,u(t) = h(t)\,, \quad u(0_+) = x\,,$$

$$\text{(II)} \qquad u''(t) + A\,u(t) = h(t)\,, \quad u(0_+) = x\,, \quad u'(0_+) = y$$

où A est un opérateur non-négatif autoadjoint dans un espace de Hilbert.

On peut montrer que l'étude des équations du type $u^{(n)}(t) + A\,u(t) = h(t)$, $u(0_+) = x_1, \ldots, u^{n-1}(0_+) = x_n$ est, pour A non-négatif autoadjoint et $n \geqq 3$, vide de sens. Voir [12].

Le cas hétérochrone, où le coefficient A dépend de temps, n'est pas considéré ici.

Les points centrals, ce sont la régularité et le lissage des solutions des équations (I), (II) si l'opérateur A est un opérateur différentiel elliptique. Il se montre qu'il s'agit de deux problèmes suivants: d'interpoler une puissance fractionnaire convenable de A et de transporter cette interpolation en temps sur une solution donnée u.

Pour l'histoire et d'autre remarques, voir le commentaire à la fin de l'article.

Il y a dix sections: 1. Préliminaire, 2. Opérateurs non-négatifs autoadjoints, 3. Equations d'évolution, 4. Transport de l'interpolation sur l'évolution, 5. Transitivité et reactivité d'opérateurs, 6. Opérateurs différentiels elliptiques, 7. Régularité de l'évolution, générée par des opérateurs elliptiques, 8. Lissage de l'évolution, générée par des opérateurs elliptiques, 9. Appendice de la réactivité, 10. Commentaire.

On voit de cette liste que les sections $1-5$ ont un caractère abstrait. Il serait peut-être bon que le lecteur lise ces parties abstraites parallèlement avec l'exposition de certains cas spéciaux qui sont considérés dans les sections $6-8$.

1. PRÉLIMINAIRES

1,1. On utilisera fréquemment les notions et notations courantes dans [1], [2]. En outre, rappelons quelques différences. On désignera par: (1) R le corps des nombres réels, (2) R^+ l'ensemble de nombres positifs, (3) R^d, $d = 1, 2, \ldots$ l'espace numérique d-dimensionel, $R^d = \underset{1}{R} \times \ldots \times \underset{d}{R}$, avec la norme $\|\xi\| = \|(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_d)\| = \sum_{r=1}^{d} |\xi_r|$, (4) $E, E_1, E_2, \ldots$ des espaces de Banach réels quelconques dont les normes sont écrites simplement $\|.\|$ ou si nécessaire $\|.\|_E, \|.\|_{E_1}, \|.\|_{E_2}, \ldots$, (5) $H, H_1, H_2, \ldots$ des espaces de Hilbert réels quelconques avec les normes $\|.\|, \|.\|_H, \|.\|_{H_1}, \ldots$ et avec les produits scalaires $\langle .,. \rangle, \langle ., . \rangle_H, \langle ., . \rangle_{H_1}, \ldots$ (6) $\mathfrak{L}^+(E_1, E_2)$ l'ensemble des opérateurs linéaires U avec $\emptyset \neq \mathfrak{D}(U) \subseteq E_1$, $\mathfrak{R}(U) \subseteq E_2$ $(\mathfrak{L}^+(E) = \mathfrak{L}^+(E, E))$, (7) $\mathfrak{L}(E_1, E_2)$ l'espace de Banach des opérateurs de $\mathfrak{L}^+(E_1, E_2)$, partout définis et continus, avec la norme usuelle qui s'écrit, si nécessaire, $\|.\|_{\mathfrak{L}(E_1, E_2)}$ $(\mathfrak{L}(E) = \mathfrak{L}(E, E))$, (8) $U^0 = I$ pour tout $U \in \mathfrak{L}^+(E)$.

Les résultats utilisés dans ce qui suit sont à trouver dans [1], [2], [8], [9], en particulier en ce qui est du calcul différentiel et intégral des fonctions vectorielles, voir [9], chap. III.

1,2. Soient $U \in \mathfrak{L}^+(E)$ et Q un espace de Banach. On dit que l'espace Q interpole l'opérateur U supérieurement {inférieurement} si

(I) $$\mathfrak{D}(U) \subseteq Q$$

(II) il existe une constante K telle que, quel que soit $x \in \mathfrak{D}(U)$,

(1) $$\|x\|_E + \|Ux\|_E \leqq K\|x\|_Q \; \{\|x\|_Q \leqq K(\|x\|_E + \|Ux\|_E)\} .$$

Si l'espace Q interpole l'opérateur U tel inférieurement que supérieurement, on dit simplement que Q interpole U.

1,3. Proposition. *Soient $U \in \mathfrak{L}^+(E)$ et Q un espace de Banach. Lorsque (α) $\mathfrak{D}(U) \cap Q$ est fermé dans Q, (β) $I + U$ est biunivoque et $(I + U)^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$, alors l'espace Q interpole l'opérateur U inférieurement si et seulement s'il l'interpole supérieurement.*

Autrement dit, sous les hypothèses (α), (β), l'interpolation inférieure ou supérieure implique l'interpolation (cfr. 1,2).

Preuve. Soit Q_0 l'espace de Banach $\mathfrak{D}(U) \cap Q$ muni de la norme de Q. Dans le cas de l'interpolation supérieure, $Q_0 = \mathfrak{D}(U)$ et $I + U$ est une transformation linéaire continu de Q_0 sur E et, dans le cas de l'interpolation inférieure, $Q_0 = \mathfrak{D}(U)$ et $(I + U)^{-1}$ est une transformation continue de E sur Q_0 ce qui s'obtient aisément grâce à l'identité $(I + U)^{-1} + U(I + U)^{-1} = I$. Alors il suffit de se servir du théorème de Banach du graphe fermé.

1,4. Proposition. *Soient $U \in \mathfrak{L}^+(E)$ et Q un espace de Banach. Si l'opérateur U est fermé et l'espace Q interpole l'opérateur U supérieurement, alors $\mathfrak{D}(U)$ est fermé dans Q.*

La preuve est presque immédiate.

1,5. Soit $U \in \mathfrak{L}^+(E)$. On désigne par $\mathfrak{G}(U)$ la complétion de l'espace $\mathfrak{D}(U)$ muni de la norme

$$\|x\|_{\mathfrak{G}(U)} = \|x\| + \|Ux\| .$$

Il est clair que $\mathfrak{G}(U)$ est un espace de Banach.

1,6. Proposition. *Soit $U \in \mathfrak{L}^+(E)$. Si l'opérateur U est fermé, alors*

(I) $$\mathfrak{G}(U) = \mathfrak{D}(U),$$

(II) *l'espace $\mathfrak{G}(U)$ interpole l'opérateur U .*

La preuve est immédiate.

1,7. Soit $d \in \{1, 2, \ldots\}$ et Ω un ouvert dans R^d. On désignera par (1) $\Omega \to E$ l'ensemble de toutes les fonctions sur Ω avec valeurs dans E, (2) $CCC(\Omega, E)$ le sous-ensemble de $\Omega \to E$ de toutes les fonctions continues sur Ω, (3) $CC(\Omega, E)$ le sous-ensemble de $CCC(\Omega, E)$ des fonctions bornées sur tout borné $X \subseteq \Omega$, (4) $C(\Omega, E)$ l'espace de Banach des fonctions bornées $f \in CCC(\Omega. E)$ avec la norme $\|f\|_{C(\Omega,E)} = \sup_{t\in\Omega} \|f(t)\|$, (5) $CU(\Omega, E)$ le sous-espace de $C(\Omega, E)$ des fonctions uniformément continues sur Ω, (6) $\Omega \rightrightarrows E$ l'ensemble de fonctions mesurables de $\Omega \to E$, (7) $MMM(\Omega, E)$ l'ensemble des fonctions de $\Omega \rightrightarrows E$ bornées sur tout compact $X \subseteq \Omega$, (8) $MM(\Omega, E)$ l'ensemble des fonctions de $\Omega \rightrightarrows E$ bornées sur tout borné $X \subseteq \Omega$, (9) $M(\Omega, E)$ l'espace de Banach des fonctions presque bornée $f \in \Omega \rightrightarrows E$, muni de la norme

$$\|f\|_{M(\Omega,E)} = \operatorname*{sup\,ess}_{t\in\Omega} \|f(t)\| .$$

Soit encore $1 \leqq p < \infty$. Alors on désignera par (10) $LLL_p(\Omega, E)$ l'ensemble des fonctions $f \in \Omega \rightrightarrows E$ pour lesquelles $\int_X \|f(\tau)\|^p \,\mathrm{d}\tau < \infty$ sur tout compact $X \subseteq \Omega$, (11) $LL_p(\Omega, E)$ comme (10) avec $\int_X \|f(\tau)\|^p \,\mathrm{d}\tau < \infty$ sur tout borné $X \subseteq \Omega$, (12) $L_p(\Omega, E)$ l'espace de Banach des fonctions $f \in \Omega \rightrightarrows E$ telles que $\int_\Omega \|f(\tau)\|^p \,\mathrm{d}\tau < \infty$, muni de la norme

$$\|f\|_{L_p(\Omega,E)} = \left[\int_\Omega \|f(\tau)\|^p \,\mathrm{d}\tau\right]^{1/p}.$$

Si $E = R$ on omet le symbol R (on écrit $C(\Omega)$ au lieu de $C(\Omega, R)$ etc.) Aussi l'indice p est souvent omis si $p = 1$.

1,8. Soit $N = \{0, 1, \dots\}$ et $d \in \{1, 2, \dots\}$. Les éléments de la puissance cartésienne $N^d = \underset{1}{N} \times \underset{2}{N} \times \dots \times \underset{d}{N}$ seront appelés les multi-indices (de longueur d).

Pour $i \in N^d$, on écrit $|i| = \sum_{v=1}^{d} i_v$. Pour $i, j \in N^d$, $i \leqq j$ signifie $i_v \leqq j_v$, $v = 1, 2, \dots, d$.

Dans les sommes, on écrit souvent $\sum_{|i|=k}$ au lieu de $\sum_{\substack{i \in N^d \\ |i|=k}}$ etc.

1,9. Soient $d \in \{1, 2, \dots\}$ et Ω un ouvert dans R^d. On désignera par $C_0^\infty(\Omega, E)$ l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi \in \Omega \to E$ indéfiniment continûment dérivables au sens classique et aux supports compacts dans Ω (la fermeture de $\{\xi : \varphi(\xi) \neq 0\}$ est une partie compacte de Ω).

On écrit $C_0^\infty(\Omega)$ au lieu de $C_0^\infty(\Omega, R)$.

Si $r \in N^d$ est un multi-indice et $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, E)$, on désignera par $D^r\varphi$ la dérivée partielle $(\partial^{r_1}/\partial\xi_1^{r_1})(\partial^{r_2}/\partial\xi_2^{r_2}) \dots (\partial^{r_d}/\partial\xi_d^{r_d})\, \varphi$ au sens classique.

1,10. Soient $d \in \{1, 2, \dots\}$, Ω un ouvert dans R^d et $r \in N^d$. On dit que une fonction $x \in \Omega \to E$ possède la dérivée r-ième (au sens de Sobolev) si $x \in LLL(\Omega, E)$ et s'il existe une fonction $y \in LLL(\Omega, E)$ telle que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \varphi(\eta)\, x(\eta)\, \mathrm{d}\eta = \int_\Omega (D^r\varphi)(\eta)\, y(\eta)\, \mathrm{d}\eta\,.$$

Cette fonction y sera désignée par $D^r x$.

Il est clair que cette dérivée est déterminée presque partout.

Soit $v = 1, 2, \dots, d$ et $r = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Au lieu de $D^r x$, on écrit souvent $D_v x$ (la dérivée partielle première au sens de Sobolev par rapport à la variable ξ_v).

Soit $m \in \{0, 1, \dots\}$. On dit que une fonction $x \in \Omega \to E$ est m-fois dérivable si elle possède la dérivée r-ième pour tout $r \in N^d$, $|r| \leqq m$.

Dans tout l'article on ne considère que les dérivées au sens de Sobolev, que nous venons de définir.

1,11. Soient $d \in \{1, 2, \dots\}$, Ω un ouvert dans R^d et $m = \{0, 1, \dots\}$. Si $\Phi(\Omega, E)$ est une des familles de 1,7 à l'exception de (1) et (6), on définit la famille $\Phi^{(m)}(\Omega, E)$ comme suit: $x \in \Phi^{(m)}(\Omega, E)$ si et seulement si $D^r x \in \Phi(\Omega, E)$ pour tout $r \in N^d$, $|r| \leqq m$.

Si $\Phi(\Omega, E)$ est en plus un espace de Banach (les cas (4), (5), (9), (12)), on munit $\Phi^{(m)}(\Omega, E)$ de la norme

$$\|x\|_{\Phi^{(m)}(\Omega,E)} = \sum_{|r| \leqq m} \|D^r x\|_{\Phi(\Omega,E)}\,.$$

La fermeture de $C_0^\infty(\Omega, E)$ dans $\Phi^{(m)}(\Omega, E)$ sera désignée par $\mathring{\Phi}^{(m)}(\Omega, E)$.

Comme dans 1,7, on écrit $\Phi^{(m)}(\Omega)$ au lieu de $\Phi^{(m)}(\Omega, R)$ et $\mathring{\Phi}^{(m)}(\Omega)$ au lieu de $\mathring{\Phi}^{(m)}(\Omega, R)$.

En outre, on écrit, comme d'habitude, $W_p^{(m)}(\Omega)$ au lieu de $L_p^{(m)}(\Omega)$ et l'indice $p = 1$ est souvent omis.

1,12. Lemme. *Soit $d \in \{1, 2, \ldots\}$ et Ω un ouvert dans R^d. Pour tout $x \in M^{(1)}(\Omega, E)$, on a*

$$(1)\qquad \|x(\xi_1) - x(\xi_2)\| \leqq \|x\|_{M^{(1)}(\Omega,E)} \|\xi_1 - \xi_2\|$$

pour presque tout $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$.

Preuve. Il est facile de construire une suite $\{\Omega_p\}_1^\infty$ des ouverts

$$(2)\qquad \bigcup_{p=0}^{\infty} \Omega_p = \Omega\,,$$

$$(3)\qquad V\left(\frac{2}{p}, \Omega_p\right) \subseteq \Omega \quad \text{pour tout} \quad p \in \{1, 2, \ldots\}\,,$$

où $V(\varepsilon, K)$ est ε-voisinage de l'ensemble K dans R^d.

Posons maintenant pour $p \in \{1, 2, \ldots\}$

$$(4)\qquad x_p(\xi) = p^d \underbrace{\int_0^{1/p} \ldots \int_0^{1/p}}_{d} x(\xi + \eta)\, d\eta \quad \text{pour} \quad \xi \in \Omega_p\,,$$

$$(5)\qquad x_p(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad \xi \in \Omega \setminus \Omega_p\,.$$

En outre, on écrit pour $p \in \{1, 2, \ldots\}$, $\nu = 1, 2, \ldots, d$,

$$(6)\qquad y_p^{(\nu)}(\xi) = p^d \int_0^{1/p} \ldots \int_0^{1/p} D_\nu x(\xi + \eta)\, d\eta \quad \text{pour} \quad \xi \in \Omega_p\,,$$

$$(7)\qquad y_p^{(\nu)}(\xi) = 0 \quad \text{pour} \quad \xi \in \Omega - \Omega_p\,.$$

Si l'on écrit (4) sous la forme

$$x_p(\xi) = p^d \int_{\xi_1}^{\xi_1 + 1/p} \ldots \int_{\xi_d}^{\xi_d + 1/p} x(\eta)\, d\eta$$

on voit aisément que

$$(8)\qquad x_p \text{ est continue sur } \Omega_p\,, \quad p \in \{1, 2, \ldots\}\,.$$

Par la même méthode, on obtient que

$$(9)\qquad y_p^{(\nu)} \text{ est continue sur } \Omega_p\,, \quad p \in \{1, 2, \ldots\}\,, \quad \nu = 1, 2, \ldots, d\,.$$

De plus, on obtient aisément de (4) que, pour $p \in \{1, 2, \ldots\}$

$$(10)\qquad x_p \text{ est dérivable sur } \Omega_p\,,$$

$$(11)\qquad D_\nu\, x_p(\xi) = y_p^{(\nu)}(\xi)$$

pour presque $\xi \in \Omega_p$, $\nu = 1, 2, \ldots, d$.

Il s'ensuit donc de (8)–(11) que

(12) $$x_p \text{ est continûment dérivable sur } \Omega_p, \quad p \in \{1, 2, \ldots\}.$$

On peut donc utiliser le théorème des accroissements finis et on déduit de (12)

(13) $$\|x_p(\xi_1) - x_p(\xi_2)\| \leqq \|\xi_1 - \xi_2\| \sum_{\nu=1}^{d} \sup_{\xi \in \Omega_p} \|y_p^{(\nu)}(\xi)\|$$

pour tout $\xi_1, \xi_2 \in \Omega_p$.

D'autre part, il résulte du théorème de Luzin que

(14) $$x_p(\xi) \to x(\xi), \quad y_p^{(\nu)}(\xi) \to D_\nu x(\xi) \quad (p \to \infty)$$

presque partout sur Ω.

On déduit aisément de (13) et (14) que

$$\|x(\xi_1) - x(\xi_2)\| \leqq \|\xi_1 - \xi_2\| \sum_{\nu=1}^{d} \|D_\nu f\|_{M(\Omega,E)} \leqq$$
$$\leqq \|\xi_1 - \xi_2\| \, \|x\|_{M^{(1)}(\Omega,E)}$$

pour presuqe tout $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$, ce que implique (1).

1,13. Proposition. *Soit $d \in \{1, 2, \ldots\}$, Ω un ouvert dans R^d et $m \in \{0, 1, \ldots\}$. Pour tout $x \in M^{(m+1)}(\Omega)$ et pour presque tout $\xi_1, \xi_2 \in \Omega$, on a*

(1) $$\|D^r x(\xi_1) - D^r x(\xi_2)\| \leqq \|\xi_1 - \xi_2\| \, \|x\|_{M^{(m+1)}(\Omega,E)}.$$

Le preuve résulte sans peine du lemme 1,12 par récurrence sur m.

Remarque. Il est clair de 1,13 que nos espaces $M^{(m+1)}(\Omega, E)$, $m \in \{0, 1, \ldots\}$, coincident avec les espaces $C^{(m),1}(\bar{\Omega})$ de [4] pour les ouverts bornés $\Omega \subseteq R^d$.

1,14. Proposition. *Soient $U \in \mathfrak{L}^+(E)$ et Q un espace de Banach. Si Q interpole inférieurement l'opérateur U, alors, pour toute $f \in LL(R^+, E)$ et $Uf \in LL(R^+, E)$ $\{f \in CCC(R^+, E)$ et $Uf \in CCC(R^+, E)\}$, on a $f \in LL(R^+, Q)$ $\{f \in CCC(R^+, Q)\}$.*

Preuve. Si $f \in CCC(R^+, E)$ et $Uf \in CCC(R^+, E)$, alors la conclusion $f \in CCC(R^+, Q)$ résulte immediatement de la définition 1,2. Le cas général en découle sans peine si l'on approxime f par les fonctions continues (p. ex. polygonales).

1,15. Proposition. *Soient U, Q comme dans* 1,14. *Si Q interpole supérieurement l'opérateur U, alors, pour tout fonction $f \in LL(R^+, Q)$ $\{CCC(R^+, Q)\}$, on a $f \in LL(R^+, E)$ et $Uf \in LL(R^+, E)$ $\{f \in CCC(R^+, E)$ et $Uf \in CCC(R^+, E)\}$.*

La preuve est analogique à celle de 1,14.

Remarque. Les propositions 1,14 et 1,15 peuvent être généralisées dans divers directions.

1,16. Proposition. *Soit $U \in \mathfrak{L}^+(E)$ et $f \in R^+ \to E$. Si l'opérateur U est fermé, $f \in LL(R^+, E)$ et $Uf \in LL(R^+, E)$, alors, pour tout $\alpha > 0$,*

$$\int_0^\alpha f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(U)\,, \tag{1}$$

$$U\left(\int_0^\alpha f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) = \int_0^\alpha U f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{2}$$

Pour la preuve, voir [9] th. 3.7.12.

1,17. Proposition. *Soient $f \in R^+ \to E$ et $\Phi \in R^+ \to \mathfrak{L}(E)$. Si $f \in LL(R^+, E)$, $\|\Phi(t)\| \leqq 1 + t$ pour tout $t \in R^+$ et la fonction $\Phi(.)\,x$ est continue pour tout $x \in E$, alors*

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^\tau \Phi(\tau - \sigma) f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} \Phi(\sigma) f(\tau)\,\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}\tau = \\ = \int_0^t \int_0^\tau \Phi(\sigma) f(\tau - \sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau &= \int_0^t \left(\int_0^{t-\tau} \Phi(\tau) f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{1}$$

quel que soit $t \in R^+$.

Preuve. Soit $t \in R^+$ et $Z = \{(\sigma, \tau) : 0 < \sigma < \tau < t\}$.

La fonction $\Phi(\tau - \sigma) f(\sigma)$ est évidemment mesurable sur Q et $\|\Phi(\tau - \sigma) f(\sigma)\| \leqq$ $\leqq (1 + (\tau - \sigma))\,\|f(\sigma)\|$ d'où on obtient aisément que $\Phi(\tau - \sigma) f(\sigma)$ est intégrable sur Q. En utilisant le théorème de Fubini, on peut écrire pour tout $t \in R^+$:

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^\tau \Phi(\tau - \sigma)\, f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau &= \int_Z \Phi(\tau - \sigma)\, f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau = \\ = \int_0^t \left(\int_\sigma^t \Phi(\tau - \sigma) f(\sigma)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\sigma &= \int_0^t \left(\int_0^{t-\sigma} \Phi(\tau)\, f(\sigma)\,\mathrm{d}\tau\right)\mathrm{d}\sigma\end{aligned}$$

ce qui est la première ligne de (1).

La seconde se démontre de la même façon et enfin, l'identité

$$\int_0^t \left(\int_0^\tau \Phi(\tau - \sigma)\, f(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}\tau = \int_0^t \int_0^\tau \Phi(\sigma)\, f(\tau - \sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau$$

s'obtient par une substitution linéaire évidente.

2. OPÉRATEURS NON-NÉGATIFS AUTOADJOINTS

2,1. Dans toute la section 2, one se donne un espace de Hilbert H et un opérateur fixe $A \in \mathfrak{L}^+(H)$, non-négatif et autoadjoint, c'est-à-dire

(1) $$\langle Ax, x \rangle \geqq 0 \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathfrak{D}(A) \quad \text{(non-négatif)}.$$

(2) $$A^* = A \quad \text{(autoadjoint)}.$$

2,2. La décomposition spectrale de l'opérateur A sera marquée par $\mathscr{P}$. On trouve, en vertu de 2,1 (2), que la masse de la mesure spectrale $\mathscr{P}$ est concentrée sur $\bar{R}^+$.

Rappelons encore que l'on utilisera souvent dans les démonstrations la théorie des fonctions d'un opérateur autoadjoint, étudiée en détails dans [1], chap. VII. Les démonstrations connues ou aisées seront omises.

2,3. Proposition. *L'opérateur A est fermé et densement défini. Pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I + A$ est biunivoque $(\lambda I + A)^{-1} \in \mathfrak{L}(H)$ et $\|(\lambda I + A)^{-1}\| \leqq \lambda^{-1}$.*

2,4. Soit $\alpha > 0$ et $\lambda \geqq 0$. On définit $(\lambda I + A)^\alpha$ comme suit: $x \in \mathfrak{D}((\lambda I + A)^\alpha)$ si et seulement si $\int_0^\infty (\lambda + \sigma)^{2\alpha} \|P(d\sigma)\, x\|^2 < \infty$; puis on pose

(1) $$(\lambda I + A)^\alpha x = \int_0^\infty (\lambda + \sigma)^\alpha P(d\sigma)\, x .$$

2,5. Proposition. *Pour tout $\lambda \geqq 0$, $(\lambda I + A)^1 = \lambda I + A$.*

2,6. Proposition. *Pour tout $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ et $\lambda \geqq 0$,*

(1) $$(\lambda I + A)^{\alpha+\beta} = (\lambda I + A)^\alpha (\lambda I + A)^\beta .$$

2,7. Proposition. *Pour tout $0 \leqq \beta \leqq \alpha$, $\lambda \geqq 0$,*

(1) $$\mathfrak{D}((\lambda I + A)^\beta) \supseteq \mathfrak{D}((\lambda I + A)^\alpha),$$

(2) $$\|(\lambda I + A)^\beta x\| \leqq \|x\| + \|(\lambda I + A)^\alpha x\|$$

pour tout $x \in \mathfrak{D}((\lambda I + A)^\alpha)$.

2,8. Proposition. *Pour tout $\alpha \geqq 0$ et $\lambda \geqq 0$, les opérateurs $\lambda I + A^\alpha$ et $(\lambda I + A)^\alpha$ sont non-négatifs, autoadjoints, fermés et densement définis. Pour tout $\alpha \geqq 0$ et $\lambda > 0$, les opérateurs $\lambda I + A^\alpha$ et $(\lambda I + A)^\alpha$ sont biunivoques et $[\lambda I + A^\alpha]^{-1}$ et $[(\lambda I + A)^\alpha]^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$.*

2,9. Proposition. *Pour tout* $\alpha \geqq 0$ *et* $\lambda > 0$,

$$(1) \qquad \mathfrak{D}(A^\alpha) = \mathfrak{D}(\lambda I + A^\alpha) = \mathfrak{D}((\lambda I + A)^\alpha)\,,$$

$$(2) \qquad \|x\| \leqq \lambda^{-1}\|(\lambda I + A)^\alpha x\|\,, \quad \|A^\alpha x\| \leqq \lambda^{-1}\|(\lambda I + A)^{-1} x\|\,,$$

$$(3) \qquad \|(\lambda I + A)^\alpha x\| \leqq 2^\alpha \lambda^{-1}(\|x\| + \|A^\alpha x\|)$$

pour tout $x \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$.

2,10. Proposition. *Pour tout* $\lambda \geqq 0$,

$$(1) \qquad [(\lambda I + A)^{1/2}]^2 = \lambda I + A\,,$$

$$(2) \qquad \|(\lambda I + A)^{1/2} x\|^2 = \lambda\|x\|^2 + \langle Ax, x\rangle$$

pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$.

Les preuves des propositions 2,5 – 2,10 sont faciles directement de la définition 2,4 en vertu du calcul opératoire (cfr. 2,2).

2,11. Proposition. *Soient* $f \in R^+ \to H$ *et* $0 \leqq \beta \leqq \alpha$. *Si* $f \in LL(R^+, H)\,.$ $.\,\{CCC(R^+, H)\}$ *et* $A^\alpha f \in LL(R^+, H)\,\{CCC(R^+, H)\}$, *alors* $A^\beta f \in LL(R^+, H)\,.$ $.\,\{CCC(R^+, H)\}$.

Preuve. Pour $f \in CCC(R^+, H)$, c'est une conséquence immédiate de 2,7. Pour $f \in LL(R^+, H)$, on procède comme d'habitude en approximant f par les fonctions de $CCC(R^+, H)$.

2,12. Sur $\mathfrak{D}(A)$, on introduit une nouvelle norme

$$\|x\|_{\mathfrak{F}} = (\|x\|^2 + \langle Ax, x\rangle)^{1/2}$$

qui sera appelée la norme de Friedrichs.

On vérifie sans peine que l'ensemble $\mathfrak{D}(A)$, muni de cette norme, devient un espace préhilbertien.

Comme $\|x\|_{\mathfrak{F}} \geqq \|x\|$, la complétion de $\mathfrak{D}(A)$ peut être immergée dans l'espace H lui-même et cette complétion sera désignée par $\mathfrak{F}(A)$ et appelée l'espace de Friedrichs.

Remarque. Dans 2,12, il s'agit de la construction, bien connue et dûe à Friedrichs.

2,13. Proposition. *Pour l'opérateur* A, *on a*

$$(1) \qquad \mathfrak{F}(A) = \mathfrak{D}(A^{1/2}) = \mathfrak{D}(I + A^{1/2}) = \mathfrak{D}((I + A)^{1/2})\,,$$

$$(2) \qquad \|x\|_{\mathfrak{F}} = (\|x\|^2 + \|A^{1/2}x\|^2)^{1/2} = \|(I + A)^{1/2} x\|\,.$$

P r e u v e. D'abord, en vertu de 2,7 et 2,9 (1)

$$\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(A^{1/2}), \tag{3}$$

$$\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}((I + A)^{1/2}), \tag{4}$$

$$\mathfrak{D}(A^{1/2}) = \mathfrak{D}(I + A^{1/2}) = \mathfrak{D}((I + A)^{1/2}). \tag{5}$$

D'après 2,10

$$\|x\|_{\mathfrak{F}} = (\|x\|^2 + \|A^{1/2}x\|^2)^{1/2} = \|(I + A)^{1/2} x\| \tag{6}$$

pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$.

Maintenant, on va montrer

$$\mathfrak{F}(A) \subseteq \mathfrak{D}(A^{1/2}) = \mathfrak{D}(I + A^{1/2}) = \mathfrak{D}((I + A)^{1/2}), \tag{7}$$

(8) l'identité (6) a lieu pour tout $x \in \mathfrak{F}(A)$.

En effet, soit $x \in \mathfrak{F}(A)$. D'après la définition 2,12 il existe une suite $x_k \in \mathfrak{D}(A)$ telle que $x_k \to x$ dans $\mathfrak{F}(A)$. En vertu de (6) $A^{1/2}x_k$ est convergente et, par conséquent, comme $A^{1/2}$ est fermé d'après 2,8, on a $x \in \mathfrak{D}(A^{1/2})$ ce qui, avec (3) et (4), vérifie (7). Enfin, (8) résulte immédiatement de (6) vu que, d'après 2,8, l'opérateur $(I + A)^{1/2}$ est aussi fermé.

Pour compléter la preuve il suffit de démontrer, en vertu de (5), que

$$\mathfrak{D}((I + A)^{1/2}) \subseteq \mathfrak{F}(A). \tag{9}$$

Soit donc $x \in \mathfrak{D}((I + A)^{1/2})$. Comme $\mathfrak{D}((I + A)^{1/2})$ est dense dans H d'après 2,8, on trouve une suite $y_k \in \mathfrak{D}((I + A)^{1/2})$ telle que $y_k \to (I + A)^{1/2} x$ $(k \to \infty)$. Posons $x_k = [(I + A)^{1/2}]^{-1} y_k$ ce qui est toujours possible d'après 2,8. En conséquence de la même proposition

$$x_k \to x \quad \text{et} \quad (I + A)^{1/2} x_k = y_k \to (I + A)^{1/2} x \quad (k \to \infty). \tag{10}$$

Mais il est clair de la définition de x_k que $x_k \in \mathfrak{D}(((I + A)^{1/2})^2)$ et comme, d'après 2,6 et 2,5, $\mathfrak{D}(((I + A)^{1/2})^2) = \mathfrak{D}(I + A) = \mathfrak{D}(A)$, on a $x_k \in \mathfrak{D}(A)$. Ceci entraîne vu (10) que x_k est convergente aussi dans $\mathfrak{F}(A)$ et, par conséquent $x \in \mathfrak{F}(A)$, d'où (9).

Cela achève la preuve.

R e m a r q u e. Cette proposition est, en principe, connue (cfr. [3], p. 621). Mais notre formulation est un peu plus complète et c'est pourquoi nous avons ajouté la preuve.

3. EQUATIONS D'ÉVOLUTION

N o t e. Dans toute la section 3, on reste dans le cadre des suppositions 2,1.

En outre, $\mathscr{P}$ sera la décomposition spectrale de $A \in \mathfrak{L}^+(H)$ (cfr. 2,2).

3,1. On posera pour $x \in H$, $t \in R^+$

(1) $$\mathscr{E}(t)\, x = \int_{R^+} e^{-t\sigma}\, \mathscr{P}(\mathrm{d}\sigma)\, x + \mathscr{P}(\{0\})\, x\,,$$

(2) $$\mathscr{C}(t)\, x = \int_{R^+} \cos(t\sqrt{\sigma})\, \mathscr{P}(\mathrm{d}\sigma)\, x + \mathscr{P}(\{0\})\, x\,,$$

(3) $$\mathscr{S}(t)\, x = \int_{R^+} \sin(t\sqrt{\sigma})\, \mathscr{P}(\mathrm{d}\sigma)\, x\,.$$

Ces définitions sont bien justifiées. Notons encore, pour plus de sûreté, que $\mathscr{P}(\{0\})$ signifie la masse de la mesure spectrale $\mathscr{P}$ sur l'ensemble $\{0\}$.

3,2. Proposition. *Pour tout* $t \in R^+$,

(1) $$\mathscr{E}(t),\ \mathscr{C}(t),\ \mathscr{S}(t) \in \mathfrak{L}(H)\,,$$

(2) $$\|\mathscr{E}(t)\| \leqq 1\,,\quad \|\mathscr{C}(t)\| \leqq 1\,,\quad \|\mathscr{S}(t)\| \leqq 1\,.$$

3,3. Proposition. *Pour tout* $x \in H$ *et* $t \in R^+$,

(1) *la fonction* $\mathscr{E}(.)\, x$ *est continue*,

(2) $$\mathscr{E}(t)\, x \to x \quad (t \to 0_+)\,,$$

(3) $$\int_0^t \mathscr{E}(\tau)\, x\, \mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

(4) $$A \int_0^t \mathscr{E}(\tau)\, x\, \mathrm{d}\tau = x - \mathscr{E}(t)\, x\,.$$

3,4. Proposition. *Pour tout* $x \in H$ *et* $t \in R^+$

(1) *la fonction* $\mathscr{C}(.)\, x$ *est continue,*

(2) $$\mathscr{C}(t)\, x \to x \quad (t \to 0_+)\,,$$

(3) $$\int_0^t \int_0^\tau \mathscr{C}(\sigma)\, x\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

(4) $$A \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{C}(\sigma)\, x\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau = x - \mathscr{C}(t)\, x\,,$$

(5) $$\int_0^t \mathscr{C}(\tau)\, x\, \mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(A^{1/2})\,,$$

(6) $$A^{1/2}\int_0^t \mathscr{C}(\tau)\,x\,\mathrm{d}\tau = \mathscr{S}(t)\,x\,,$$

(7) *la fonction $\mathscr{S}(.)\,x$ est continue ,*

(8) $$\mathscr{S}(t)\,x \to 0 \quad (t \to 0_+)\,,$$

(9) $$\int_0^t \mathscr{S}(\tau)\,x\,\mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(A^{1/2})\,,$$

(10) $$A^{1/2}\int_0^t \mathscr{S}(\tau)\,x\,\mathrm{d}\tau = x - \mathscr{C}(t)\,x\,.$$

3,5. Proposition. *Pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$ et $t \in R^+$,*

(1) $$\int_0^t \mathscr{E}(\tau)\,Ax\,\mathrm{d}\tau = x - \mathscr{E}(t)\,x\,.$$

3,6. Proposition. *Pour tout $x \in \mathfrak{D}(A^{1/2})$ et $t \in R^+$,*

(1) $$\int_0^t \mathscr{C}(\tau)\,A^{1/2}x\,\mathrm{d}\tau = \mathscr{S}(t)\,x\,,$$

(2) $$\int_0^t \mathscr{S}(\tau)\,A^{1/2}x\,\mathrm{d}\tau = x - \mathscr{C}(t)\,x\,.$$

3,7. Proposition. *Soient $\alpha \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$ et $\mathscr{W} = \mathscr{E}, \mathscr{C}, \mathscr{S}$ resp. Pour tout $x \in \mathfrak{D}((\lambda I + A)^\alpha)$ et $t \in R^+$, on a*

(1) $$\mathscr{W}(t)\,x \in \mathfrak{D}((\lambda I + A)^\alpha)\,,$$

(2) $$(\lambda I + A)^\alpha\,\mathscr{W}(t)\,x = \mathscr{W}(t)\,(\lambda I + A)^\alpha\,x\,.$$

Les preuves de 3,2–3,7 résultent immédiatement du calcul opératoire (cfr. 2,2).

3,8. Proposition. *Soient $u \in R^+ \to H$ et $n \in \{1, 2, \ldots\}$. Si*

(α) $$u \in CCC(R^+, H)\,, \quad u \in LL(R^+, H)$$

(β) $$\int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} u(\tau_n)\,\mathrm{d}\tau_n \ldots \mathrm{d}\tau_1 \in \mathfrak{D}(A)$$

pour tout $t \in R^+$,

(γ) $$u(t) + A\int_0^t \int_0^{\tau_1} \cdots \int_0^{\tau_{n-1}} u(\tau_n)\,\mathrm{d}\tau_n \ldots \mathrm{d}\tau_1 = 0 \quad \textit{pour tout} \quad t \in R^+\,,$$

alors u est identiquement nulle.

P r e u v e. On procède comme chez MAURIN [5] (chap. XVIII, § 2, p. 431) dans le cas $n = 2$. Les détails de cette adaptation seront laissés au lecteur.

3,9. Théorème de l'existence de l'évolution parabolique. *Pour tout* $x \in H$ *et* $h \in LL(R^+, H)$, *il existe une et une seule fonction* $u \in R^+ \to H$, *appelée solution, verifiant*

$$\text{(I)} \qquad u \in LL(R^+, H),$$

$$\text{(II)} \qquad \int_0^t u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(A) \quad \textit{pour tout} \quad t \in R^+,$$

$$\text{(III)} \qquad u(t) + A \int_0^t u(\tau)\, \mathrm{d}\tau = x + \int_0^t h(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

pour tout $t \in R^+$.

3,10. Théorème de la structure de l'évolution parabolique. *Pour tout* $x \in H$, $h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui vérifient* 3,9 (II), (III), *on a*

$$(1) \qquad u \in CCC(R^+, H), \quad u(t) \to x(t \to 0_+),$$

$$(2) \qquad u(t) = \mathscr{E}(t)\, x + \int_0^t \mathscr{E}(t - \tau)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

pour tout $t \in R^+$.

Les p r e u v e s de 3,9 et 3,10 seront données simultanément.

Soient $x \in H$, $h \in LL(R^+, H)$ et soit u la fonction, définie par 3,10 (2).

Il est clair que, en conséquence de 3,2 et 3,3 (1), (2), que (1) a lieu.

Si l'on intègre 3,10 (2) sur $(0, t)$, on obtient

$$(3) \qquad \int_0^t u(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t \mathscr{E}(\tau)\, x\, \mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{E}(\tau - \sigma)\, h(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau$$

pour tout $t \in R^+$.

Il résulte de 3,3 (3), (4) que

$$(4) \qquad \int_0^{t-\tau} \mathscr{E}(\sigma)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\sigma = \mathfrak{D}(A)$$

$$(5) \qquad A \int_0^{t-\tau} \mathscr{E}(\sigma)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\sigma = h(\tau) - \mathscr{E}(t - \tau)\, h(\tau)$$

quelque soit $t \in R^+$, $0 < \tau < t$.

Il est clair, vu 3,2 et 3,3 (1), (2) que l'on peut appliquer la proposition 1,17 d'où, en vertu de (4), (5), 2,3 et 1,16:

$$(6) \qquad \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{E}(\tau - \sigma)\, h(\sigma)\, d\sigma\, d\tau \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

$$(7) \qquad A \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{E}(\tau - \sigma)\, h(\sigma)\, d\sigma\, d\tau = \int_0^t h(\tau)\, d\tau - \mathscr{E}(t - \tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

pour tout $t \in R^+$.

Ceci étant, les identités 3,3 (3), (4) et les formules (1), (3), (6), (7) déjà démontrées, nous permettent de vérifier sans peine les propriétés 3,9 (I)–(III) pour u, défini par 3,10 (2).

L'unicité, découlant facilement de 3,8, complète les preuves de 3,9 et 3,10.

3,11. Théorème de la structure de l'intégrale de l'évolution parabolique. *Pour tout* $x \in H$, $h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui vérifient* 3,9 (II), (III), *on a*

$$(1) \qquad \int_0^t u(\tau)\, d\tau \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

$$(2) \qquad A \int_0^t u(\tau)\, d\tau = x + \int_0^t h(\tau)\, d\tau - \mathscr{E}(t)\, x - \int_0^t \mathscr{E}(t - \tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

pour tout $t \in R^+$.

P r e u v e. On voit sans difficulté que le théorème 3,10 a lieu et donc les énoncées (1), (2) s'ensuivent immédiatement de 3,10 (2) à l'aide de 3,3, 1,16 et 1,17.

3,12. Théorème de la structure de la dérivée de l'évolution parabolique. *Pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A)$, $h \in LL(R^+, H)$, $Ah \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui vérifient* 3,9 (II), (III),

(1) *il existe une dérivée* $u' \in LLL(R^+, H)$ *telle que* $u' - h \in CCC(R^+, H)$

$$\text{et} \quad u'(t) - h(t) \to -Ax (t \to 0_+)\,,$$

$$(2) \qquad u(t) \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

$$(3) \qquad u'(t) + A\, u(t) = h(t)\,,$$

$$(4) \qquad u'(t) = -\mathscr{E}(t)\, Ax - \int_0^t \mathscr{E}(t - \tau)\, A\, h(\tau)\, d\tau + h(t)$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Il est clair que le théorème 3,10 est applicable et donc, on peut exprimer u par la formule 3,10 (2).

En outre, le second membre de (4) définit une fonction que nous désignerons par v. Il est clair de 3,2 et 3,3 (1), (2) que

$$(5) \qquad v \in LL(R^+, H), \quad v - h \in CCC(R^+, H), \\ v(t) - h(t) \to -Ax \quad (t \to 0_+).$$

Nous allons d'abord démontrer que

$$(6) \qquad u(t) - x = \int_0^t v(\tau)\, d\tau \quad \text{pour} \quad t \in R^+.$$

Il résulte de 3,5 (1) que

$$(7) \qquad \int_0^{t-\tau} \mathscr{E}(\sigma)\, A\, h(\tau)\, d\sigma = h(\tau) - \mathscr{E}(t - \tau)\, h(\tau)$$

pour tout $t \in R^+$, $0 < \tau < t$.

Mais la proposition 1,17 nous donne, en vertu de (7), pour tout $t \in R^+$,

$$(8) \qquad \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{E}(\tau - \sigma)\, A\, h(\sigma)\, d(\sigma)\, d\tau = \int_0^t h(\tau)\, d\tau - \int_0^t \mathscr{E}(t - \tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

ce qui avec 3,5 (1) implique (6).

En utilisant (5) et (6), on obtient immédiatement (1) et (4).

Pour obtenir (3), (4), on dérive 3,9 (III) par rapport à t en tenant compte que l'opérateur A est fermé d'après 2,3 et que encore les propriétés 3,9 (I), (II) ont lieu.

La preuve est ainsi complète.

3,13. Théorème de l'existence de l'évolution hyperbolique. *Pour tout $x, y \in H$ et $h \in LL(R^+, H)$, il existe une et une seule fonction $u \in R^+ \to H$, appelée solution, vérifiant*

$$(\mathrm{I}) \qquad u \in LL(R^+, H),$$

$$(\mathrm{II}) \qquad \int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma\, d\tau \in \mathfrak{D}(A) \quad \textit{pour tout} \quad t \in R^+,$$

$$(\mathrm{III}) \qquad u(t) + A\left(\int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma\, d\tau\right) = x + ty + \int_0^t \int_0^\tau h(\sigma)\, d\sigma\, d\tau$$

pour tout $t \in R^+$.

3,14. Théorème de la structure de l'évolution hyperbolique. *Pour* $x, y \in H$, $h \in$ $\in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui vérifient* 3,13 (II), (III), *on a*

(1) $$u \in CCC(R^+, H)\,, \quad u(t) \to x(t \to 0_+)\,,$$

(2) $$u(t) = \mathscr{C}(t)\,x + \int_0^t \mathscr{C}(\tau)\,y\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{C}(\tau - \sigma)\,h(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. On va prouver 3,13 et 3,14 ensemble.

Soit donc u la fonction défini par 3,14 (2). Il est immédiat, en conséquence de 3,2 (2) et 3,4 (1), (2) que (1) a lieu.

En intégrant deux fois 3,14 (2) on obtient pour tout $t \in R^+$

(3) $$\int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{C}(\sigma)\,x\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\sigma \mathscr{C}(\varrho)\,y\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau + \\ + \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\sigma \int_0^\varrho \mathscr{C}(\varrho - \xi)\,h(\xi)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Il résulte de 3,4 (3), (4) que

(4) $$\int_0^{\tau - \sigma} \int_0^\varrho \mathscr{C}(\xi)\,h(\sigma)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\varrho \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

(5) $$A \int_0^{\tau - \sigma} \int_0^\varrho \mathscr{C}(\xi)\,h(\sigma)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\varrho = h(\sigma) - \mathscr{C}(\tau - \sigma)\,h(\sigma)$$

pour tout $\tau \in R^+$, $0 < \sigma < \tau$.

En outre, si l'on écrit d'après 1,17 en vertu de 3,2 et 3,4 (1), (2),

$$\int_0^t \int_0^\tau \int_0^\sigma \int_0^\varrho \mathscr{C}(\varrho - \xi)\,h(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau = \\ = \int_0^t \int_0^\tau \left(\int_0^{\tau - \sigma} \left(\int_0^\varrho \mathscr{C}(\xi)\,h(\sigma)\,\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\,,$$

on obtient de (4), (5), 2,3 et 1,16

(6) $$\int_0^t \int_0^\tau \int_0^\sigma \int_0^{\sigma - \varrho} \mathscr{C}(\xi)\,h(\varrho)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

(7) $$A \int_0^t \int_0^\tau \int_0^\sigma \int_0^{\sigma - \varrho} \mathscr{C}(\xi)\,h(\varrho)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau = \\ = \int_0^t \int_0^\tau h(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau - \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{C}(\tau - \sigma)\,h(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Alors, les relations 3,4 (3) – (4) et les formules (1), (3), (6), (7) déjà démontrées nous permettent de vérifier aisément les propriétés 3,13 (I) – (III) pour u défini par 3,14 (2).

L'unicité, découlant immédiatement de 3,8, nous permet d'achever les preuves tel de 3,13 que de 3,14.

3,15. Théorème de la structure de l'intégrale de l'évolution hyperbolique. *Pour tout* $x, y \in H$, $h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui vérifient* 3,13 (II), (III), *on a*

(1) $$\int_0^t u(\tau)\, d\tau \in \mathfrak{D}(A^{1/2})$$

(2) $$A^{1/2} \int_0^t u(\tau)\, d\tau = \mathscr{S}(t)\, x + \int_0^t \mathscr{S}(\tau)\, y\, d\tau + \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{S}(\tau - \sigma)\, h(\sigma)\, d\sigma\, d\tau$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Comme le théorème 3,14 a évidemment lieu, on déduit (1) (2) aisément de 3,14 (2) à l'aide de 3,4, 1,16 et 1,17.

3,16. Théorème de la structure de l'intégrale seconde de l'évolution hyperbolique. *Pour tout* $x, y \in H$, $h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui vérifient* 3,13 (II), (III), *on a*

(1) $$\int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma\, d\tau \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

(2) $$A \int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma\, d\tau = x + ty + \int_0^t \int_0^\tau h(\sigma)\, d\sigma\, d\tau -$$
$$- \mathscr{C}(t)\, x - \int_0^t \mathscr{C}(\tau)\, y\, d\tau - \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{C}(\tau - \sigma)\, h(\sigma)\, d\sigma\, d\tau$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Il est clair que le théorème 3,14 est applicable et par conséquent, on déduit (1), (2) de 3,14 (2) à l'aide de 3,4, 1,16 et 1,17.

3,17. Théorème de la structure de l'évolution hyperbolique et de sa dérivée première. *Pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A^{1/2})$, $y \in H$, $h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$ *qui vérifient* 3,13 (II), (III), *on a*

(1) $$A^{1/2} u \in CCC(R^+, H)\,, \quad A^{1/2}\, u(t) \to A^{1/2} x \quad (t \to 0_+)\,,$$

(2) $$A^{1/2}\, u(t) = \mathscr{C}(t)\, A^{1/2} x + \mathscr{S}(t)\, y + \int_0^t \mathscr{S}(t - \tau)\, h(\tau)\, d\tau$$

pour tout $t \in R^+$,

(3) *il existe une dérivée u' telle que* $u' \in CCC(R^+, H)$ *et* $u'(t) \to y \ (t \to 0_+)$,

(4)
$$\int_0^t u(\tau)\, \mathrm{d}\tau \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

(5)
$$u'(t) + A\int_0^t u(\tau)\, \mathrm{d}\tau = x + \int_0^t h(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

(6)
$$u'(t) = -\mathscr{S}(t)\, A^{1/2}x + \mathscr{C}(t)\, y + \int_0^t \mathscr{C}(t-\tau)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Comme le théorème 3,14 est évidemment applicable, on peut exprimer la fonction u sous la forme 3,14 (2) et les énoncés (1), (2) en résultent grâce à 3,4, 3,7 et 1,16.

En outre, le second membre de (6) nous définit une fonction que nous allons désigner par v. Il est immédiat de 3,4 (1), (2), (7), (8) que

(7)
$$v \in CCC(R^+, H)\,, \quad v(t) \to y \quad (t \to 0_+)\,.$$

Il importe de démontrer d'abord

(8)
$$u(t) - x = \int_0^t v(\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad \text{pour tout} \quad t \in R^+\,.$$

Mais c'est immédiat de 3,6 (2) et 1,17.

Donc, (7) et (8) impliquent (3) et (6).

Pour obtenir (4), (5), on dérive 3,13 (III) par rapport à t compte tenu que l'opérateur A est fermé d'après 2,3 et que encore les propriétés 3,13 (I), (II) ont lieu.

3,18. Théorème de la structure de la dérivée seconde de l'évolution hyperbolique. *Pour tout* $x \in \mathfrak{D}(A)$, $y \in \mathfrak{D}(A^{1/2})$, $h \in LL(R^+, H)$ $A^{1/2}h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui vérifient* 3,13 (II), (III), *on a*

(1) *il existe une dérivée seconde* $u'' \in LLL(R^+, H)$ *telle que* $u' - h \in CCC(R^+, H)$, $u'(t) - h(t) \to -Ax \ (t \to 0_+)$,

(2)
$$u(t) \in \mathfrak{D}(A)\,,$$

(3)
$$u''(t) + A\, u(t) = h(t)\,,$$

(4)
$$u''(t) = -\mathscr{C}(t)\, Ax - \mathscr{S}(t)\, A^{1/2}y - \int_0^t \mathscr{S}(t-\tau)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\tau + h(t)$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Comme le théorème 3,17 est évidemment applicable, on peut exprimer u' sous la forme 3,17 (6).

En outre, le second membre de (4) nous définit une fonction que nous désignerons par v. Il est clair de 3,4 (1), (2), (7), (8) que

(5) $$v \in LL(R^+, H), \quad v - h \in CCC(R^+, H), \quad v(t) - h(t) \to -Ax \quad (t \to 0_+).$$

Nous démontrons d'abord que

(6) $$u'(t) - y = \int_0^t v(\tau)\, \mathrm{d}\tau \quad \text{pour tout} \quad t \in R^+.$$

Il résulte de 3,6 (2) que

(7) $$\int_0^{t-\tau} \mathscr{S}(\sigma)\, A^{1/2}\, h(\tau)\, \mathrm{d}(\sigma) = h(\tau) - \mathscr{C}(t - \tau)\, h(\tau)$$

pour tout $t \in R^+$, $0 < \tau < t$.

Mais si l'on se sert de 1,17, on déduit de (7) pour tout $t \in R^+$

(8) $$\int_0^t \int_0^\tau \mathscr{S}(\tau - \sigma)\, A^{1/2}\, h(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau = \int_0^t h(\tau)\, \mathrm{d}\tau - \int_0^t \mathscr{C}(t - \tau)\, h(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

ce qui avec 3,6 (1), (2) implique (6).

En utilisant (5) et (6) on obtient immédiatement (1) et (4).

Pour obtenir (2), (3), on dérive 3,17 (6) par rapport a t compte tenu que l'opérateur A est fermé d'après 2,3 et que encore les propriétés 3,6 (1) (2) ont lieu.

La preuve est complète.

3,19. Jusqu'à présent, nous avons étudié les problèmes de Cauchy abstraits de types:

(1) $$u'(t) + A\, u(t) = h(t), \quad u(0_+) = x,$$

(2) $$u''(t) + A\, u(t) = h(t), \quad u(0_+) = x_1, \quad u'(0_+) = x_2,$$

où A est un opérateur non-négatif autoadjoint. Mais ces problèmes ne sont que des cas spéciaux du problème général

(3) $$u^{(n)}(t) + A\, u(t) = h(t), \quad u(0_+) = x_1, \quad u'(0_+) = x_2, \ldots, \quad u^{(n-1)}(0_+) = x_n,$$

A restant l'opérateur non-négatif autoadjoint. Alors la question naturelle se pose si l'on ne peut construire une théorie générale pour (3) qui résoudrait les cas (1), (2) simultanément comme les cas spéciaux du problème (3).

Malheureusement, dans cette voie, on trouve des obstacles très sérieux. C'est en particulier la non-existence de l'intégrale complète de l'équation homogène

$$(4) \qquad u^{(n)}(t) + A\,u(t) = 0\,, \quad u(0_+) = \ldots = u^{(n-2)}(0_+) = 0\,, \quad u^{(n-1)}(0_+) = x$$

pour $n \geqq 3$ (cfr. 3,1).

Ces questions seront élucidées en détails dans l'article [12] qui se trouve en préparation.

Mais ces faits ne sont pas surprenenats du point de vue de physique car on ne connait aucune équation d'ordre trois ou supérieur en temps qui décriverait des phénomènes physiques évolutifs.

4. TRANSPORT DE L'INTERPOLATION SUR L'ÉVOLUTION

Note. Dans toute la section 4, on reste dans le cadre des suppositions 2,1.

4,1. Théorème du transport de l'interpolation sur l'évolution parabolique. *Soient* $\alpha \geqq 0$, *Q un espace de Banach et K_1, K_2 deux constantes. Si*

$$(1) \qquad \mathfrak{D}(A^\alpha) \subseteq Q\,,$$

$$(2) \qquad \|z\|_H + \|A^\alpha z\|_H \leqq K_1 \|z\|_Q\,,$$

$$(3) \qquad \|z\|_Q \leqq K_2(\|z\|_H + \|A^\alpha z\|_H)$$

quel que soit $z \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$,

alors, pour tout $x \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$, $h \in LL(R^+, H)$, $A^\alpha h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui vérifient ensemble les propriétés* 3,9 (II), (III), *on a*

$$(4) \qquad x \in Q\,, \quad h \in LL(R^+, Q)\,,$$

$$(5) \qquad u \in CCC(R^+, Q)\,, \quad u(t) \to x(t \to 0_+) \quad dans \quad Q\,,$$

$$(6) \qquad \|u(t)\|_Q \leqq K_1 K_2 \left[\|x\|_Q + \int_0^t \|h(\tau)\|_Q \,\mathrm{d}\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Soient

$$(7) \qquad x \in \mathfrak{D}(A^\alpha)\,, \quad h \in LL(R^+, H)\,, \quad A^\alpha h \in LL(R^+, H)$$

et $u \in R^+ \to H$ tels que 3,9 (I)–(III) ont lieu.

L'énoncé (4) s'ensuit de (1), (3), (7) et 1,14.

En conséquence de (7), le théorème 3,10 a lieu et on peut exprimer u par la formule 3,10 (2).

A l'aide de (7), 2,8, 3,7 et 1,16, on obtient de 3,10 (2):

(8) $$A^\alpha u(t) = \mathscr{E}(t) A^\alpha x + \int_0^t \mathscr{E}(t - \tau) A^\alpha h(\tau) \, d\tau$$

pour tout $t \in R^+$,

d'où sans peine en vertu de 3,2 et 3,3 (1), (2):

(9) $$A^\alpha u \in CCC(R^+, H), \quad A^\alpha u(t) \to A^\alpha x \quad (t \to 0_+).$$

Alors l'énoncé (5) résulte de (9) et de 3,10 (1) à l'aide de (1), (3) et de la proposition 1,14.

L'inégalité (6) se déduit de (8) et de 3,10 (2) si l'on y fait des estimations d'après (2), (3) et 3,2 (2).

La preuve est complète.

4,2. Théorème du transport de l'interpolation sur l'intégrale de l'évolution parabolique. *Soient* $\alpha \geqq 0$, Q_1, Q_2 *deux espaces de Banach et* K_1, K_2 *deux constantes. Si*

(1) $$\mathfrak{D}(A^\alpha) \subseteq Q_1,$$

(2) $$\|z\|_H + \|A^\alpha z\|_H \leqq K_1 \|z\|_{Q_1},$$

pour tout $x \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$,

(3) $$\mathfrak{D}(A^{\alpha+1}) \subseteq Q_2,$$

(4) $$\|z\|_{Q_2} \leqq K_2(\|z\|_H + \|A^{\alpha+1} z\|_H)$$

pour tout $z \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1})$,

alors, pour tout $x \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$, $h \in LL(R^+, H)$, $A^\alpha h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui satisfont* à 3,9 (II), (III),

(5) $$x \in Q_1, \quad h \in LL(R^+, Q_1),$$

(6) $$\int_0^t u(\tau) \, d\tau \in CCC(R^+, Q_2), \quad \int_0^t u(\tau) \, d\tau \to 0 \quad (t \to 0_+) \quad \textit{dans} \quad Q_2,$$

(7) $$\left\| \int_0^t u(\tau) \, d\tau \right\|_{Q_2} \leqq (2 + t) K_1 K_2 \left[\|x\|_{Q_1} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{Q_1} \, d\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Soient

$$(8) \qquad x \in \mathfrak{D}(A^\alpha), \quad h \in LL(R^+, H), \quad A^\alpha h \in LL(R^+, H)$$

et $u \in R^+ \to H$ tels que 3,9 (I)–(III) ont lieu.

L'énoncé (5) s'ensuit de (8), (1), (2), 2,8, 1,4, 1,3 et 1,14.

Il est, en outre, clair que le théorème 3,11 est applicable. Par conséquent, l'idéntité 3,11 (2) a lieu.

Il en résulte en vertu de (8), 2,8, 3,7 et 1,16:

$$(9) \quad A^{\alpha+1} \int_0^t u(\tau)\,d\tau = A^\alpha x + \int_0^t A^\alpha h(\tau)\,d\tau - \mathscr{E}(t)\,A^\alpha x - \int_0^t \mathscr{E}(t-\tau)\,A^\alpha h(\tau)\,d\tau$$

pour tout $t \in R^+$, d'où sans peine à l'aide de 3,2 et 3,3 (1), (2),

$$(10) \qquad A^{\alpha+1} \int_0^t u(\tau)\,d\tau \in CCC(R^+, H), \quad A^{\alpha+1} \int_0^t u(\tau)\,d\tau \to 0 \quad (t \to 0_+).$$

En outre, il s'ensuit de 3,10 (1) que

$$(11) \qquad \int_0^t u(\tau)\,d\tau \in CCC(R^+, H), \quad \int_0^t u(\tau)\,d\tau \to 0 \quad (t \to 0_+).$$

Alors, (6) résulte facilement de (10) et (11) à l'aide de (3), (4) et 1,14.

En ce qui est de (7), on l'obtient de (9) et 3,11 (2) si l'on y fait des estimations d'après (2), (4) et 3,2 (2).

La preuve est achevée.

4,3. Théorème du transport de l'interpolation sur la dérivée de l'évolution parabolique. *Soient* $\alpha \geqq 0$, Q_1, Q_2 *deux espaces de Banach et* K_1, K_2 *deux constantes. Si*

$$(1) \qquad \mathfrak{D}(A^\alpha) \subseteq Q_1,$$

$$(2) \qquad \|z\|_{Q_1} \leqq K_1(\|z\|_H + \|A^\alpha z\|_H) \quad \textit{pour tout} \quad z \in D(A^\alpha),$$

$$(3) \qquad \mathfrak{D}(A^{\alpha+1}) \subseteq Q_2,$$

$$(4) \qquad \|z\|_H + \|A^{\alpha+1} z\|_H \leqq K_2 \|z\|_{Q_2}$$

pour tout $z \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1})$,

alors, pour tout $x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1})$, $h \in LL(R^+, H)$ $A^{\alpha+1} h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui vérifient* 3,9 (II), (III), *on a*

$$(5) \qquad x \in Q_2, \quad h \in LL(R^+, Q_2),$$

(6) *il existe une dérivée première u' telle que $u' - h \in CCC(R^+, Q_1)$ et $u(t) - h(t) \to -Ax$ $(t \to 0_+)$ dans Q_1,*

$$\|u'(t) - h(t)\|_{Q_1} \leqq K_1 K_2 \left[\|x\|_{Q_2} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{Q_2} \,\mathrm{d}\tau \right] \tag{7}$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Soient

$$x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1}), \quad h \in LL(R^+, H), \quad A^{\alpha+1} h \in LL(R^+, H) \tag{8}$$

et $u \in LL(R^+, H)$ tels que 3,9 (II), (III) ont lieu.

Il est clair que l'énoncé (5) est une conséquence immédiate de (8), (3), (4), 1,3 et 1,14.

Il s'ensuit de 2,7 et 2,11 que

$$x \in \mathfrak{D}(A), \quad Ah \in LL(R^+, H). \tag{9}$$

Vu (9), le théorème 3,12 est applicable et on peut trouver une dérivée $u' \in LLL(R^+, H)$ qui est exprimée par 3,12 (4). Cela entraîne, grâce à (8), 2,8, 3,7 et 1,16:

$$A^\alpha(u'(t) - h(t)) = -\mathscr{E}(t)\, A^{\alpha+1} x - \int_0^t \mathscr{E}(t - \tau)\, A^{\alpha+1}\, h(\tau) \,\mathrm{d}\tau \tag{10}$$

pour tout $t \in R^+$.

Alors, on déduit aisément de (8) et (10) à l'aide de 3,2 et 3,3 (1), (2) que

$$\begin{aligned} &A^\alpha(u' - h) \in CCC(R^+, H), \\ &A^\alpha(u'(t) - h(t)) \to -A^\alpha x \quad (t \to 0_+). \end{aligned} \tag{11}$$

En outre, 3,12 (1) implique

$$u' - h \in CCC(R^+, H), \quad u'(t) - h(t) \to -Ax \quad t \to 0_+ . \tag{12}$$

En vertu de (1), (2) et 1,14, l'énoncé (6) découle de (11) et (12).

Pour démontrer (7), on fait des estimations d'après (2), (4) et 3,2 (2) dans (10) et 3,12 (4).

La preuve est complète.

4,3*. Corollaire. *Si, en plus dans 4,3, $h \in CCC(R^+, H)$ et $A^\alpha h \in CCC(R^+, H)$, alors*

$$h \in CCC(R^+, Q_1), \tag{1}$$

(2) *u' peut être choisie telle que $u' \in CCC(R^+, Q_1)$.*

Preuve. C'est clair de 4,3 (1), (2), de 1,14 et de 4,3 (6).

4,4. Théorème du transport de l'interpolation sur l'évolution hyperbolique. *Soient* α, Q, K_1, K_2 *comme dans* 4,1. *Si les hypothèses de* 4,1 (1) – (3) *ont lieu, alors, pour tout* $x, y \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$, $h \in LL(R^+, H)$, $A^\alpha h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$ *qui vérifient ensemble les conditions* 3,13 (II), (III), *on a*

$$(4) \qquad x, y \in Q\,, \quad h \in LL(R^+, Q)\,,$$

$$(5) \qquad u \in CCC(R^+, Q)\,, \quad u(t) \to x \quad (t \to 0_+) \quad \textit{dans} \quad Q\,,$$

$$(6) \qquad \|u(t)\|_Q \leqq K_1 K_2 \left[[\|x\|_Q + t\|y\|_Q + t \int_0^t \|h(\tau)\|_Q \, \mathrm{d}\tau \right]$$

quel que soit $t \in R^+$.

Preuve. Soient

$$(7) \qquad x, y \in \mathfrak{D}(A^\alpha)\,, \quad h \in LL(R^+, H)\,, \quad A^\alpha h \in LL(R^+, H)$$

et $u \in LL(R^+, H)$ tels que 3,13 (II), (III) ont lieu.

L'énoncé (4) s'ensuit de 4,1 (1), (3), de (7) et de 1,14.

En conséquence de (7), on peut exprimer u sous la forme 3,14 (2) d'où l'on déduit à l'aide de (7), 2,8, 3,7 et 1,16:

$$(8) \qquad A^\alpha u(t) = \mathscr{C}(t)\, A^\alpha x + \int_0^t \mathscr{C}(\tau)\, A^\alpha y \, \mathrm{d}\tau + \int_0^t \int_0^\tau \mathscr{C}(\tau - \sigma)\, A^\alpha\, h(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\, \mathrm{d}\tau$$

pour chaque $t \in R^+$,

d'où il est immédiat en vertu de 3,2 et 3,4 (1), (2),

$$(9) \qquad A^\alpha u \in C(R^+, H)\,, \quad A^\alpha\, u(t) \to A^\alpha x \quad (t \to 0_+)\,.$$

Alors l'énoncé (5) résulte de (9) et 3,14 (1) à l'aide de 4,1 (1), (3) et de la proposition 1,14.

L'inégalité (6) s'obtient de (8) et de 3,14 (2) si l'on y effectue les estimations d'après 4,1 (2), (3) et 3,2 (2).

La preuve est complète.

4,5. Théorème du transport de l'interpolation sur l'intégrale de l'évolution hyperbolique. *Soient* α, Q_1, Q_2, K_1, K_2 *comme dans* 4,1. *Si*

(1) (2) *comme* 4,2 (1), (2),

$$(3) \qquad \mathfrak{D}(A^{\alpha + 1/2}) \subseteq Q_2\,,$$

$$(4) \qquad \|z\|_{Q_2} \leqq K_2(\|z\|_H + \|A^{\alpha + 1/2} z\|_H)$$

pour tout $z \in \mathfrak{D}(A^{\alpha + 1/2})$, *alors, pour tout* $x, y \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$, $h \in LL(R^+, H)$, $A^\alpha h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui satisfont* 3,13 (II), (III), *on a*

$$(5) \qquad x, y \in Q_1\,, \quad h \in LL(R^+, Q_1)\,,$$

$$(6) \qquad \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in CCC(R^+, Q_2)\,, \quad \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0 \quad (t \to 0_+) \quad \text{dans} \quad Q_2\,,$$

$$(7) \qquad \left\|\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{Q_2} \leqq (1 + t)\,K_1K_2\left[\|x\|_{Q_1} + t\|y\|_{Q_1} + t\int_0^t \|h(\tau)\|_{Q_1}\,\mathrm{d}\tau\right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Soient

$$(8) \qquad x, y \in \mathfrak{D}(A^\alpha)\,, \quad h \in LL(R^+, H)\,, \quad A^\alpha h \in LL(R^+, H)$$

et $u \in LL(R^+, H)$ tels que 3,13 (II), (III) ont lieu.

L'énoncé (5) s'ensuit de (1), (2), 1,3 et 1,14.

En vertu de (8), on peut exprimer $A^{1/2} \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ sous la forme 3,15 (2), d'où l'on déduit à l'aide de (8), 2,8, 3,7 et 1,16:

$$(9) \qquad A^{\alpha+1/2}\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathscr{S}(t)\,A^\alpha x + \int_0^t \mathscr{S}(\tau)\,A^\alpha y\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_0^\tau \mathscr{S}(\tau - \sigma)\,A^\alpha\,h(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau$$

pour tout $t \in R^+$, d'où il est immédiat en vertu de 3,2 et 3,4:

$$(10) \qquad A^{\alpha+1/2}\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in CCC(R^+, H)\,, \quad A^{\alpha+1/2}\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0 \quad (t \to 0_+)\,.$$

En outre il s'ensuit de 3,14 (1) que

$$(11) \qquad \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in CCC(R^+, H)\,, \quad \int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0 \quad (t \to 0_+)\,.$$

Alors (6) résulte de (10) et (11) grâce à (1), (2), 1,3 et 1,14.

L'inégalité (7) découle de (9) et 3,15 (2) à l'aide des estimations (2), (4) et de 3,3 (2).

La preuve est complète.

4,6. Théorème du transport de l'interpolation sur l'intégrale seconde de l'évolution hyperbolique. *Soient* α, Q_1, Q_2, K_1, K_2 *comme dans* 4,2. *Si les hypothèses de* 4,2 *ont lieu, alors, pour tout* $x, y \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$, $h \in LL(R^+, H)$, $A^\alpha h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui satisfont à* 3,13 (II)−(III), *on a*

$$(5) \qquad x, y \in Q_1\,, \quad h \in LL(R^+, Q_1)\,,$$

(6) $\displaystyle\int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma\, d\tau \in CCC(R^+, Q_2)\,, \quad \int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma\, d\tau \to 0 \quad (t \to 0_+) \quad \text{dans} \quad Q_2\,,$

(7) $$\left\| \int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma\, d\tau \right\|_{Q_2} \leqq (2 + t)\, K_1 K_2 \left[\|x\|_{Q_1} + t\|y\|_{Q_1} + t \int_0^t \|h(\tau)\|_{Q_1}\, d\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$.

La preuve est tout-à-fait analogue à celle de 4,5, mais on utilise 3,16 au lieu de 3,15.

4,7. Théorème du transport de l'interpolation sur l'évolution hyperbolique et sur sa dérivée première. *Soient* α, Q_1, Q_2, K_1, K_2 *comme dans* 4,3. *Si*

(1), (2) *comme* 4,3 (1), (2),

(3) $$\mathfrak{D}(A^{\alpha+1/2}) \subseteq Q_2\,,$$

(4) $$\|z\|_H + \|A^{\alpha+1/2}z\|_H \leqq K_2\|x\|_{Q_2}$$

pour tout $z \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1/2})$,

alors, pour tout $x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1/2})$, $y \in \mathfrak{D}(A^\alpha)$, $h \in LL(R^+, H)$, $A^\alpha h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui vérifient* 3,13 (II)–(III), *on a*

(5) $$x \in Q_2\,, \quad y \in Q_1\,, \quad h \in LL(R^+, Q_1)\,,$$

(6) $$u \in CCC(R^+, Q_2)\,, \quad u(t) \to x \ (t \to 0_+) \quad \text{dans} \quad Q_2\,,$$

(7) $$\|u(t)\|_{Q_2} \leqq K_1 K_2 \left[\|x\|_{Q_2} + \|y\|_{Q_1} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{Q_1}\, d\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$,

(8) *il existe une dérivée* $u' \in LLL(R^+, L_2(\Omega))$ *telle que* $u' \in CCC(R^+, Q_1)$ *et* $u'(t) \to y$ $(t \to 0_+)$ *dans* Q_1,

(9) $$\|u'(t)\|_{Q_1} \leqq K_1 K_2 \left[\|x\|_{Q_2} + \|y\|_{Q_1} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{Q_1}\, d\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Soient

(10) $$x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1/2})\,, \quad y \in \mathfrak{D}(A^\alpha)\,, \quad h \in LL(R^+, H)\,, \quad A^\alpha(h) \in LL(R^+, H)$$

et $u \in LL(R^+, H)$ tels que 3,13 (II), (III) ont lieu.

L'enoncé (5) est une conséquence immédiate de (3), (4), (10), 1,3 et 1,14.

En outre, il s'ensuit de 2,7 et 2,11 que

(11) $$x \in \mathfrak{D}(A^{1/2})\,.$$

Vu (10), le théorème 3,17 est applicable et on peut exprimer $A^{1/2}u$ et u', grâce à 3,17 (2) et (6), 3,7 et 1,16, sous la forme

$$(12) \qquad A^{\alpha+1/2}\,u(t) = \mathscr{C}(t)\,A^{\alpha+1/2}\,u(t) + \mathscr{S}(t)\,A^{\alpha}y + \int_0^t \mathscr{S}(t-\tau)\,A^{\alpha}\,h(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

$$(13) \qquad A^{\alpha}\,u'(t) = -\mathscr{S}(t)\,A^{\alpha+1/2}\,u(t) + \mathscr{C}(t)\,A^{\alpha}y + \int_0^t \mathscr{C}(t-\tau)\,A^{\alpha}\,h(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

pour tout $t \in R^+$, d'où on déduit en vertu de (10), 3,2 et 3,4

$$(14) \qquad A^{\alpha+1/2}u \in CCC(R^+, H)\,, \quad A^{\alpha+1/2}\,u(t) \to A^{\alpha+1/2}x \quad (t \to 0_+)\,,$$

$$(15) \qquad A^{\alpha}u' \in CCC(R^+, H)\,, \qquad A^{\alpha}\,u'(t) \to A^{\alpha}x \quad (t \to 0_+)\,.$$

Alors (6) et (8) résultent de (14) et (15) en vertu de (1)–(4), 1,3 et 1,14.

D'autre part (7) et (9) découlent de (12), (13) et 3,17 (2), (6) si l'on estime d'après (2), (4) et 3,2 (2).

La preuve est complète.

4,8. Théorème du transport de l'interpolation sur la dérivée seconde de l'évolution hyperbolique. *Soient* $\alpha \geqq 0$, Q_1, Q_2, Q_3 *trois espaces de Banach et* K_1, K_2, K_3 *trois constantes. Si*

$$(1) \qquad \mathfrak{D}(A^{\alpha}) \subseteq Q_1\,,$$

$$(2) \qquad \|z\|_{Q_1} \leqq K_1(\|z\|_H + \|A^{\alpha}z\|_H)$$

pour tout $z \in \mathfrak{D}(A^{\alpha})$,

$$(3) \qquad \mathfrak{D}(A^{\alpha+1/2}) \subseteq Q_2\,,$$

$$(4) \qquad (\|z\|_H + \|A^{\alpha+1/2}z\|_H) \leqq K_2\|z\|_{Q_2}$$

pour tout $z \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1/2})$,

$$(5) \qquad \mathfrak{D}(A^{\alpha+1}) \subseteq Q_3\,,$$

$$(6) \qquad (\|z\|_H + \|A^{\alpha+1}z\|_H) \leqq K_3\|z\|_{Q_3}$$

pour tout $z \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1})$,

alors, pour tout $x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1})$, $y \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1/2})$, $h \in LL(R^+, H)$, $A^{\alpha+1/2}h \in LL(R^+, H)$ *et* $u \in LL(R^+, H)$, *qui vérifient* 3,13 (II), (III), *on a*

$$(7) \qquad x \in Q_3\,, \quad y \in Q_2\,, \quad h \in LL(R^+, Q_2)\,,$$

(8) *il existe une dérivée seconde u'' telle que $u'' - h \in CCC(R^+, H)$ et $u''(t) - h(t) \to Ax$ $(t \to 0_+)$,*

(9) $$\|u''(t) - h(t)\|_{Q_1} \leqq K_1 K_3 \|x\|_{Q_3} + K_1 K_2 \left[\|y\|_{Q_2} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{Q_2} \, d\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Preuve. Soient

(10) $x \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1})$, $y \in \mathfrak{D}(A^{\alpha+1/2})$, $h \in LL(R^+, H)$, $A^{\alpha+1/2}h \in LL(R^+, H)$, et $u \in LL(R^+, H)$ tels que 3,13 (II), (III) ont lieu.

Il est facile à voir que (3)–(6), (10), 1,3 et 1,14 impliquent (7).
Il s'ensuit de 2,7 et 2,11

(11) $$x \in \mathfrak{D}(A), \quad y \in \mathfrak{D}(A^{1/2}), \quad A^{1/2}h \in LL(R^+, H).$$

Vu (11), on peut appliquer le théorème 3,18 et exprimer u'' sous la forme 3,18 (4) ce qui implique en vertu de 3,7 et 1,16:

(12) $$A^\alpha u''(t) - A^\alpha h(t) = -\mathscr{C}(t) A^{\alpha+1}x - \mathscr{S}(t) A^{\alpha+1/2}y - \int_0^t \mathscr{S}(t - \tau) A^{\alpha+1/2} h(\tau) \, d\tau$$

pout tout $t \in R^+$.
Alors, on obtient de (10) et (12) en vertu de 3,2 et 3,4

(13) $$A^\alpha(u'' - h) \in CCC(R^+, H), \quad A^\alpha(u''(t) - h(t)) \to 0 \ (t \to 0_+).$$

En outre, d'après 3,18 (1),

(14) $$u'' - h \in CCC(R^+, H), \quad u''(t) - h(t) \to 0 \ (t \to 0_+).$$

Maintenant, (8) résulte de (13), (14) en vertu de (1)–(6), 1,3 et 1,14.
Enfin, (9) s'ensuit de (12) et 3,18 (4) à l'aide des inégalités (2), (4), (6).
Cela achève la preuve.

4,8*. Corollaire. *Si, en plus dans 4,8, $h \in CCC(R^+, H)$ et $A^\alpha h \in CCC(R^+, H)$, alors*

(1) $$h \in CCC(R^+, H)$$

(2) *u'' peut être choisie telle que $u'' \in CCC(R^+, H)$.*

Preuve. Une conséquence immédiate de 4,8 (1), (2), 1,14 et 4,8 (8).

Remarque. Les hypothèses (1), (2) dans les théorèmes 4,1–4,8 décrivent l'interpolation de certaines puissances de l'opérateur A (cfr. 1,2) et il s'agit vraiment du comportement des solutions d'évolution relativement aux espaces interpolants.

5,1. Soient $\chi \in \{0, 1, \ldots\}$, $\{E_r\}_0^\chi$ une suite finie d'espaces de Banach. On dit que la suite $\{E_r\}_0^\chi$ est une échelle (d'espaces de Banach) dans l'espace E si

(I) la suite $\{E_r\}_0^\chi$ est non-croissante,

(II) $\|x\|_{E_r} \leqq \|x\|_{E_{r+1}}$ pour tout $0 \leqq r \leqq \chi - 1$ et $x \in E_{r+1}$,

(III) $E_0 = E$.

5,2. Soient $V \in \mathfrak{L}^+(E)$, $\varrho, \varkappa \in \{0, 1, \ldots\}$ et $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$ une échelle dans E. On dit que l'opérateur V est $(\varrho, \varkappa)$-transitif relativement à l'échelle $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$ si

(I) $x \in \mathfrak{D}(V)$ et $x \in E_{\varrho+\alpha}$ entraîne $Vx \in E_\alpha$ quelque soit $\alpha = 0, 1, \ldots, \varkappa$,

(II) il existe une constante b telle que, quel que soit $\alpha = 0, 1, \ldots, \varkappa$, $x \in \mathfrak{D}(V)$ et $x \in E_{\varrho+\alpha}$,

on a

$$\|Vx\|_{E_\alpha} \leqq b\|x\|_{E_{\varrho+\alpha}}.$$

5,3. Proposition. *Soient $V, \varrho, \varkappa$ et $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$ comme dans 5,2 et, en outre $\mu \in R$. Si l'opérateur V est $(\varrho, \varkappa)$ – transitif relativement à l'échelle $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$, alors $\mu I + V$ est $(\varrho, \varkappa)$ – transitif relativement à $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$.*

5,4. Proposition. *Soient $V, \varrho, \varkappa$ et $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$ comme dans 5,2 et $\varkappa_0 \in \{0, 1, \ldots\}$, $0 \leqq \varkappa_0 \leqq \varkappa$. Si l'opérateur V est $(\varrho, \varkappa)$-transitif relativement à l'échelle $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$, alors il est aussi $(\varrho, \varkappa_0)$-transitif relativement à $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa_0}$.*

5,5. Soient $V \in \mathfrak{L}^+(E)$, $\varrho, \varkappa \in \{0, 1, \ldots\}$ et $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$ une échelle dans E. On dit que l'opérateur V est $(\varrho, \varkappa)$ – réactif relativement à l'échelle $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$ si

(I) $x \in \mathfrak{D}(V)$ et $Vx \in E_\alpha$ entraîne $x \in E_{\varrho+\alpha}$ quel que soit $\alpha = 0, 1, \ldots, \varkappa$,

(II) il existe une constante c telle que, quel que soit $\alpha = 0, 1, \ldots, \varkappa$, $x \in \mathfrak{D}(V)$ et $Vx \in E_\alpha$, on a

$$\|x\|_{E_{\varrho+\alpha}} \leqq c\|Vx\|_{E_\alpha}.$$

5,6. Proposition. *Soient $V, \varrho, \varkappa$ et $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$ comme dans 5,5 et, en outre, $\varkappa_0 \in \{0, 1, \ldots\}$, $0 \leqq \varkappa_0 \leqq \varkappa$. Si l'opérateur V est $(\varrho, \varkappa)$-réactif relativement à l'échelle $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$, alors il est aussi $(\varrho, \varkappa_0)$-réactif relativement à l'échelle $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa_0}$.*

5,7. Lemme de l'interpolation des puissances. *Soient* $U \in \mathfrak{L}^+(E)$, k, $l \in \{0, 1, \ldots\}$ *et* $\{E_r\}_0^{k(l+2)}$ *une échelle dans E. Si*

(1) $$\mathfrak{D}(U) \subseteq E_k \,,$$

(2) *il existe deux constantes* $0 < \bar{K} \leqq \bar{L}$ *telles que, pour tout* $x \in \mathfrak{D}(U)$,

$$\bar{K}\|x\|_{E_k} \leqq \|Ux\|_E \leqq \bar{L}\|x\|_{E_k} \,,$$

(3) *l'opérateur* U^2 *est* $(2k, kl)$*-transitif et* $(2k, kl)$*-réactif relativement à l'échelle* $\{E_r\}_0^{k(l+2)}$,

alors, quel que soit $q = 0, 1, \ldots, l + 2$,

(4) $$\mathfrak{D}(U^q) \subseteq E_{kq} \,,$$

(5) *il existe deux constantes* $0 < \bar{K}_q \leqq \bar{L}_q$ *telles que, pour tout* $x \in \mathfrak{D}(U^q)$,

$$\bar{K}_q\|x\|_{E_{kq}} \leqq \|U^q x\|_E \leqq \bar{L}_q\|x\|_{E_{kq}} \,.$$

Preuve. Prenant $\varrho = 2k$, $\varkappa = lk$ et $V = U^2$ dans 5,2 et 5,5, on en obtient en vertu de l'hypothèse (3):

(6) $$E_{2k+m} \subseteq \mathfrak{D}(U^2) \quad \text{pour tout} \quad m = 0, 1, \ldots, lk \,,$$

(7) $$U^2 \text{ transforme } E_{2k+m} \text{ sur } E_m \text{ pour tout } m = 0, 1, \ldots, 2l \,,$$

(8) il existe deux constantes $0 < \hat{K} \leqq \hat{L}$ telles que, quel que soit $m = 0, 1, \ldots, lk$ et $x \in E_{2k+m}$, on a

$$\hat{K}\|x\|_{2k+m} \leqq \|U^2 x\|_{E_m} - \hat{L}\|x\|_{E_{2k+m}} \,.$$

Notons seulement que la suite $\{E_r\}_0^{2k+l}$ est non-croissante d'après 5,1 (I) et que visiblement $E_{2k} \subseteq \mathfrak{D}(U^2)$, car $E_0 = E$ d'après 5,1 (III). Les autres énoncés resultent immédiatement de 5,2 (I), (II) et 5,5 (I), (II).

Retournons à la preuve elle-même du théorème. On procède par récurrence finie sur $q = 0, 1, \ldots, l + 2$.

Le cas $q = 0$ est trivial avec $\bar{K}_0 = \bar{L}_0 = 1$.

Pour $q = 1$, les énoncés (4), (5) ne sont que les hypothèses (1), (2), il suffit de prendre $\bar{K}_1 = \bar{K}, \bar{L}_1 = \bar{L}$,

Ceci étant, il est clair que, pour compléter la preuve des énoncés (4), (5), il suffira d'établir le critère suivant:

(C) les énoncés (4), (5) étant valables pour un q, $0 \leqq q \leqq l$, ils sont aussi valables pour $q + 2$.

Supposons donc que les énoncés (4), (5) soient déjà vérifiés pour un tel $0 \leqq q \leqq l$. Posons $m = kq$ dans (6), (7), (8) ce qui est admissible car $kq \leqq kl$. Par conséquent

$$E_{2k+kq} \subseteq \mathfrak{D}(U^2), \tag{9}$$

$$U^2 \text{ transforme } E_{2k+kq} \text{ sur } E_{kq}, \tag{10}$$

$$\hat{K}\|x\|_{E_{2k+kq}} \leqq \|U^2x\|_{E_{kq}} \leqq \hat{L}\|x\|_{E_{2k+kq}} \tag{11}$$

quel que soit $x \in E_{2k+kq}$.

On voit clair de (4), (5) qui sont supposés vrais et de (9), (10), (11) que

$$\mathfrak{D}(U^{q+2}) \subseteq E_{k(q+2)},$$

$$K_q\hat{K}\|x\|_{E_{k(q+2)}} \leqq \|U^{q+2}x\|_E \leqq L_q\hat{L}\|x\|_{E_{k(q+2)}}$$

quel que soit $x \in E_{k(q+2)}$, ce qui vérifie le critère (C).

La peuve est ainsi toute faite.

5,8. Théorème de l'interpolation des puissances. *Soient $A \in \mathfrak{L}^+(H)$, $k, l \in \{0, 1, \ldots\}$ et $\{E_r\}_0^{k(l+2)}$ une échelle dans H. Si*

(1) *l'opérateur A est non-négatif autoadjoint,*

(2) *$\mathfrak{D}(A)$ est dense dans E_k,*

(3) *il existe deux constantes $0 < \bar{K} \leqq \bar{L}$ telles que, pour tout $x \in \mathfrak{D}(A)$,*

$$\hat{K}\|x\|_{E_k} \leqq [\|x\|_H^2 + \langle Ax, x\rangle_H]^{1/2} \leqq \hat{L}\|x\|_{E_k},$$

(4) *l'opérateur A est $(2k, kl)$-transitif et l'opérateur $I + A$ est $(2k, kl)$-réactif relativement à l'échelle $\{E_r\}_0^{k(l+2)}$,*

alors, quel que soit $q = 0, 1, \ldots, l + 2$, l'espace E_{kq} interpole l'opérateur $A^{q/2}$.

Preuve. Ecrivons $U = (I + A)^{1/2}$ (cfr. (1)) et vérifions les conditions (1)–(3) de 5,7.

Les conditions (1), (2) de 5,7 découlent de nos (2), (3) en vertu de la proposition 2,13.

La condition (3) de 5,7 est une conséquence immédiate de notre (4) en vertu de 5,3.

Ceci étant, on conclut de 5,7 que

$$\mathfrak{D}((I + A)^{q/2}) \subseteq E_{kq} \tag{5}$$

(6) il existe deux constantes $0 < \bar{K}_q \leqq \bar{L}_q$ telles que, quel que soit $x \in \mathfrak{D}((I + A)^{q/2})$,

$$\bar{K}_q\|x\|_{E_{kq}} \leqq \|(I + A)^{q/2}\, x\|_E \leqq \bar{L}_q\|x\|_{E_{kq}}.$$

L'énoncé du théorème résulte de (5), (6) à l'aide de 2,9 (cfr. la définition 1,2).

6,1. On se donne pour la section 6 les suppositions suivantes:

(H_1) un entier $d \in \{1, 2, \ldots\}$ fixe,

(H_2) un ouvert $\Omega \subseteq R^d$, non nécessairement borné,

(H_3) un entier $k \in \{1, 2, \ldots\}$ fixe,

(H_4) un système des fonctions $a_{ij} \in \Omega \to R$, $i, j \in N^d$, $|i| = |j| \leqq k$,

(H_5) $\sum_{|i|=|j|\leqq k} a_{ij}(\xi)\, \eta_i \eta_j \geqq 0$, pour tout $\xi \in \Omega$ et pour tous les nombres $\eta_i \in R$, $i \in N^d$, $|i| \leqq k$,

(H_6) une constante $\vartheta > 0$,

(H_7) $\sum_{|i|=|j|=k} a_{ij}(\xi)\, \eta_i \eta_j \geqq \vartheta \sum_{|i|=k} \eta_i^2$, pour tout $\xi \in \Omega$ et tous les nombres $\eta_i \in R$, $i \in N^d$, $|i| = k$,

(H_8) $a_{ij}(\xi) = a_{ji}(\xi)$ pour $\xi \in \Omega$, $i, j \in N^d$, $|i| = |j| \leqq k$.

6,2. On associe aux données de 6,1 un opérateur $\mathbf{D} \in \mathfrak{L}^+(L_2(\Omega))$ de la façon suivante: $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D})$ si et seulement si

(I) $x \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$,

(II) pour tout $|i| = |j| \leqq k$, on a $a_{ij} D^j x \in LLL(\Omega)$,

(III) il existe un $y \in L_2(\Omega)$ tel que, quel que soit $z \in C_0^\infty(\Omega)$,

(1) $$\sum_{|i|=|j|\leqq k} \langle a_{ij} D^j x,\, D^i z \rangle_{L_2(\Omega)} = \langle y, z \rangle_{L_2(\Omega)}\,.$$

Puis, on pose $\mathbf{D}x = y$.

Remarque. Dorénavant, $\mathbf{D}$ désignera toujours l'opérateur que nous venons de définir. Il s'agit donc du problème de Dirichlet pour les données de 6,1 (la condition aux limites est $\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$).

6,3. Lemme. *Pour tout $x \in C_0^\infty(R^d)$ et $\nu = 1, 2, \ldots, d$, on a*

(1) $$\|D_\nu x\|^2_{L_2(R^d)} = -\int_{R^d} x(\eta)\, D_\nu^2\, x(\eta)\, \mathrm{d}\eta\,.$$

6,4. Lemme de Nirenberg. *Pour tout $x \in C_0^\infty(R^d)$, $\varepsilon > 0$ et $m \in \{0, 1, \ldots\}$,*

(1) $$\sum_{|p|=m} \|D^p x\|^2_{L_2(R^d)} \leqq \frac{d^{m(m+1)}}{\varepsilon^m} \|x\|^2_{L_2(R^d)} + \varepsilon \sum_{|q|=m+1} \|D^q x\|_{L_2(R^d)}\,.$$

La preuve par récurrence sur m en vertu de 6,3.

6,5. Lemme. *Pour tout* $x \in C_0^\infty(R^d)$, $\varepsilon > 0$ *et* $m \in \{0, 1, \ldots\}$,

$$(1)\quad \|x\|^2_{W_2^{(m)}(R^d)} \leqq 2^{m+1}\left(2^{m+1}d^{m^2} + \frac{d^{m(m+1)}}{\varepsilon^m}\right)\|x\|^2_{L_2(R^d)} + \varepsilon \sum_{|p|=m+1} \|D^p x\|^2_{L_2(R^d)}\,.$$

La preuve par récurrence sur m en vertu de 6,4.

6,6. Proposition. *Il existe une constante c telle que, quel que soit* $x \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$, *on a*

$$(1)\qquad \|x\|^2_{W_2^{(k)}(\Omega)} \leqq c\big[\|x\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{|i|=k} \|D^i x\|^2_{L_2(\Omega)}\big]\,.$$

Preuve. Pour $x \in C_0^\infty(\Omega)$, cela résulte immédiatement de 6,5 en écrivant

$$\|x\|^2_{W_2^{(k)}(\Omega)} = \|x\|^2_{W_2^{(k)}(R^d)} = \|x\|^2_{W_2^{(k-1)}(R^d)} + \sum_{|i|=k} \|D^i x\|^2_{L_2(R^d)}\,.$$

Pour $x \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ général, on étend (1) par continuité, car $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$.

6,7. Théorème fondamental des opérateurs elliptiques. *Si* $a_{ij} \in M(\Omega)$, *alors*

(I) *l'opérateur* $\boldsymbol{D}$ *est non-négatif autoadjoint,*

(II) $\mathfrak{D}(\boldsymbol{D})$ *est dense dans* $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$,

(III) *il existe deux constantes* $0 < \bar{a} \leqq \bar{\bar{a}}$ *telles que, quel que soit* $x \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{D})$,

$$\bar{a}\|x\|_{W_2^{(k)}(\Omega)} \leqq \big[\|x\|^2_{L_2(\Omega)} + \langle \boldsymbol{D}x, x\rangle_{L_2(\Omega)}\big]^{1/2} \leqq \bar{\bar{a}}\|x\|_{W_2^{(k)}(\Omega)}\,.$$

Preuve. On définit pour $x \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$:

$$(1)\qquad |\!|\!| x |\!|\!| = \big[\|x\|^2_{L_2(\Omega)} + \sum_{|i|=|j|=k} \langle a_{ij}D^j x, D^i x\rangle_{L_2(\Omega)}\big]^{1/2}$$

et pour $x, y \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$:

$$(2)\qquad \langle\!\langle x, y\rangle\!\rangle = \langle x, y\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{|i|=|j|\leqq k} \langle a_{ij}D^j x, D^i y\rangle_{L_2(\Omega)}\,.$$

On vérifie aisément en utilisant 6,1 (H_5), (H_8) que la norme (1) et le produit scalaire représentent sur $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$, une structure préhilbertienne. Cet espace préhilbertien sera désigné par Γ.

Maintenant, on démontre qu'il existe une constante $\bar{a} > 0$ telle que

$$(3)\qquad |\!|\!| x |\!|\!| \geqq \bar{a}\|x\|_{W_2^{(k)}(\Omega)} \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)\,.$$

On obtient d'abord de (1) et 6,1 (H_6) et (H_7)

$$|\!|\!| x |\!|\!|^2 \geqq \|x\|^2_{L_2(\Omega)} + \vartheta \sum_{|i|=k} \|D^i x\|^2_{L_2(\Omega)}$$

ce qui donne avec 6,6 l'inégalité (3).

D'autre part, comme $a_{ij} \in M(\Omega)$ on obtient aisément qu'il existe une constante $\bar{a}$ telle que

(4) $$\lVert\lvert x \rvert\rVert \leqq \bar{a} \lVert x \rVert_{W_2^{(k)}(\Omega)},$$

quel que soit $x \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$.

Il s'ensuit de (3) et (4) que

(5) Γ est un espace de Hilbert.

Rappelons encore

(6) $$\mathfrak{D}(\mathbf{D}) = \mathfrak{D}(I + \mathbf{D}) \subseteq \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega).$$

Vu la définition 6,2, on déduit aisément de l'hypothèse $a_{ij} \in M(\Omega)$ et de (5), (6) que

(7) pour que $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D})$, il faut et il suffit que $x \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ et qu'il existe un $y \in L_2(\Omega)$ telle que $\langle\langle x, z\rangle\rangle = \langle y, z\rangle_{L_2(\Omega)}$ pour tout $z \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$; ensuite $(I + \mathbf{D})\, x = y$.

Par conséquent

(8) $$\langle (I + \mathbf{D})\, x, x\rangle_{L_2(\Omega)} = \lVert\lvert x \rvert\rVert^2, \quad \langle (I + \mathbf{D})\, x, y\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle\langle x, y\rangle\rangle$$

quel que soit $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D})$, $y \in L_2(\Omega)$.

Maintenant, on va établir

(9) $I + \mathbf{D}$ est biunivoque.

En effet, soit $(I + \mathbf{D})\, x = 0$. D'après (8) $0 = \langle (I + \mathbf{D})\, x, x\rangle_{L_2(\Omega)} = \lVert\lvert x \rvert\rVert^2$ ce qui entraîne, en vertu de (3), $x = 0$.

(10) $$\mathfrak{R}(I + \mathbf{D}) = L_2(\Omega).$$

Pour le voir, soit $y \in L_2(\Omega)$. Le produit $\langle y, z\rangle_{L_2(\Omega)}$ définit une fonctionnelle linéaire continue sur $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ et, en conséquence de (3), aussi sur Γ. Cela implique, compte tenu de (5), l'existence d'un $x \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ tel que $\langle\langle x, z\rangle\rangle = \langle y, z\rangle_{L_2(\Omega)}$, pour tout $z \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$. Mais cela signifie, d'après (7), que $x \in \mathfrak{D}(I + \mathbf{D})$ et $(I + \mathbf{D})\, x = y$.

(11) $\mathfrak{D}(I + \mathbf{D})$ est dense dans $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$.

Selon (3) et (4), il suffit de démontrer que $\mathfrak{D}(I + \mathbf{D})$ est dense dans Γ. Supposons que cela ne soit pas vrai. Alors il existerait un $z \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$, $z \neq 0$ tel que $\langle\langle x, z\rangle\rangle = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{D}(I + \mathbf{D})$, i.e., d'après (7), $\langle (I + \mathbf{D})\, x, z\rangle_{L_2(\Omega)} = 0$ pour tout $x \in \mathfrak{D}(I + \mathbf{D})$. Mais, en conséquence de (10), $z = 0$ ce qui contredit notre supposition faite ci-dessus: $z \neq 0$.

(12) $I + \mathbf{D}$ est symétrique.

Conséquence immédiate de (8).

(13) $$\|(I + \mathbf{D})\, x\|_{L_2(\Omega)} \geqq \|x\|_{L_2(\Omega)} \quad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{D}(I + \mathbf{D})\,.$$

Soit $x \in \mathfrak{D}(I + \mathbf{D})$, $x \neq 0$. En vertu de (8) et (1)

$$\|(I + \mathbf{D})\, x\|_{L_2(\Omega)} \geqq (\|x\|_{L_2(\Omega)})^{-1} \langle (I + \mathbf{D})\, x, x\rangle_{L_2(\Omega)} = \\ = (\|x\|_{L_2(\Omega)})^{-1} \|x\|^2 \geqq \|x\|_{L_2(\Omega)}\,.$$

(14) $$\langle \mathbf{D}x, x\rangle_{L_2(\Omega)} \geqq 0 \quad \text{pour} \quad x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D})\,.$$

Cela résulte immédiatement de 6,1 (H_5) et de 6,2 car $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$.

Maintenant nous sommes dans les conditions de conclure la preuve.

Pour démontrer (I), il suffit, vu (14), de démontrer que $I + \mathbf{D}$ est autoadjoint (cfr. [1], p. 34). L'opérateur $I + \mathbf{D}$ est biunivoqie d'après (9). On démontre aisément de (12) que $(I + \mathbf{D})^{-1}$ est symétrique. Mais, d'après (10) et (13) $(I + \mathbf{D})^{-1} \in \mathfrak{L}(L_2(\Omega))$. Alors $(I + \mathbf{D})^{-1}$ est autoadjoint. Comme $I + \mathbf{D}$ est densement défini d'après (11), il en suit (cfr. [1], p. 29) que $I + \mathbf{D}$ est aussi autoadjoint ce qui était à démontrer.

L'énoncé (II) s'ensuit de (6) et (11), (III) de (8), (3) et (4) ce qui achève la preuve.

6,8. Théorème de la racine carrée. *Si* $a_{ij} \in M(\Omega)$, *alors*

(I) $$\mathfrak{D}(\mathbf{D}^{1/2}) = \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)\,,$$

(II) *il existe deux constantes* $0 < \underline{b} \leqq \bar{b}$ *telles que, quel que soit* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D})$,

(1) $$\underline{b}\|x\|_{W_2^{(k)}(\Omega)} \leqq \|x\|_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{D}^{1/2}x\|_{L_2(\Omega)} \leqq \bar{b}\|x\|_{W_2^{(k)}(\Omega)}\,.$$

Preuve. D'après 2,10 (2), on a $\langle \mathbf{D}x, x\rangle = \|\mathbf{D}^{1/2}x\|^2$ pour tout $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D})$. Les énoncés (I), (II) résultent de 6,7 (II), (III) à l'aide de 2,13.

6,9. Théorème de la transitivité. *Soit* $q \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si* $a_{ij} \in M^{(|i|+q)}(\Omega)$, *alors l'opérateur* $\mathbf{D}$ *est* $(2k, q)$*-transitif relativement à l'échelle* $\{W_2^{(r)}(\Omega)\}_0^{2k+q}$.

Preuve. On peut écrire pour $x \in W_2^{(2k+q)}(\Omega)$ et $|r| \leqq q$, en vertu de la formule de Leibnitz généralisée,

(1) $$D^r \sum_{|i|=|j|\leqq k} D^i(a_{ij}D^jx) + \sum_{|i|=|j|\leqq k} D^{r+i}(a_{ij}D^jx) = \\ = \sum_{|i|=|j|\leqq k} \sum_{s\leqq r+i} \frac{|s|!}{s_1!\, s_2! \ldots s_d!} (D^s a_{ij})\,(D^{r+i+j-s}x)\,,$$

d'où notre énoncé résulte sans peine.

6,10. Soit $m \in \{1, 2, \ldots\}$. On dit que l'ouvert Ω appartient à la classe $\mathfrak{M}^{(m)}$ ($\Omega \in$

$\in \mathfrak{M}^{(m)}$) s'il existe un système fini d'ouverts de $R^d : O_1, O_2, \ldots, O_n$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$, vérifiant les conditions suivantes:

(I) $\bigcup_{p=1}^{n} O_i \supseteq \Omega^\bullet$ ($\Omega^\bullet$ la frontière de Ω),

(II) pour tout $p = 1, 2, \ldots, n$, il existe un nombre $0 < \vartheta_p \leqq \infty$ et une transformation g biunivoque de la boule $B_p = \{\xi : \xi \in R^d, |\xi| < \vartheta_p\}$ sur O_p tels que

$$g(\xi) \in \Omega^\bullet \quad \text{pour} \quad \xi \in B_p\,, \quad \xi_d = 0\,, \tag{1}$$

$$g(\xi) \in \Omega \quad \text{pour} \quad \xi \in B_p\,, \quad \xi_d > 0\,, \tag{2}$$

$$g(\xi) \notin \Omega \quad \text{pour} \quad \xi \in B_p\,, \quad \xi_d < 0\,, \tag{3}$$

$$g_\nu(\xi) \in M^{(m)}(B_p) \quad \text{pour tout} \quad \nu = 1, 2, \ldots, d\,. \tag{4}$$

Pour $m = 0$, on désignera par $\mathfrak{M}^{(0)}$ le système de toutes les domaines dans R^d.

6,11. Théorème de la réactivité. *Soit* $q \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si* $a_{ij} \in M^{(|i|+q)}(\Omega)$ *et* $\Omega \in \mathfrak{M}^{(2k+q)}$, *alors l'opérateur* $I + \mathbf{D}$ *est* $(2k, q)$*-réactif relativement à l'échelle* $\{W_2^{(r)}(\Omega)\}_0^{2k+q}$.

Preuve. Le cas $\Omega = R^d$ et $k = 1, 2, \ldots$ peut être résolu par la méthode de différences finies.

La même méthode s'utilise pour résoudre le cas $k = 1$ avec Ω arbitraire (borné ou non).

Les détails des ces deux cas seront publiés dans [11].

Dans le cas général, il est probable que l'on peut se servir de la méthode de M. SCHECHTER dont l'exposition pour les domaines bornés se trouve dans [10]. En premier lieu, il s'agit de démontrer notre théorème pour $a_{i,j}$ constantes et pour Ω un demi-space (voir [10], p. 142–150).

Remarque. Le théorème précédent est un peu hypothétique comme on le voit de la preuve. Mais on sait que d'autres conditions, impliquant la $(2k, q)$-réactivité de l'opérateur $\mathbf{D}$, sont connus – voir [4], [10].

Par exemple, dans [4], p. 216, théorème 4,2, 2, il suffit de prendre $Q = Q' = L_2(\Omega)$, $u_0 = 0$, $g_{i_t} = 0$ et $l = k + q$ et on obtient immédiatement des conditions suffisantes pour la $(2k, q)$-réactivité de $\mathbf{D}$.

Des résultats analogues s'ensuivent de [10], mais la formulation des hypothèses n'y est pas assez explicite.

6,12. Théorème de l'interpolation des puissances. *Soit* $m \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si* $a_{i,j} \in$

$\in M^{(\max[0,|i|+k(m-2)])}(\Omega)$ *et* $\Omega \in \mathfrak{M}^{(\max[0,k(m-1)]+k\min[1,\max[0,m-1]])}$ *alors, quel que soit* $\chi = 0, 1, \ldots, m$,

$$\text{(I)} \qquad \mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{\chi/2}) = \mathfrak{D}((I + \boldsymbol{D})^{\chi/2}) \subseteq W_2^{(k\chi)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,k\chi])}(\Omega)\,,$$

(II) *il existe deux constantes* $0 < \bar{c}_\chi \leqq \bar{\bar{c}}_\chi$ *telles que, quel que soit* $x \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{\chi/2})$,

$$(1) \qquad \bar{c}_\chi \|x\|_{W_2^{(k\chi)}(\Omega)} \leqq \|x\|_{L_2(\Omega)} + \|\boldsymbol{D}^{\chi/2}x\|_{L_2(\Omega)} \leqq \bar{\bar{c}}_\chi \|x\|_{W_2^{(k\chi)}(\Omega)}\,.$$

Preuve. Le cas $m = 0$ est trivial. Le cas $m = 1$ résulte immédiatement de 6,8 pour $\chi = 1$ et il est trivial pour $\chi = 0$.

Soit enfin $m \geqq 2$. Remplaçons (I) par

$$\text{(I}'\text{)} \qquad \mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{\chi/2}) = \mathfrak{D}((I + \boldsymbol{D})^{\chi/2}) \subseteq W_2^{(k\chi)}(\Omega)\,.$$

Alors les énoncés (I), (II) découlent immédiatement de 5,8, 6,8, 6,9 et 6,11 si l'on y prend $q = m - 2$. D'autre part, $\mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^0) = L_2(\Omega)$ d'après 1,1 (8), $\mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{1/2}) = \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ et $\mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{\chi/2}) \subseteq \mathfrak{D}(\boldsymbol{D}) \subseteq \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ d'après 6,2. Il est donc clair que l'on peut écrire, en vertu de l'énoncé (I'), déjà démontré, que

$$\mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{\chi/2}) \subseteq W_2^{(k\chi)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,k\chi])}(\Omega)$$

ce qui achève la preuve.

Remarque 1. C'est le théorème fondamental pour nous. Comme le théorème 6,11, sur lequel il s'appuie essentiellement, il est un peu hypothétique et c'est pourquoi les notes que voici seront utiles.

(a) Pour $m = 0$ et 1, le théorème 6,12 est toujours valide.

(b) Pour $m \geqq 2$, le théorème reste valide sous les hypothèses suivantes: $a_{i,j} \in M^{(|i|+k(m-2))}(\Omega)$ et l'opérateur $\boldsymbol{D}$ est $(2k, m - 2)$-réactif.

Dans les cas de la validité de 6,11, la $(2k, m - 2)$-réactivité de $\boldsymbol{D}$ s'ensuit des hypothèses de 6,12 (pour $m \geqq 2$).

Dans les autres cas, si l'on voulait utiliser d'autres conditions connues de la réactivité (voir la remarque dans 6,11), il faudrait choisir des hypothèses sur $a_{i,j}$ et Ω de tel sorte qu'elles assurent la $(2k, m - 2)$-réactivité de $\boldsymbol{D}$.

Encore la question se posera qu'est-ce que cela signifiera dans les théorèmes des sections 7 et 8. Cela sera noté dans une série des remarques aux théorèmes respectifs de ces sections.

Remarque 2. Il est facile à voir que

$$(1) \qquad \max[0, k(m-1)] + k\min[1, \max[0, m-1]] = km$$

pour tout $m \in \{0, 1, \ldots\}$ à l'exception de $m = 1$, où le premier membre de (1) est égal à 0.

On peut donc supposer dans 6,12 simplement $\Omega \in \mathfrak{M}^{(km)}$ et seulement dans le cas $m = 1$, qui est de peu d'importance, on poserait l'hypothèse plus forte que nécessaire.

Remarque 3. Il est évident que

$$W_2^{(k\chi)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,k\chi])}(\Omega), \quad \chi \in \{0, 1, \ldots\},$$

sont des espaces de Banach, sous-espaces de $W_2^{(k\chi)}(\Omega)$.

6,13. Théorème des domaines des puissances. *Soit* $m \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si* $a_{i,j} \in M^{(|i|+km)}(\Omega)$, *alors, quel que soit* $\chi = 0, 1, \ldots, m + 2$, *on a*

$$\mathring{W}_2^{(k\chi)}(\Omega) \subseteq \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{\chi/2}).$$

Preuve. Pour $m = 0$, c'est trivial. Pour $m = 1$, cela résulte de 6,10. Alors il suffit de démontrer l'énoncé suivant:

Si $\mathring{W}^{(k\chi)}(\Omega) \subseteq \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{\chi/2})$ pour un $\chi = 0, 1, \ldots, m$, alors $\mathring{W}_2^{(k(\chi+2))}(\Omega) \subseteq \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(\chi+2)/2})$.

Soit d'abord $x \in C_0^\infty(\Omega)$. On voit clair de 6,12 que $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D})$ et $\mathbf{D}x \in \mathring{W}_2^{(km)}(\Omega)$ et, à fortiori, $\mathbf{D}x \in \mathring{W}_2^{(k\chi)}$ ($\chi = 0, 1, \ldots, m$). Nous avons donc $C_0^\infty(\Omega) \subseteq \mathfrak{D}(\mathbf{D})$ et $\mathbf{D}(C_0^\infty(\Omega)) \subseteq \mathring{W}_2^{(k\chi)}(\Omega)$.

D'après 6,12, $\mathbf{D}$ transforme continûment $\mathfrak{D}(\mathbf{D}) \cap \mathring{W}_2^{(k(\chi+2))}(\Omega)$ dans $W_2^{(k\chi)}(\Omega)$. Comme $C_0^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathring{W}_2^{(k(\chi+2))}(\Omega)$, on en déduit aisément que $\mathring{W}_2^{(k(\chi+2))}(\Omega) \subseteq$ $\subseteq \mathfrak{D}(\mathbf{D})$ (compte tenu que $\mathbf{D}$ est fermé d'après 6,7 et 2,3) et que $\mathbf{D}(\mathring{W}_2^{(k(\chi+2))}(\Omega)) \subseteq$ $\subseteq \mathring{W}_2^{(k\chi)}(\Omega)$. Mais cela entraîne $\mathring{W}_2^{(k(\chi+2))}(\Omega) \subseteq \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(\chi+2)/2})$ ce qui était à démontrer.

6,14. Soit $|d, k| = [(d/2k) + 1]$, le plus petit entier $\geqq (d/2k) + 1$. Evidemment, $|d, k| \geqq 2$.

6,15. Si O est un ouvert borné dans R^d, on désignera par $\delta(O)$ son diamètre.

6,16. Théorème du lissage. *Si* $\Omega \in \mathfrak{M}^{(1)}$, *alors, quel que soit* $n \in \{0, 1, \ldots\}$,

(I) $$W^{(k|d,k|+n)}(\Omega') \subseteq CU^{(n)}(\Omega')$$

pour tout ouvert borné $\Omega' \subseteq \Omega$,

(II) *il existe une constante* c_n *telle que*

(1) $$\|z\|_{C^{(n)}(\Omega')} \leqq c_n\, \delta(\Omega')\, \|z\|_{W_2^{(k|d,k|+n)}(\Omega)},$$

pour tout ouvert borné $\Omega' \subseteq \Omega$.

Preuve. Voir la preuve du théorème 3,8 dans [4], p. 72 pour $n = 0$. Le cas général en résulte facilement.

7. RÉGULARITÉ DE L'ÉVOLUTION, GÉNÉRÉE PAR DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES

Note. Dans toute la section 7, on reste dans le cadre des suppositions 6,1 et l'opérateur $\mathbf{D}$ est celui de 6.2.

7,1. Théorème de la régularité de l'évolution parabolique. *Soit* $l \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si* $a_{i,j} \in M^{(\max[0,|i|+k(l-2)])}(\Omega)$ *et* $\Omega \in \mathfrak{M}^{(\max[0,k(l-1)]+k\min[1,\max[0,l-1]])}$, *alors il existe une constante* N *telle que, pour tout* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{l/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{l/2}h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $u \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, *qui vérifient* 3,9 (II), (III), *et pour tout* $p = 0, 1, \ldots, l$, *on a*

(1) $$x \in W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega)\,,$$
$$h \in LL(R^+, W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega))\,,$$

(2) $$u \in CCC(R^+, W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega)$$
$$u(t) \to x \;\; (t \to 0_+) \quad \textit{dans} \quad W_2^{(kp)}(\Omega)$$

et

(3) $$\|u(t)\|_{W_2(kp)(\Omega)} \leqq N \left[\|x\|_{W_2(kp)(\Omega)} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2(kp)(\Omega)} \right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Appendice. *Les conditions* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{l/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $\mathbf{D}^{l/2}h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *sont satisfaites pour tout* $x \in \mathring{W}_2^{(kl)}(\Omega)$ *et* $h \in LL(R^+, \mathring{W}_2^{(kl)}(\Omega))$.

Preuve. On utilise 6,7 (I), 6,12 et 4,1 où l'on prend $\alpha = \frac{1}{2}p$, $Q = \mathring{W}_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega)$ dans 4,1 et $m = l$ et $\chi = p$ dans 6,12.

En ce qui est de l'appendice, on se sert de 6,13, 6,12 et 1,15.

Remarque. Pour $l \geqq 2$, on peut remplacer l'hypothèse de Ω par la $(2k, k(l-2))$-réactivité de l'opérateur $\mathbf{D}$ (cfr. les remarques dans 6,11 et 6,12).

7,2. Théorème de la régularité de l'évolution parabolique et de son intégrale. *Soit* $l \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si* $a_{i,j} \in M^{(|i|+kl)}(\Omega)$ *et* $\Omega \in \mathfrak{M}^{(2k+kl)}$, *alors il existe une constante* N *telle que, pour tout* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{l/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{l/2}h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $u \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, *qui vérifient ensemble* 3,9 (II), (III), *et pour tout* $p = 0, 1, \ldots, l$, *on a* (1), (2), (3) *comme* 7,1 (1), (2), (3),

(4) $$\int_0^t u(\tau)\, d\tau \in CCC(R^+, W_2^{(k(p+2))}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega))\,,$$

et

$$\int_0^t u(\tau)\,d\tau \to 0 \ (t \to 0_+) \quad dans \quad W_2^{(k(p+2))}(\Omega)\,,$$

(5) $$\left\| \int_0^t u(\tau)\,d\tau \right\|_{W_2^{(k(p+2))}(\Omega)} \leqq (2 + t)\,N \left[\|x\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)} + \int_0^t \|u(\tau)\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)}\,d\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Appendice *comme dans* 7,1.

Preuve. On utilise 6,7 (I), 6,12, 4,1 et 4,2 où l'on prend $\alpha = \frac{1}{2}p$, $Q = Q_1 = W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega)$, $Q_2 = W_2^{(k(k+2))}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ dans 4,1 et 4,2 et $m = l + 2$, $\chi = p$ et $\chi = p + 2$ dans 6,12.

Remarque. On peut remplacer l'hypothèse sur Ω par la $(2k, kl)$-réactivité de l'opérateur $\mathbf{D}$ (cfr. les remarques dans 6,11 et 6,12).

7,3. Théorème de la régularité de l'évolution parabolique et de sa dérivée. *Soit* $l \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si* $a_{i,j} \in M^{(|i|+kl)}(\Omega)$ *et* $\Omega \in \mathfrak{M}^{(2k+kl)}$, *alors il existe une constante* N *telle que, pour tout* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(l+2)/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{(l+2)/2}h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $u \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *qui vérifient* 3,9 (II), (III), *et pour tout* $p = 0, 1, \ldots, l + 2$ *et* $q = 0, 1, 2, \ldots, l$, *on a*

(1) $$x \in W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega)\,,$$

$$h \in LL(R^+, W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega))\,,$$

(2) $$u \in CCC(R^+, W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega))$$

et

$$u(t) \to x \ (t \to 0_+) \quad dans \quad W_2^{(kp)}(\Omega)\,.$$

(3) $$\|u(t)\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)} \leqq N \left[\|x\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)}\,d\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$,

(4) *il existe une dérivée* u' *telle que*

$$u' - h \in CCC(R^+, W_2^{(kq)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kq])}(\Omega))$$

et

$$u'(t) - h(t) \to -\mathbf{D}x \ (t \to 0_+) \quad dans \quad W_2^{(kq)}(\Omega)\,,$$

(5) $$\|u'(t) - h(t)\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} \leqq N \left[\|x\|_{W_2^{(k(q+2))}(\Omega)} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(k(q+2))}(\Omega)}\,d\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Appendice. *Les conditions* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(l+2)/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{(l+2)/2}h \in$ $\in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *sont satisfaites pour tout* $x \in \mathring{W}_2^{(k(l+2))}(\Omega)$ *et* $h \in LL(R^+, \mathring{W}_2^{(k(l+2))}(\Omega))$.

Preuve. On utilise 6,7 (I), 6,12, 4,1 et 4,3 où l'on prend d'abord $\alpha = \frac{1}{2}p$, $Q =$ $= W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,pk])}(\Omega)$ dans 4,1 et $m = l + 2$, $\chi = p$ dans 6,12 et puis $Q_1 =$ $= W_2^{(kq)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kq])}(\Omega)$, $Q_2 = W_2^{(k(q+2))}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ dans 4,3 et $m = l + 2$, $\chi = q$, $\chi = q + 2$ dans 6,12.

L'appendice résulte facilement de 6,13, 6,12 et 1,15.

7,3*. Corollaire. *Si, en plus dans* 7,3, $h \in CCC(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $\mathbf{D}^{l/2}h \in$ $\in CCC(R^+, L_2(\Omega))$, *alors, pour* $q = 0, 1, \ldots, l$,

(1) $$h \in CCC(R^+, W_2^{(kq)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kq])}(\Omega)),$$

(2) *u' peut être choisie telle que*

$$u' \in CCC(R^+, W_2^{(kq)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kq])}(\Omega)).$$

Appendice. *Les conditions additionnelles du corollaire sur h sont satisfaites par tout* $h \in CCC(R^+, \mathring{W}_2^{(kl)}(\Omega))$.

Preuve. C'est une conséquence facile de 4,3 en vertu de 6,12, 1,14, 7,3 (5) et 6,13.

Remarque. Voir la remarque dans 7,2.

7,4. Théorème de la régularité de l'évolution hyperbolique. *Soit* $l \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si les hypothèses de* 7,1 *ont lieu, alors il existe une constante N telle que, pour tout* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{l/2})$, $y \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{l/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{l/2}h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $u \in$ $\in LL(R^+, L_2(\Omega))$, *qui satisfont ensemble à* 3,13 (II), (III), *et pour tout* $p = 0, 1, \ldots, l$, *on a*

(1), (2) *comme dans* 7,1 *avec* $y \in W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega)$,

(3) $$\|u(t)\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)} \leqq N\left[\|x\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)} + t\|y\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)} + t\int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)}\,d\tau\right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Appendice. *Les conditions* $x, y \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{l/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $\mathbf{D}^{l/2}h \in LL(R^+ L_2(\Omega))$ *sont satisfaites pour tout* $x, y \in \mathring{W}^{(kl)}(\Omega)$ *et* $h \in LL(R^+, \mathring{W}_2^{(kl)}(\Omega))$.

Preuve. On utilise 6,7 (I), 6,12 et 4,4 en prenant $\alpha = \frac{1}{2}p$, $Q = W_2^{(kq)}(\Omega) \cap$ $\cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kq])}(\Omega)$ dans 4,4 et $m = l$, $\chi = p$ dans 6,12.

L'appendice s'ensuit de 6,13, 6,12 et 1,15.

Remarque. Voir la remarque dans 7,1.

7,5. Théorème de la régularité de l'évolution hyperbolique et de son intégrale. *Soit* $l \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si* $a_{ij} \in M^{(\max[0,|i|+k(l-1)])}(\Omega)$ *et* $\Omega \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{k}}^{(kl+k\min[1,l])}$, *alors il existe une constante* N *telle que, pour tout* $x, y \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{l/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{l/2}h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $u \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, *qui satisfont à* 3,13 (II), (III), *et pour tout* $p = 0, 1, \ldots, l$, *on a*

(1), (2), (3) *comme* 7,4 (1), (2), (3),

(4) $$\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \in CCC(R^+, W_2^{(k(p+1))}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega))$$

et

$$\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau \to 0 \ (t \to 0_+) \quad \textit{dans} \quad W_2^{(k(l+1))}(\Omega),$$

(5) $$\left\|\int_0^t u(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\|_{W_2^{(k(p+1))}(\Omega)} \leqq$$

$$\leqq (1 + t)\,N\left[\|x\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)} + t\|y\|_{W_2^{(kl)}(\Omega)} + t\int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau\right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Appendice comme dans 7,4.

Preuve. Les énoncés (1)–(3) découlent naturellement de 7,4. Pour démontrer (4), (5), on utilise 6,7 (1), 6,12 et 4,5, en posant $\alpha = \frac{1}{2}p$, $Q_1 = W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega)$, $Q_2 = W_2^{(k(p+1))}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ dans 4,5 et $m = l + 1$, $\chi = p$, $\chi = p + 1$ dans 6,12.

Remarque. Pour $l \geqq 1$, on peut remplacer l'hypothèse sur Ω par la $(2k, k(l - 1))$-réactivité de l'opérateur $\mathbf{D}$ (cfr. les remarques dans 6,11 et 6,12).

7,6. Théorème de la régularité de l'évolution hyperbolique et de son intégrale première et seconde. *Soit* $l \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si* $a_{ij} \in M^{(|i|+kl)}(\Omega)$ *et* $\Omega \in \mathfrak{M}^{(2k+kl)}$, *alors il existe une constante* N *telle que, pour tout* $x, y \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{l/2})$, $h \in LL(R^+ L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{l/2}h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $u \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *qui satisfont à* 3,13 (II), (III), *et pour tout* $p = 0, 1, \ldots, l$, *on a*

(1)–(5) *comme* 7,5 (1)–(5),

(6) $$\int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau \in CCC(R^+, W_2^{(k(p+2))}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega))$$

et

$$\int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}\tau \to 0 \ (t \to 0) \quad \textit{dans} \quad W_2^{(k(p+2))}(\Omega),$$

(7) $$\left\| \int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\, d\sigma\, d\tau \right\|_{W_2^{(k(p+2))}(\Omega)} \leqq$$
$$\leqq (2+t) N \left[\|x\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)} + t\|y\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)} + t \int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)}\, d\tau \right]$$
pour tout $t \in R^+$.

Appendice comme dans 7,4.

Preuve. Les énoncés (1)–(5) découlent de 7,5. Pour démontrer (6) et (7), on se sert de 6,7 (I), 6,12 et 4,6 en posant $\alpha = \frac{1}{2}p$, $Q_1 = W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega)$, $Q_2 = W_2^{(k(p+2))}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(k)}$ dans 4,6 et $m = l + 2$, $\chi = p$, $\chi = p + 2$ dans 6,12.

Remarque. Voir la remarque dans 7,2.

7,7. Théorème de la régularité de l'évolution hyperbolique et de sa dérivée. *Soit* $l \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si* $a_{ij} \in M^{(\max[0,|i|+k(l-1)])}(\Omega)$ *et* $\Omega \in \mathfrak{M}^{(kl+k\min[1,l])}$, *alors il existe une constante* N *telle que, pour tout* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(l+1)/2})$, $y \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{l/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{l/2}h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $u \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, *qui satisfont ensemble à* 3,13 (II)–(III), *et pour tout* $p = 0, 1, \ldots, l + 1$, $q = 0, 1, \ldots, l$, *on a*

(1) $$x \in W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega),$$
$$y \in W_2^{(kq)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kq])}(\Omega), \quad h \in LL(R^+, W_2^{(kq)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kq])}(\Omega)),$$

(2) $$u \in CCC(W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega))$$

et

$$u(t) \to x \ (t \to 0_+) \quad dans \quad W_2^{(kp)}(\Omega),$$

(3) $$\|u(t)\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} \leqq N \left[\|x\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} + t\|y\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} + t \int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)}\, d\tau \right],$$

(4) $$\|u(t)\|_{W_2^{(k(q+1))}(\Omega)} \leqq N \left[\|x\|_{W_2^{(k(q+1))}(\Omega)} + \|y\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)}\, d\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$,

(5) *il existe une dérivée* u' *telle que*

$$u' \in CCC(R^+, W_2^{(kq)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kq])}(\Omega))$$

et

$$u'(t) \to y \ (t \to 0_+) \quad dans \quad W_2^{(kq)}(\Omega),$$

(6) $$\|u'(t)\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} \leqq N \left[\|x\|_{W_2^{(k(q+1))}(\Omega)} + \|y\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)}\, d\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Appendice. *Les conditions* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(l+1)/2})$, $y \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{l/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{l/2}h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *sont satisfaites pour tout* $x \in \mathring{W}_2^{(k(l+1))}(\Omega)$, $y \in \mathring{W}_2^{(kl)}(\Omega)$ *et* $h \in LL(R^+, \mathring{W}_2^{(kl)}(\Omega))$.

Preuve. Les énoncés (1), (2), (4)–(6) résultent de 6,7 (I), 6,12 et 4,7 si l'on pose $\alpha = \frac{1}{2}q$, $Q_1 = W_2^{(kq)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kq])}(\Omega)$, $Q_2 = W_2^{(k(q+1))}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ dans 4,7 et $m = l + 1$, $\chi = q$, $\chi = q + 1$ dans 6,12. L'inégalité (3) s'ensuit de 7,4 (3) ($p = q$). L'appendice est clair de 6,13, 6,12 et 1,15.

Remarque. Voir la remarque dans 7,5.

7,8. Théorème de la régularité de l'évolution hyperbolique et de sa dérivée première et seconde. *Soit* $l \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si les hypothèses de 7,3 ont lieu, alors il existe une constante N telle que, pour tout* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(l+2)/2})$, $y \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(l+1)/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{(l+1)/2}h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $u \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *qui satisfont à 3,13 (II), (III), et pour tout* $p = 0, 1, 2, \ldots, l + 2$, $q = 0, 1, \ldots, l + 1$, $r = 0, 1, \ldots, l$, *on a*:

(1) $$x \in W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega)\,, \quad y \in W_2^{(k(q+1))}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)\,,$$
$$h \in LL(R^+, W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega))\,,$$

(2) $$u \in CCC(R^+, W_2^{(kp)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kp])}(\Omega))$$

et

$$u(t) \to x \ (t + 0_+) \quad dans \quad W_2^{(kp)}(\Omega)\,,$$

(3) $$\|u(t)\|_{W_2^{(kp)}(\Omega)} \leqq N\left[\|x\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} + t\|y\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} + t\int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau\right],$$

(4) $$\|u(t)\|_{W_2^{(k(q+1))}(\Omega)} \leqq N\left[\|x\|_{W_2^{(k(q+1))}(\Omega)} + \|y\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau\right]$$

pour tout $t \in R^+$,

(5) *il existe une dérivée u' telle que*

$$u' \in CCC(R^+, W_2^{(kq)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kq])}(\Omega))$$

et

$$u'(t) \to y \ (t \to 0) \quad dans \quad W_2^{(kq)}(\Omega)\,,$$

(6) $$\|u'(t)\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} \leqq N\left[\|x\|_{W_2^{(k(q+1))}(\Omega)} + \|y\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(kq)}(\Omega)}\,\mathrm{d}\tau\right]$$

pour tout $t \in R^+$,

(7) *il existe une dérivée seconde u'' telle que*

$$u'' - h \in CCC(R^+, W_2^{(kr)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kr])}(\Omega))$$

et

$$u''(t) - h(t) \to \mathbf{D}x \ (t \to 0_+) \quad dans \quad W_2^{(kr)}(\Omega)\,,$$

(8)

$$\|u''(t) - h(t)\|_{W_2^{(kr)}(\Omega)} \leqq N \left[\|x\|_{W_2^{(k(r+2))}(\Omega)} + \|y\|_{W_2^{(k(r+1))}(\Omega)} + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(k(r+1))}(\Omega)} \,\mathrm{d}\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$.

Appendice. *Les conditions* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(l+2)/2})$, $y \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(l+1)/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{(l+1)/2}h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, *sont satisfaites pour tout* $x \in \mathring{W}_2^{(k(l+2))}(\Omega)$, $y \in \mathring{W}_2^{(k(l+1))}(\Omega)$ *et* $h \in LL(R^+, \mathring{W}_2^{(k(l+1))}(\Omega))$.

Preuve. Les énoncés (1)–(6) découlent de 7,7 si l'on y prend $l + 1$ au lieu de l ce qui est admissible grâce à nos suppositions.

Pour démontrer (7), (8) on utilise 6,7 (I), 6,12 et 4,8 en y posant $\alpha = \frac{1}{2}r$, $Q_1 = W_2^{(kr)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kr])}(\Omega)$, $Q_2 = W_2^{(k(r+1))}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$, $Q_3 = W_2^{(k(r+2))}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$ dans 4,8 et $m = l + 2$, $\chi = r$, $\chi = r + 1$ et $\chi = r + 2$ dans 6,12.

Pour l'appendice, on se sert de 6,13, 6,12 et 1,15.

7,8*. Corollaire. *Si, en plus dans* 7,8, $h \in CCC(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $\mathbf{D}^{l/2}h \in CCC(R^+, L_2(\Omega))$, *alors, pour tout* $r = 0, 1, \ldots, l$,

(1) $$h \in CCC(R^+, W_2^{(kr)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kr])}(\Omega))$$

(2) u'' *peut être choisie telle que*

$$u'' \in CCC(R^+, W_2^{(kr)}(\Omega) \cap \mathring{W}_2^{(\min[k,kr])}(\Omega))\,.$$

Appendice. *Les conditions additionnelles du corollaire sur h sont satisfaites par tout* $h \in CCC(R^+, \mathring{W}_2^{(kl)}(\Omega))$.

Preuve. C'est une conséquence facile de 4,8* en vertu de 6,12, 1,14, 7,8 (8) et 6,13.

Remarque. Voir la remarque dans 7,2.

8. LISSAGE DE L'ÉVOLUTION, GÉNÉRÉE PAR DES OPÉRATEURS ELLIPTIQUES

Note. Dans toute la section 8, on reste dans le cadre des suppositions 6,1 et l'opérateur $\mathbf{D}$ est celui de 6,2.

8,1. Théorème du lissage de l'évolution parabolique. *Soit* $s \in \{0, 1, \ldots\}$. *Si* $a_{ij} \in M^{(|i|+k(|d,k|-2)+ks)}(\Omega)$ *et* $\Omega \in \mathfrak{M}^{(k|d,k|+ks)}$, *alors il existe une constante N telle que,* *pour tout* $x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(|d,k|+s)/2})$, $h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, $\mathbf{D}^{(|d,k|+s)/2} h \in LL(R^+, L_2(\Omega))$ *et* $u \in LL(R^+, L_2(\Omega))$, *qui satisfont ensemble à* 3,9 (II), (III), *et pour tout* $p = 0, 1, \ldots, |d, k| + s$, $\lambda = 0, 1, \ldots, s$, *on a*:

(1)– (3) *comme* 7,1 (1)–(3),

(4) $$x \in CU^{(k\lambda)}(\Omega')\,, \quad h \in LL(R^+, CU^{(k\lambda)}(\Omega'))$$

pour tout ouvert borné $\Omega' \subseteq \Omega$.

(5) $$u \in CCC(R^+, CU^{(k\lambda)}(\Omega'))$$

et $u(t) \to x$ $(t \to 0_+)$ *dans* $CU^{(k\lambda)}(\Omega')$ *pour tout ouvert borné* $\Omega' \subseteq \Omega$,

(6) $$\|u(t)\|_{C^{(\lambda k)}(\Omega')} \leqq N\,\delta(\Omega') \left[\|x\|_{W_2^{(k(|d,k|+\lambda))}(\Omega)} + \int_0^t \|h(\tau)\|_{W_2^{(k(|d,k|+\lambda))}(\Omega)} \, d\tau \right]$$

pour tout $t \in R^+$ *et tout ouvert* $\Omega' \subseteq \Omega$.

Preuve. Il s'agit d'une conséquence immédiat de 7,1 $(l = |d, k| + s)$ et de 6,16.

Remarque. On peut remplacer l'hypothèse sur Ω par la $(2k, k(|d, k| + s - 2))$-réactivité de l'opérateur $\mathbf{D}$.

8,2–8,8. Théorèmes du lissage, correspondant aux théorèmes et corollaires de la régularité 7,2–7,8. *Les formulations précises à l'instar de* 8,1 *seront laissées au lecteur.*

Preuves. On prend $l = |d, k| + s$ dans 7,2–7,8 et utilise 6,16.

Note. Soit Ω borné. On voit aisément que les énoncés des théorèmes 8,3 et 8,8 impliquent que les solutions u satisfont aux conditions aux limites de type de Dirichlet dans le sens classique, i.e. que les dérivées $\overline{D^r u(t)}(\xi) = 0$ pour $\xi \in \Omega^\bullet$ et $|r| \leqq k - 1$ ($\overline{D^r u(t)}$ désigne le prolongement par continuité de $D^r u(t)$ sur $\overline{\Omega}$).

Une observation analogue a lieu aussi dans 8,2 et 8,6 pour $\int_0^t u(\tau)\, d\tau$ et $\int_0^t \int_0^\tau u(\sigma)\,.\,\sigma\, d\tau$ resp.

9. APPENDICE DE LA RÉACTIVITÉ D'OPÉRATEURS

9.1. Dans 5,1 et 5,5, nous avons introduit la notion de la réactivité d'un opérateur relativement à une échelle d'espaces. Ici nous allons étudier l'influence de la réactivité d'un opérateur à la réactivité d'autre.

9,2. Théorème fondamental de la réactivité. *Soient* $U \in \mathfrak{L}^+(E)$, $\varrho, \varkappa \in \{0, 1, \ldots\}$, $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$ *une échelle dans* E *et* $\lambda \in R$. *Si l'opérateur satisfait aux hypothèses*:

(α) $\lambda I + U$ *est biunivoque et* $(\lambda I + U)^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$,

(β) $\|\lambda(\lambda I + U)^{-1}\| < 1$,

(γ) $\lambda I + U$ *est* $(\varrho, \varkappa)$*-réactif relativement à* $\{E_r\}^{\varrho+\varkappa}$,

(δ) $\varrho \geqq 1$,

alors l'opérateur

(I) U *est biunivoque et* $U^{-1} \in \mathfrak{L}(E)$,

(II) U *est* $(\varrho, \varkappa)$*-réactif relativement à* $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$.

Preuve. On peut écrire

$$U^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (\lambda I + U)^{-(n+1)} . \tag{1}$$

En effet, la série dans le second membre est absolument sommable en conséquence de (α), (β). Donc, l'identité (4) se vérifie par un calcul direct en multipliant le second membre de droite et de gauche par $U = (\lambda I + U) - \lambda I$.

Retournons maintenant à la preuve elle-même de la réactivité de l'opérateur U.

Il résulte de (γ) que

$$(\lambda I + U)^{-1} (E_r) \subseteq E_{\varrho+r} , \tag{2}$$

$$\|(\lambda I + U)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(E_r, E_{\varrho+r})} \leqq b^{-1} , \tag{3}$$

quel que soit $r = 0, 1, \ldots, \varkappa$.

On déduit aisément de (2), (3), compte tenu de 5,5 (I), (II), que

$$(\lambda I + U)^{-1} (E_r) \subseteq E_{s+r} , \tag{4}$$

$$\|(\lambda I + U)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(E_r, E_{s+r})} \leqq b^{-1} \tag{5}$$

quel que soit $s = 0, 1, \ldots, \varrho$, $r = 0, 1, \ldots, \varkappa$.

En vertu de (2)–(5) on obtient aisément par itération

$$(\lambda I + U)^{-q} (E_r) \subseteq E_{\varrho+r} , \tag{6}$$

$$\|(\lambda I + U)^{-q}\|_{\mathfrak{L}(E_r, E_{\varrho+r})} \leqq b^{-q} \tag{7}$$

pour chaque $r = 0, 1, \ldots, \varkappa$, et $q = 1, 2, \ldots$

Soit donc $\gamma = 0, 1, \ldots, \varkappa$ fixe. On s'assure aisément qu'il faut encore vérifier, compte tenu de (1),

$$U^{-1}(E_\gamma) \subseteq E_{\varrho+\gamma} , \tag{8}$$

$$\|U^{-1}\|_{\mathfrak{L}(E_\gamma, E_{\varrho+\gamma})} < \infty . \tag{9}$$

Pour ce but, soit $p = 0, 1, \dots$ tel que $p\varrho \leqq \gamma$ et $(p+1)\varrho > \gamma$. Un tel p existe et est unique d'après (δ). On va démontrer

$$(\lambda I + U)^{-(p+2)}(E) \subseteq E_{\varrho+\gamma}\,, \tag{10}$$

$$\|(\lambda I + U)^{-(p+2)}\|_{\mathfrak{L}(E, E_{\varrho+\gamma})} \leqq b^{-(p+2)}\,. \tag{11}$$

En effet, on obtient aisément par itération de (2), (3), compte tenu de 5,1 (III),

$$(\lambda I + U)^{-p}(E) \subseteq E_{pq}\,, \tag{12}$$

$$\|(\lambda I + U)^{-p}\|_{\mathfrak{L}(E, E_{pq})} \leqq b^{-p} \tag{13}$$

et encore d'après (4), (5) $(r = pq,\ s = \gamma - pq)$

$$(\lambda I + U)^{-1}(E_{pq}) \subseteq E_{\gamma}\,, \tag{14}$$

$$\|(\lambda I + U)^{-1}\|_{\mathfrak{L}(E_{pq}, E_{\gamma})} \leqq b^{-1} \tag{15}$$

ce qui donne, si l'on applique successivement (12) et (14) et (13) et (15), les relations

$$(\lambda I + U)^{-(p+1)}(E) \subseteq E_{\gamma}\,, \tag{16}$$

$$\|(\lambda I + U)^{-(p+1)}\|_{\mathfrak{L}(E, E_{\gamma})} \leqq b^{-(p+1)}\,, \tag{17}$$

d'où immédiatement, en vertu de (2), (3) $(r = \gamma)$ les relations (10), (11).

Ceci étant, revenons à la vérification finale de (8), (9).

Ecrivons

$$U^{-1} = \sum_{n=0}^{p} \lambda^n(\lambda I + U)^{-(n+1)} + \sum_{n=p+1}^{\infty} \lambda^n(\lambda I + U)^{-(n+1)} = T_1 + T_2\,. \tag{18}$$

Il résulte de (6), (7) $(r = \gamma,\ q = 1, 2, \dots, p+2)$

$$T_1(E_{\gamma}) \subseteq E_{\varrho+\gamma}\,, \tag{19}$$

$$\|T_1\|_{\mathfrak{L}(E_{\gamma}, E_{\varrho+\gamma})} \leqq \sum_{n=1}^{p} |\lambda|^n b^{-(n+1)}\,. \tag{20}$$

D'autre part, le second membre s'écrit

$$T_2 = \lambda^{p+1}(\lambda I + U)^{-(p+2)} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n(\lambda I + U)^{-n}\,. \tag{21}$$

Comme $\|\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n(\lambda I + U)^{-n}\|_E \leqq (1 - \|\lambda(\lambda I + U)^{-1}\|_E)^{-1}$ d'après (β), il résulte de (21), (10) et (11)

$$T_2(E) \subseteq E_{\varrho+\gamma}\,,$$

$$\|T_2\|_{\mathfrak{L}(E, E_{\varrho+\gamma})} \leqq |\lambda|^{p+1} b^{-(p+2)}(1 - \|\lambda(\lambda I + U)^{-1}\|)^{-1}\,,$$

d'où, en vertu de 5,1 (II), (III),

$$T_2(E_\gamma) \subseteq E_{\varrho+\gamma} \tag{22}$$

$$\|T_2\|_{\mathfrak{L}(E_\gamma, E_{\varrho+\gamma})} \leqq |\lambda|^{p+1} b^{-(p+2)}(1 - \|\lambda(\lambda I + U)^{-1}\|)^{-1} . \tag{23}$$

Les relations (18), (19), (20), (22) et (23) donnent immédiatement (8) et (9) ce qui achève la preuve.

9,3. Soit $A \in \mathfrak{L}^+(H)$. L'opérateur A s'appelle strictement positif s'il existe une constante $c > 0$ telle

$$\langle Ax, x \rangle \geqq c\|x\|^2 \tag{1}$$

quel que soit $x \in \mathfrak{D}(A)$.

9,4. Corollaire. *Soit* $A \in \mathfrak{L}^+(H)$, $\varrho, \varkappa \in \{0, 1, \ldots\}$, $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$ *une échelle dans* H *et* $\lambda \geqq 0$. *Si l'opérateur* A *est autoadjoint, strictement positif et* $\lambda I + A$ *est* $(\varrho, \varkappa)$-*réactif relativement à l'échelle* $\{E_r\}_0^{\varrho+\varkappa}$, *alors l'opérateur* A *est aussi* $(\varrho, \varkappa)$-*réactif relativement à la même échelle.*

Preuve. Vu 9,2, il suffit de prendre $U = A$ et de démontrer que

$$\lambda I + A \quad \text{est biunivoque,} \quad (\lambda I + A)^{-1} \in \mathfrak{L}(H) , \tag{1}$$

$$\|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\| < 1 . \tag{2}$$

La propriété (1) est immédiate et (2) résulte de 9,3 (1) car

$$\langle(\lambda I + A)\, x, x\rangle \geqq (\lambda + c)\, \|x\|^2 ,$$

d'où $\|(\lambda I + A)\, x\| \geqq (\lambda + c)\, \|x\|$ ce qui entraîne

$$\|\lambda(\lambda I + A)^{-1}\| \leqq \frac{\lambda}{\lambda + c} < 1 .$$

9,5. Corollaire. *Dans* 9,4 *on peut prendre, sous les suppositions* 6,1, *l'opérateur* $\mathbf{D}$ *de* 6,2 *au lieu de* A *si le domaine* Ω *est borné et* $a_{ij} = 0$ *pour* $|i| < k$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Friedrichs.

Remarque. Le corollaire 9,5 nous montre qu'il suffit d'étudier la réactivité de l'opérateur $I + \mathbf{D}$ sans se limiter aux domaines bornés et que la réactivité de $\mathbf{D}$ dans les domaines bornés en résulte sans peine.

La réactivité de l'opérateur $\mathbf{D}$ lui-même (dans les domaines bornés) est la propriété bien fondamentale dans l'étude des solutions faibles des équations elliptiques (voir [4], chap. 4).

10. COMMENTAIRE

10,1. L'idée du "transport" de l'interpolation de l'opérateur elliptique sur l'évolution générée par lui, n'est pas nouvelle. Ce transport se réalise par l'intermédiaire de puissances fractionnaires du générateur. On trouve les traits pricipaux de cette méthode chez K. et L. MAURIN ([5], chap. XVIII. et [6]) et chez YOSIDA ([8], chap. XV), autant que l'auteur sait. Mais dans ces travaux, il s'agit seulement de la régularité locale dans l'intérieur du domaine, Yosida se borne seulement à tout l'espace.

Voilà pourquoi nous nous sommes proposé d'effectuer une analyse détaillée et, autant que possible, complète de la méthode du transport. Cette méthode a été formulée sous la forme abstraite comme le transport de l'interpolation des puissances convenables du générateur sur l'évolution, générée par lui. Dans cette direction, les théorèmes de la section 4 sont centraux, tout en étant assez simples.

Dans les sections suivantes 5 – 8, nous avons cherché à trouver des conditions sous lesquelles la théorie générale du transport, exposée dans la section 4, est applicable, si le générateur est un opérateur elliptique formellement autoadjoint (voir 6,1 et 6,2). Il s'agit donc en première ligne de trouver des conditions sur les coefficients et sur le domaine qui nous permettent d'interpoler les puissances d'un opérateur elliptique, formellement autoadjoint par les espaces de Sobolev. Mais il se montre que les résultats connus sur les opérateurs elliptiques, nécessaires pour nos buts, sont très incomplets. Donc, nous avons été forcé à nous occuper de ces questions et de donner la démonstration complète du théorème de la réactivité 6,11 dans certains cas importants. Ce travail se trouve en préparation.

10,2. Nous avons déjà signalé que les résultats de Maurin et de Yosida sont "locaux". Par contre, les nôtres sont "globaux" ou, comme on dit fréquemment, "jusqu'à la frontière". Une théorie complète des problèmes "locaux" sera présenté dans un autre travail.

10,3. La théorie de Yosida embrasse aussi certains opérateurs elliptiques non-autoadjoints. Une extension de notre théorie à ces opérateurs sera donnée dans la seconde partie de ce mémoire.

10,4. Pour les opérateurs elliptiques autoadjoints du second ordre ($k = 1$) dans les domaines bornés, les résultats les plus proches aux nôtres sont ceux de LADYŽENSKAJA [7]. Ils sont "globaux" comme les nôtres et il est donc possible de comparer les uns aux autres.

Ladyženskaja s'occupe d'opérateur de type

$$\mathbf{D}x = \sum_{i,j=1}^{d} D_i(a_{ij}D_jx) + a_{00}x \,. \tag{1}$$

Les hypothèses de Ladyženskaja

(2) $$\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(\xi)\,\eta_i\eta_j \geqq a_0 \sum_{i=1}^{d} \eta_i^2\,, \quad a_0 > 0\,,$$

(3) $$a_{00}(\xi) \geqq 0 \quad \text{pour} \quad \xi \in \Omega$$

permettent d'entraîner l'opérateur (1) sous notre schème 6,1 et 6,2.

Quant aux coefficients a_{ij}, a_{00} et au domaine Ω, Ladyženskaja suppose, dans la notation de [4], que

(4) $$a_{ij} \in C^{(|d,k|+1)}(\bar{\Omega})\,, \quad a_{00} \in C^{(|d,k|)}(\bar{\Omega})\,, \quad \Omega \in \mathfrak{M}^{(|d,k|+2,0)}$$

avec $|d, k| = [\frac{1}{2}d + 1]$ (cfr. 6,14), ce qui est visiblement plus restrictif que nos conditions dans 8,8 ($s = 0$), dans notre notation,

(5) $$a_{ij} \in M^{(|d,k|+1)}(\Omega)\,, \quad a_{00} \in M^{(|d,k|)}(\Omega)\,, \quad \Omega \in \mathfrak{M}^{(|d,k|+2)}\,.$$

Enfin, il faut encore comparer les conditions sur les valeurs initiales x, y et sur l'excitation h. Nous supposons dans 8,8 ($s = 0$) pour x, y

(6) $$x \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{(|d,k|+2)/2})\,, \quad y \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{(|d,k|+1)/2})\,.$$

Par contre, Ladyženskaja exige (dans notre notation)

(7) $$x \in W_2^{(|d,k|+2)}(\Omega)\,, \quad x, \boldsymbol{D}x, \ldots, \boldsymbol{D}^{[(|d,k|+1)/2]}x \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)\,,$$
$$y \in W_2^{(|d,k|+1)}(\Omega)\,, \quad y, \boldsymbol{D}y, \ldots, \boldsymbol{D}^{[(|d,k|+2)/2]}y \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)\,.$$

On va montrer que les conditions (7) sont plus restrictives que (6).

D'après (7) $\boldsymbol{D}^{[(|d,k|+1)/2]}x \in \mathring{W}_2^{(k)}(\Omega)$. Mais, il s'ensuit de 6,8 que $\mathring{W}_2^{(k)}(\Omega) = \mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{1/2})$ et donc $x \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{[(|d,k|+1)/2]+1/2})$. Il faut encore comparer les valeurs $[\frac{1}{2}(|d, k| + 1)] + \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}(|d, k| + 2)$.

On obtient aisément que

(8) $$\left[\frac{|d, k| + 1}{2}\right] + \frac{1}{2} = \frac{|d, k| + 2}{2} \qquad \text{pour} \quad d = 4d_0 \qquad \text{et} \quad d = 4d_0 - 1\,,$$

(9) $$\left[\frac{|d, k| + 1}{2}\right] + \frac{1}{2} = \frac{|d, k| + 2}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad d = 4d_0 - 2 \quad \text{et} \quad d = 4d_0 - 3\,.$$

Alors, en vertu de (8), (9), on obtient toujours $x = \mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{(|d,k|+2)/2})$, ce qui est notre condition (6). Pour y, on déduit de (7) que $y \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{D}^{[(|d,k|+2)/2]-1/2})$. Il faut donc comparer $[\frac{1}{2}(|d, k| + 2)] - \frac{1}{2}$ avec $\frac{1}{2}(|d, k| + 1)$. On obtient

(10) $$\left[\frac{|d, k| + 2}{2}\right] - \frac{1}{2} = \frac{|d, k| + 1}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad d = 4d_0 \qquad \text{et} \quad d = 4d_0 - 1$$

(11) $$\left[\frac{|d, k| + 2}{2}\right] - \frac{1}{2} = \frac{|d, k| + 1}{2} \qquad \text{pour} \quad d = 4d_0 - 2 \quad \text{et} \quad d = 4d_0 - 3\,.$$

Alors, en vertu de (10), (11) on a de nouveau $y \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{(|d,k|+1)/2})$, ce qui est (6).

Ainsi, nous avons vérifier que nos conditions (6) sont essentiellement moins restrictives que (7) de Ladyženskaja.

Un résultat tout à fait analogue est obtenable pour l'excitation h (avec une différence plus grande en notre faveur).

10,5. Encore quelques mots sur la théorie de L. Maurin dans [6]. Sans tenir compte qu'il s'y agit des problèmes „locaux", on peut comparer les conditions sur les valeurs initiales et sur l'excitation. A titre d'exemple prenons les valeurs initiales. L. Maurin exige (dans notre notation)

(1) $$x \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^p), \quad y \in \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{p-1/2}),$$

où $p = [\frac{1}{4}d] + 2$.

On voit clair que cela implique toujours 10,4 (6) et, en plus, que les conditions (1) sont essentiellement plus restrictives que 10,4 (6).

10,6. Il est clair que la détermination des valeurs et de l'excitation admissibles par intermédiaire des puissances de l'opérateur $\mathbf{D}$ est formellement simple, mais difficile à réaliser dans les cas concrets.

Les critères plus restrictifs, mais plus appropriés pour application et indépendents de l'opérateur $\mathbf{D}$, se trouvent dans les appendices des théorèmes des sections 7 et 8.

Travaux cités

[1] *B. Sz.-Nagy:* Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Berlin—Heidelberg—New York, 1967.

[2] *F. Riesz, B. Sz.-Nagy:* Leçons d'analyse fonctionnelle, Budapest, 1952.

[3] *V. I. Smirnov:* Cours de mathématiques supérieures, vol. V. Moscou, 1960 (en russe — il y a une traduction allemande).

[4] *J. Nečas:* Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques, Prague, 1967.

[5] *K. Maurin:* Méthodes d'espaces de Hilbert, Moscou, 1965 (en russe — édition originale en polonais, il y a aussi une édition anglaise).

[6] *L. Maurin:* Über die Fouriersche Lösung von gemischten Problemen ..., Studia math., *16* (1958), p. 200—229.

[7] *O. A. Ladyženskaja:* Problème mixte pour l'équation hyperbolique, Moscou, 1953 (en russe).

[8] *K. Yosida:* Functional Analysis, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1965.

[9] *E. Hille - R. S. Phillips:* Functional analysis and semi-groups. Providence, 1957.

[10] *Ju. M. Berezanskij:* Décomposition en fonctions propres des opérateurs autoadjoints. Kiev, 1965 (en russe).

[11] *M. Sova:* Réactivité des opérateurs elliptiques dirichletiens (en préparation).

[12] *M. Sova:* Evolution linéaire isochrone (en préparation).

Adresse de l'auteur: Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV v Praze).