Czechoslovak Mathematical Journal, 20 (95) 1970, Praha

ÜBER GITTERPUNKTE IN MEHRDIMENSIONALEN ELLIPSOIDEN

BOHUSLAV DIVIŠ, Praha

(Eingelangt am 4. April 1969)

Es sei σ ganz, $\sigma \geqq 2$; weiter seien $r_j \geqq 1$, ganz $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$. In dieser Abhandlung betrachten wir ausschließlich quadratische Formen der Gestalt

$$(1) \qquad Q(u) = \sum_{j=1}^{\sigma} \alpha_j(u_{1,j}^2 + u_{2,j}^2 + \ldots + u_{r_j,j}^2)\,, \quad \alpha_j > 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)\,.$$

Bezeichnen wir mit $A_Q(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid $Q(u) \leqq x$, d. h.

$$A_Q(x) = \sum_{Q(u) \leqq x} 1\,.$$

Mit $V_Q(x)$ bezeichnen wir den Inhalt dieses Ellipsoides und setzen

$$P_Q(x) = A_Q(x) - V_Q(x)\,.$$

Für jede gegebene Form Q bedeute $f(Q)$ die untere Grenze derjenigen ω, für welche

$$P_Q(x) = O(x^\omega)$$

ist. Mit anderen Worten: wenn wir kurz f statt $f(Q)$ schreiben, für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$(2) \qquad P_Q(x) = O(x^{f+\varepsilon})\,; \qquad P_Q(x) = \Omega(x^{f-\varepsilon})\,.$$

Um das Hauptergebnis dieser Arbeit ausdrücken zu können, ist es notwendig, noch eine Bezeichnung einzuführen. Es sei $k \geqq 1$, ganz, δ_j seien reell $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Mit $\beta(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k)$ bezeichnen wir die obere Grenze derjenigen ω, für welche das System der Ungleichungen

$$\left|\delta_j - \frac{p_j}{q}\right| < \frac{1}{q^\omega} \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

unendlich viele Lösungen mit ganzzahligen $(k + 1)$-Tupeln $\{p_{1n}, p_{2n}, \ldots, p_{kn}; q_n\}_{n=1}^{\infty}$, $q_n \to +\infty$ hat. In der vorliegenden Arbeit beweisen wir folgenden

Satz 1. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, *ganz*, $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; *sei* $\beta = \beta(\alpha_2/\alpha_1, \alpha_3/\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_\sigma/\alpha_1)$. *Weiter seien* $r_j \geqq 2\beta/(\beta - 1)$, *ganz* $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, $r = r_1 + r_2 + \ldots \ldots + r_\sigma$. *Dann ist für die Formen der Gestalt* (1)

$$f(Q) = \frac{r}{2} - 1 - \frac{1}{\beta - 1}.$$

Dabei setzen wir für $\beta = +\infty$: $1/(\beta - 1) = 0$, $2\beta/(\beta - 1) = 2$. Diese Behauptung war schon früher mit einer ziemlich ausführlichen Einleitung in die Problematik ohne Beweis veröffentlicht (vgl. [3]). Die Kenntnis der eben zitierten Arbeit ist empfehlenswert, jedoch nicht erforderlich. Zum Beweis wurde die von V. Jarník in den unten zitierten Arbeiten ausgearbeitete Methode benutzt. Zunächst wollen wir unsere Aufgabe etwas anders formulieren und gleichzeitig vereinfachen. Nach (2) ist unser Satz mit diesen zwei Behauptungen gleichbedeutend: für jedes $\varepsilon > 0$ ist es

$$P_Q(x) = O(x^{r/2 - 1 - 1/(\beta - 1) + \varepsilon}), \tag{3}$$

$$P_Q(x) = \Omega(x^{r/2 - 1 - 1/(\beta - 1) - \varepsilon}). \tag{4}$$

Behauptung (4) ist bekannt (vgl. [2]). Weiter ist der Satz 1 im Falle $\beta = +\infty$ auch bekannt (vgl. [1]). Statt des Satzes 1 genügt es also folgende Behauptung zu beweisen:

Satz 2. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, *ganz*, $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$; *sei* $\beta = \beta(\alpha_2/\alpha_1, \alpha_3/\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_\sigma/\alpha_1)$. *Weiter seien* $r_j \geqq 2\beta/(\beta - 1)$, *ganz* $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, $r = r_1 + r_2 + \ldots \ldots + r_\sigma$. *Überdies sei* $\beta < \gamma < +\infty$. *Dann ist für die Formen der Gestalt* (1) *für jedes* $\varepsilon > 0$

$$P_Q(x) = O(x^{r/2 - 1 - 1/(\gamma - 1) + \varepsilon}).$$

Zunächst beweisen wir zwei Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Setzen wir* $\|\zeta\| = \min\limits_{p \text{ ganz}} |\zeta - p|$ *für reelle* ζ. *Weiter sei* $k \geqq 1$, *ganz*; δ_j $(1 \leqq j \leqq k)$ *seien reell, sei* $\beta = \beta(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k)$, $\beta < \gamma < +\infty$. *L und M seien positiv. Dann ist die Anzahl* ν *der ganzen Zahlen* z, *welche den Ungleichungen*

$$1 \leqq z \leqq M, \quad \|z\delta_j\| < L \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \tag{5}$$

genügen, höchstens gleich $cL^{1/(\gamma - 1)}M$, *wobei die Konstante* c *nur von* δ_j $(j = 1, 2, \ldots \ldots, k)$ *und* γ *abhängt.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $\nu \geqq 1$, $L < \frac{1}{4}$ und seien $1 \leqq z_1 < z_2 < \ldots < z_\nu \leqq M$ diejenigen ganzen Zahlen, für welche (5) gilt. Bezeichnen wir mit ω die kleinste natürliche Zahl, so daß $\|\omega\delta_j\| < 2L$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ ist. Bemerken wir, daß $\|\zeta_1 \pm \zeta_2\| \leqq \|\zeta_1\| + \|\zeta_2\|$ für alle reellen ζ_1, ζ_2 ist. Es ist dann $z_1 \geqq \omega$, $z_2 - z_1 \geqq \omega$, $z_3 - z_2 \geqq \omega, \ldots, z_\nu - z_{\nu-1} \geqq \omega$, also $z_\nu \geqq \nu\omega$. Weiter folgt aus der Definition von β und γ die Existenz eines solchen j_0, $1 \leqq j_0 \leqq k$, so daß $\|\omega\delta_{j0}\| \geqq c_1/\omega^{\gamma-1}$ ist, wobei die Konstante c_1 nur von δ_j $(j = 1, 2, \ldots, k)$ und γ abhängt. Nach der Definition von ω haben wir also

$$2L > \|\omega\delta_{j0}\| \geqq \frac{c_1}{\omega^{\gamma-1}} \geqq c_1\left(\frac{\nu}{z_\nu}\right)^{\gamma-1} \geqq c_1\left(\frac{\nu}{M}\right)^{\gamma-1},$$

woraus folgt

$$\nu \leqq \left(\frac{2}{c_1}\right)^{1/(\gamma-1)} L^{1/(\gamma-1)} M .$$

Schreiben wir c statt $(2/c_1)^{1/(\gamma-1)}$, so ist der Hilfssatz bewiesen.

Hilfssatz 2. *Es sei $\sigma \geqq 2$, ganz, $\alpha_j > 0$, $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, $\beta = \beta(\alpha_2/\alpha_1, \alpha_3/\alpha_1, \ldots \ldots, \alpha_\sigma/\alpha_1)$, $\beta < \gamma < +\infty$. Weiter sei $D > 0$, $x > 1$, $\varepsilon > 0$. Schließlich seien l, m_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, n_j $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$ ganze nichtnegative Zahlen, $2^{m_j} \leqq \sqrt{x}$ $(j = = 1, 2, \ldots, \sigma)$. Dann ist die Anzahl der ganzzahligen Systeme $\{h_1, k_1; h_2, k_2; \ldots; h_\sigma, k_\sigma\}$, welche den Ungleichungen*

$$2^{n_\sigma}k_\sigma \leqq \ldots \leqq 2^{n_3}k_3 \leqq 2^{n_2}k_2 , \tag{6}$$

$$\left|\frac{h_1}{k_1}\frac{1}{\alpha_1} - \frac{h_j}{k_j}\frac{1}{\alpha_j}\right| < \frac{D}{2^{n_j}k_j\sqrt{x}} \quad (j = 2, 3, \ldots, \sigma), \tag{7}$$

$$2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}, \quad 2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma) \tag{8}$$

genügen, höchstens gleich

$$d(\varepsilon)\, 2^{(l+m_2+m_3+\ldots+m_\sigma)(1+\varepsilon)+(m_1+m_2+\ldots+m_{\sigma-1}-n_\sigma)/(\gamma-1)}\, x^{-1/2(\gamma-1)} .$$[1])

Beweis. Aus den Ungleichungen (7) folgt

$$\left|h_1k_j\frac{\alpha_j}{\alpha_1} - h_jk_1\right| < d\,\frac{k_1}{2^{n_j}\sqrt{x}} < d\,\frac{k_1k_j}{2^{n_\sigma}k_\sigma\sqrt{x}} \quad (j = 2, 3, \ldots, \sigma),\tag{9}$$[2])

woraus wir erhalten

$$\left|h_1\prod_{\mu=2}^{\sigma}k_\mu\frac{\alpha_j}{\alpha_1} - h_j\prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq j}}^{\sigma}k_\mu\right| < d\,\frac{\prod_{\mu=1}^{\sigma-1}k_\mu}{2^{n_\sigma}\sqrt{x}} < d\,2^{m_1+m_2+\ldots+m_{\sigma-1}-n_\sigma}x^{-1/2}$$

[1]) Mit $d(\varepsilon)$ bezeichnen wir unterschiedslos positive Konstanten, die nur von σ, α_1, $\alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_\sigma$, γ, D, ε abhängen.

[2]) Mit d bezeichnen wir unterschiedslos positive Konstanten, die nur von σ, α_1, $\alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_\sigma$, γ, D abhängen.

für $j = 2, 3, \ldots, \sigma$. Es ist also

$$\left\| h_1 k_2 k_3 \ldots k_\sigma \frac{\alpha_j}{\alpha_1} \right\| < d\, 2^{m_1 + m_2 + \ldots + m_{\sigma-1} - n_\sigma} x^{-1/2} \quad (j = 2, 3, \ldots, \sigma).$$

Nach dem Hilfssatz 1 kommt es mit Hinsicht auf $h_1 k_2 k_3 \ldots k_\sigma < 2^\sigma \,.\, 2^{l + m_2 + m_3 + \ldots + m_\sigma}$ für das Produkt $h_1 k_2 k_3 \ldots k_\sigma$ höchstens

$$d 2^{l + m_2 + m_3 + \ldots + m_\sigma + (m_1 + m_2 + \ldots + m_{\sigma-1} - n_\sigma)/(\gamma - 1)} x^{-1/2(\gamma-1)}$$

Werte in Betracht. Wegen (9) und mit Hinsicht auf $dk_1/2^{n_j} \sqrt{x} < d$ (denn $2^{m_1} \leqq \sqrt{x}$) entspricht jedem Wert des Produktes $h_1 k_j$ höchstens d Werte für das Produkt $h_j k_1$ und es ist $h_j k_1 < d\, 2^{l + m_j}$ $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$. Weil die Anzahl der Teiler einer ganzen Zahl X für jedes $\eta > 0$ gleich $O(X^\eta)$ ist, haben wir bei gegebenem $h_1 k_2 k_3 \ldots k_\sigma$ für das Produkt $h_1 k_j$ höchstens $d(\eta)\, 2^{(l + m_2 + m_3 + \ldots + m_\sigma)\eta}$ Möglichkeiten $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, also höchstens $d(\eta)\, 2^{(l + m_2 + m_3 + \ldots + m_\sigma)\eta}$ Möglichkeiten für das Produkt $h_j k_1$ $(j = = 2, 3, \ldots, \sigma)$. Bei gegebenem $h_1 k_j$ haben wir höchstens $d(\eta)\, 2^{(l + m_2 + \ldots + m_\sigma)\eta}$ Möglichkeiten für h_1, k_j $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$, bei gegebenem $h_j k_1$ haben wir höchstens $d(\eta)$. $.\, 2^{(l + m_2 + m_3 + \ldots + m_\sigma)\eta}$ Möglichkeiten für k_1, h_j $(j = 2, 3, \ldots, \sigma)$. Wir haben also bei gegebenem $h_1 k_2 k_3 \ldots k_\sigma$ höchstens $d(\eta)\, 2^{(l + m_2 + m_3 + \ldots + m_\sigma) 4\sigma\eta}$ Möglichkeiten für die Anzahl der Systeme $\{h_1, k_1; h_2, k_2; \ldots; h_\sigma, k_\sigma\}$. Schreiben wir ε statt $4\sigma\eta$, so ist der Hilfssatz bewiesen.

Beweis des Satzes 2. $\sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma, r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\sigma, \beta, Q(u), A_Q(x), V_Q(x), P_Q(x)$ mögen die im Satz 1 definierte Bedeutung haben. Sei $\beta < +\infty$, $\beta < \gamma < +\infty$. Wir setzen $\theta(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-m^2 s}$ für $\operatorname{Re} s > 0$,

$$(10) \qquad A = \operatorname*{Max}_{1 \leqq j \leqq \sigma} \frac{2\pi}{\alpha_j}, \quad z = x^{-1/(\beta-1)}, \quad s = \frac{1}{x} + it \quad (t \text{ reell}).$$

Dann gilt (vgl. [2], §2)

$$(11) \qquad P_Q(x) = O\left(x^{r/4} + x^{r/2-1} z + \frac{1}{z} \int_{A/\sqrt{x}}^{\infty} \left|\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \ldots \theta^{r_\sigma}(\alpha_\sigma s)\right| \operatorname{Min}(1, tz) \frac{dt}{t^2}\right).$$

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß unter unseren Voraussetzungen immer $\frac{1}{2}r - 1 - 1/(\beta - 1) \geqq \frac{1}{4}r$ ist. Es ist nämlich immer $\beta \geqq \sigma/(\sigma - 1)$. Daraus folgt, daß es folgendes zu beweisen genügt: für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$(12) \quad \frac{1}{z} \int_{A/\sqrt{x}}^{\infty} \left|\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \ldots \theta^{r_\sigma}(\alpha_\sigma s)\right| \operatorname{Min}(1, tz) \frac{dt}{t^2} = O\left(x^{r/2 - 1 - 1/(\gamma-1) + \varepsilon}\right) \left(s = \frac{1}{x} + it\right).$$

Wir legen jetzt bei gegebenem $x > 1$ auf das Intervall $-\infty < t < +\infty$ alle Farey-Brüche h/k, wobei $h \gtreqless 0$, $0 < k \leqq \sqrt{x}$, $(h, k) = 1$ und konstruieren noch ihre Medianten, d. h. alle Zahlen $(h + \bar{h})/(k + \bar{k})$, wo h/k, $\bar{h}/\bar{k}$ zwei benachbarte unter unseren Farey-Brüchen sind. Wir bezeichnen mit $B_{h,k}$ das linksseitig abgeschlossene, rechtsseitig offene Intervall, dessen Endpunkte zwei benachbarte Medianten sind und welches den Punkt h/k enthält. Diese Intervalle überdecken dann lückenlos die ganze reelle Achse und sind paarweise punktfremd. Jetzt ist folgendes bekannt (vgl. [1]): Wenn t im Intervall $(2\pi/\alpha_j)\, B_{h,k}$ [3]) liegt, dann ist

$$(13) \qquad |\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{k}} \operatorname{Min}\left(\sqrt{x}, \frac{1}{\left|t - \frac{2\pi}{\alpha_j}\frac{h}{k}\right|}\right)^{4)} \quad \left(\operatorname{Min}\left(a, \frac{1}{0}\right) = a\right).$$

Bekanntlich ist weiter

$$(14) \qquad B_{h,k} \subset \left\langle \frac{h}{k} - \frac{1}{k\sqrt{x}}, \frac{h}{k} + \frac{1}{k\sqrt{x}} \right).$$

Zu jedem t unseres Integrationsintervalles $\langle A/\sqrt{x}, \infty)$ gibt es jetzt eindeutig 2σ Zahlen $h_1, k_1, \ldots, h_\sigma, k_\sigma$, so daß t im Durchschnitt der σ Intervalle $(2\pi/\alpha_1)\, B_{h_1,k_1}, \ldots$ $\ldots, (2\pi/\alpha_\sigma)\, B_{h_\sigma,k_\sigma}$ liegt. Wenn t im Durchschnitt der Intervalle $(2\pi/\alpha_1)\, B_{h_1,k_1}, \ldots$ $\ldots, (2\pi/\alpha_\sigma)\, B_{h_\sigma,k_\sigma}$ liegt, dann gibt es nach (14) genau ein System der ganzen nichtnegativen Zahlen $(n_1, n_2, \ldots, n_\sigma)$, so daß

$$(15) \qquad \frac{1}{2^{n_j+1} k_j \sqrt{x}} < \left|\frac{\alpha_j}{2\pi} t - \frac{h_j}{k_j}\right| \leqq \frac{1}{2^{n_j} k_j \sqrt{x}} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

ist, mit Ausnahme der Punkte $t = 2\pi h_j/\alpha_j k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$.

Wir definieren jetzt abzählbar viele Mengen $\mathfrak{M}(h, k, n) = \mathfrak{M}(h_1, k_1, n_1; \ldots$ $\ldots; h_\sigma, k_\sigma, n_\sigma)$ folgenderweise: wenn $h_1, \ldots, h_\sigma, k_1, \ldots, k_\sigma, n_1, \ldots, n_\sigma$ ganze Zahlen sind, so daß $h_j > 0$, $0 < k_j \leqq \sqrt{x}$, $(h_j, k_j) = 1$, $n_j \geqq 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, sei $\mathfrak{M}(h, k, n)$ Menge derjenigen t, welche im Durchschnitt der Intervalle $(2\pi/\alpha_j)\, B_{h_j,k_j}$ $(j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \sigma)$, $\langle A/\sqrt{x}, \infty)$ liegen und die Ungleichungen (15) erfüllen. Die Mengen $\mathfrak{M}(h, k, n)$ sind paarweise disjunkt und überdecken das ganze Intervall $\langle A/\sqrt{x}, \infty)$ mit Ausnahme abzählbar vieler Punkte $t = 2\pi h_j/\alpha_j k_j$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$. Um (12) zu beweisen, genügt es also zu zeigen, daß für jedes $\varepsilon > 0$ (es genügt hinreichend klein)

(16)

$$\sum_{\substack{h_1, k_1, n_1 \\ \cdots\cdots \\ h_\sigma, k_\sigma, n_\sigma}} \int_{\mathfrak{M}(h,k,n)} |\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \ldots \theta^{r_\sigma}(\alpha_\sigma s)| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{tz}, 1\right) \frac{\mathrm{d}t}{t} = O(x^{r/2 - 1 - 1/(\gamma - 1) + \varepsilon(1/4 + 2/(\beta - 1))})$$

mit $s = 1/x + it$ ist.

---

[3]) Wenn $I = \langle a_1, a_2)$ und $a_3 > 0$, dann bedeute $a_3 I$ das Intervall $\langle a_1 a_3, a_2 a_3)$.

[4]) Mit c bezeichnen wir unterschiedslos positive Konstanten, welche nur von $\sigma, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_\sigma, r_1, r_2, \ldots, r_\sigma, \gamma$ abhängen.

Aus Symmetriegründen beschränken wir uns dabei auf jene $\mathfrak{M}(h, k, n)$, für welche

$$2^{n_1}k_1 \geqq 2^{n_2}k_2 \geqq \ldots \geqq 2^{n_\sigma}k_\sigma \tag{17}$$

gilt. Diese Mengen $\mathfrak{M}(h, k, n)$ werden wir weiter folgendermaßen klassifizieren. Wir sagen, daß die Menge $\mathfrak{M}(h, k, n)$ zur Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$ (l, m_j, n_j ganz, nichtnegativ) gehört, wenn $2^l \leqq h_1 < 2^{l+1}$, $2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ ist. Jede Menge $\mathfrak{M}(h, k, n)$ gehört genau zu einer Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$. Dabei können wir uns nur auf jene $\mathfrak{K}(l, m, n)$ beschränken, für welche $2^{m_j} \leqq \sqrt{x}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ ist. Soll die Menge $\mathfrak{M}(h, k, n)$ der Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$ nichtleer sein, so muß nach (15) und wegen (17)

$$\left|\frac{h_1}{k_1}\frac{1}{\alpha_1} - \frac{h_j}{k_j}\frac{1}{\alpha_j}\right| < \frac{c}{2^{n_j}k_j\sqrt{x}} \quad (j = 2, 3, \ldots, \sigma) \tag{18}$$

gelten. Nach dem Hilfssatz 2 ist die Anzahl der nichtleeren Mengen $\mathfrak{M}(h, k, n)$ der Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$ für jedes $\varepsilon > 0$ höchstens gleich

$$c(\varepsilon)\, 2^{(l+m_2+m_3+\ldots+m_\sigma)(1+\varepsilon)+(m_1+m_2+\ldots+m_{\sigma-1}-n_\sigma)/(\gamma-1)}\, x^{-1/2(\gamma-1)}\,. \tag{19}$$ [5])

Wir bemerken noch:

1. Ist $\mathfrak{M}(h, k, n)$ eine nichtleere Menge der Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$, dann ist ihr Maß wegen (15) höchstens gleich $c/2^{m_1+n_1}\sqrt{x}$.
2. Ist $t \in \mathfrak{M}(h, k, n)$ der Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$, dann ist nach (13), (15)

$$|\theta(\alpha_j s)| < \frac{c}{\sqrt{2^{m_j}}} \operatorname{Min}\left(\sqrt{x}, \sqrt{2^{m_j+n_j}}\sqrt[4]{x}\right) \quad (1 \leqq j \leqq \sigma)\,.$$

3. Wenn t in der Menge $\mathfrak{M}(h, k, n)$ der Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$ liegt, dann ist wegen (14) $|(\alpha_1/2\pi)\, t - h_1/k_1| \leqq 1/k_1\sqrt{x}$, also $c\, 2^{l-m_1} < t < c\, 2^{l-m_1}$ für $x > c$.
4. Die Anzahl der nichtleeren Mengen $\mathfrak{M}(h, k, n)$ der Klasse $\mathfrak{K}(l, m, n)$ haben wir nach oben mit (19) abgeschätzt.

Es sei jetzt ε mit $0 < \varepsilon < \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2}, \operatorname{Min}_{1 \leqq j \leqq \sigma} \frac{1}{4}(r_j - 2\gamma/(\gamma - 1))\right)$ gegeben und wir untersuchen den linken Ausdruck in (16). Zunächst schätzen wir:

$$\operatorname{Min}\left(\frac{1}{tz}, 1\right) \leqq \left(\frac{1}{tz}\right)^{2\varepsilon} = x^{2\varepsilon/(\beta-1)}\,\frac{1}{t^{2\varepsilon}} \quad \text{für} \quad \varepsilon < \tfrac{1}{2}\,. \tag{20}$$

---

[5]) Mit $c(\varepsilon)$ bezeichnen wir unterschiedslos positive Konstanten, die nur von σ, α_1, α_2, ..., α_σ, r_1, r_2, ..., r_σ, γ, ε abhängen.

Weiter schätzen wir (vgl. die Bemerkungen 1.–4.)

$$\sum_{\substack{h_1,k_1,n_1\\ \vdots \\ h_\sigma,k_\sigma,n_\sigma}} \int_{\mathfrak{M}(h,k,n)} \left|\theta^{r_1}(\alpha_1 s) \ldots \theta^{r_\sigma}(\alpha_\sigma s)\right| \frac{\mathrm{d}t}{t^{1+2\varepsilon}} \leqq c(\varepsilon) \sum_{\substack{l,m_1,n_1\\ \vdots \\ m_\sigma,n_\sigma}} \frac{2^{m_1(1+2\varepsilon)}}{2^{l(1+2\varepsilon)}} \frac{1}{2^{m_1+n_1}\sqrt{x}} \times$$

$$\times\, 2^{(l+m_2+\ldots+m_\sigma)(1+\varepsilon)+(m_1+\ldots+m_{\sigma-1}-n_\sigma)/(\gamma-1)} x^{-1/2(\gamma-1)} \prod_{j=1}^{\sigma} \frac{x^{r_j/4}}{2^{m_j r_j/2}} \times$$

$$\times \operatorname{Min}\left(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2+n_j r_j/2}\right) \leqq c(\varepsilon)\, x^{r/4-1/2-1/2(\gamma-1)} \sum_{m_1,n_1} 2^{m_1(1/(\gamma-1)+2\varepsilon-r_1/2)-n_1} \times$$

$$\times \operatorname{Min}\left(x^{r_1/4}, 2^{m_1 r_1/2+n_1 r_1/2}\right) \prod_{j=2}^{\sigma-1} \sum_{m_j,n_j} 2^{m_j(1+\varepsilon+1/(\gamma-1)-r_j/2)} \operatorname{Min}\left(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2+n_j r_j/2}\right) \times$$

$$\times \sum_{m_\sigma,n_\sigma} 2^{m_\sigma(1+\varepsilon-r_\sigma/2)-n_\sigma/(\gamma-1)} \operatorname{Min}\left(x^{r_\sigma/4}, 2^{m_\sigma r_\sigma/2+n_\sigma r_\sigma/2}\right).$$

Dabei ist wegen (17) und mit Hinsicht auf $2^{m_j} \leqq k_j < 2^{m_j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$ über solche $m_1, n_1, \ldots, m_\sigma, n_\sigma$ zu summieren, für welche

$$(21) \qquad m_1 + n_1 \geqq m_2 + n_2 \geqq \ldots \geqq m_\sigma + n_\sigma\,, \quad 2^{m_j} \leqq \sqrt{x} \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

ist. Folglich haben wir

$$\sum_{2^{m_\sigma+n_\sigma} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_\sigma(1+\varepsilon-r_\sigma/2)-n_\sigma/(\gamma-1)} \operatorname{Min}\left(x^{r_\sigma/4}, 2^{m_\sigma r_\sigma/2+n_\sigma r_\sigma/2}\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{2^{m_\sigma+n_\sigma} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_\sigma(1+\varepsilon)+n_\sigma(r_\sigma/2-1/(\gamma-1))} \leqq c(\varepsilon) \sum_{2^{n_\sigma} \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{n_\sigma}}\right)^{1+\varepsilon} 2^{n_\sigma(r_\sigma/2-1/(\gamma-1))} \leqq$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{1/2+\varepsilon/2} \sum_{2^{n_\sigma} \leqq \sqrt{x}} 2^{n_\sigma(r_\sigma/2-1-1/(\gamma-1)-\varepsilon)} \leqq c(\varepsilon)\, x^{r_\sigma/4-1/2(\gamma-1)}\,,$$

als

$$\varepsilon < \frac{r_\sigma}{2} - \frac{\gamma}{\gamma-1}$$

ist.

$$\sum_{2^{m_\sigma+n_\sigma} > \sqrt{x}} 2^{m_\sigma(1+\varepsilon-r_\sigma/2)-n_\sigma/(\gamma-1)} \operatorname{Min}\left(x^{r_\sigma/4}, 2^{m_\sigma r_\sigma/2+n_\sigma r_\sigma/2}\right) \leqq$$

$$\leqq x^{r_\sigma/4} \sum_{2^{m_\sigma+n_\sigma} > \sqrt{x}} 2^{m_\sigma(1+\varepsilon-r_\sigma/2)-n_\sigma/(\gamma-1)} \leqq c x^{r_\sigma/4} \sum_{2^{m_\sigma} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_\sigma(1+\varepsilon-(r_\sigma/2))} \left(\frac{2^{m_\sigma}}{\sqrt{x}}\right)^{1/(\gamma-1)} \leqq$$

$$\leqq c x^{r_\sigma/4-1/2(\gamma-1)} \sum_{2^{m_\sigma} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_\sigma(1+\varepsilon-r_\sigma/2+1/(\gamma-1))} \leqq c(\varepsilon)\, x^{r_\sigma/4-1/2(\gamma-1)}\,,$$

als

$$\varepsilon < \frac{r_\sigma}{2} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

ist.

Jetzt sei $2 \leqq j \leqq \sigma - 1$. Wir erhalten (vgl. (21))

$$\sum_{2^{m_j+n_j} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_j(1+\varepsilon+1/(\gamma-1)-r_j/2)} \operatorname{Min}\left(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{2^{m_j+n_j} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_j(1+\varepsilon+1/(\gamma-1))+n_j r_j/2} \leqq c \sum_{2^{m_j} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_j(1+\varepsilon+1/(\gamma-1))} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{m_j}}\right)^{r_j/2} \leqq$$

$$\leqq c x^{r_j/4} \sum_{2^{m_j} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_j(1+\varepsilon+1/(\gamma-1)-r_j/2)} \leqq c(\varepsilon)\, x^{r_j/4},$$

als

$$\varepsilon < \frac{r_j}{2} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

ist.

$$\sum_{2^{m_j+n_j} > \sqrt{x}} 2^{m_j(1+\varepsilon+1/(\gamma-1)-r_j/2)} \operatorname{Min}\left(x^{r_j/4}, 2^{m_j r_j/2 + n_j r_j/2}\right) \leqq$$

$$\leqq x^{r_j/4} \sum_{2^{m_j+n_j} > \sqrt{x}} 2^{m_j(1+\varepsilon+1/(\gamma-1)-r_j/2)} \leqq c(\varepsilon)\, x^{r_j/4} \sum_{n_j \leqq m_1+n_1} 1 \leqq c(\varepsilon)\, x^{r_j/4} (m_1 + n_1),$$

als

$$\varepsilon < \frac{r_j}{2} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}$$

ist.

Schließlich haben wir

$$\sum_{2^{m_1+n_1} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_1(1/(\gamma-1)+2\varepsilon-r_1/2)-n_1} \operatorname{Min}\left(x^{r_1/4}, 2^{m_1 r_1/2 + n_1 r_1/2}\right) \leqq$$

$$\leqq \sum_{2^{m_1+n_1} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_1(1/(\gamma-1)+2\varepsilon)+n_1(r_1/2-1)} \leqq c(\varepsilon) \sum_{2^{n_1} \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{2^{n_1}}\right)^{1/(\gamma-1)+2\varepsilon} 2^{n_1(r_1/2-1)} \leqq$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{1/2(\gamma-1)+\varepsilon} \sum_{2^{n_1} \leqq \sqrt{x}} 2^{n_1(r_1/2-1-1/(\gamma-1)-2\varepsilon)} \leqq c(\varepsilon)\, x^{r_1/4-1/2},$$

als

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\left(\frac{r_1}{2} - \frac{\gamma}{\gamma - 1}\right)$$

ist.

$$\sum_{2^{m_1+n_1} > \sqrt{x}} 2^{m_1(1/(\gamma-1)+2\varepsilon-r_1/2)-n_1} \operatorname{Min}\left(x^{r_1/4}, 2^{m_1 r_1/2+n_1 r_1/2}\right)(m_1+n_1)^\sigma \leqq$$

$$\leqq x^{r_1/4} \sum_{2^{m_1+n_1} > \sqrt{x}} 2^{m_1(1/(\gamma-1)+2\varepsilon-r_1/2)-n_1} (m_1+n_1)^\sigma \leqq$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{r_1/4} \sum_{2^{m_1+n_1} > \sqrt{x}} 2^{m_1(1/(\gamma-1)+2\varepsilon-r_1/2)-n_1}\, 2^{(m_1+n_1)\varepsilon/2} \leqq$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{r_1/4} \sum_{2^{m_1} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_1(1/(\gamma-1)-r_1/2+5\varepsilon/2)} \left(\frac{2^{m_1}}{\sqrt{x}}\right)^{1-\varepsilon/2} \leqq$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{r_1/4-1/2+\varepsilon/4} \sum_{2^{m_1} \leqq \sqrt{x}} 2^{m_1(\gamma/(\gamma-1)+2\varepsilon-r_1/2)} \leqq c(\varepsilon)\, x^{r_1/4-1/2+\varepsilon/4},$$

als

$$\varepsilon < \operatorname{Min}\left(2, \frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{2} - \frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\right)$$

ist.

Aus unseren Abschätzungen folgt, daß der linke Ausdruck in (16) höchstens gleich (vgl. (20))

$$c(\varepsilon) \exp\left\{\left(\frac{r}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2(\gamma-1)} + \frac{r_\sigma}{4} - \frac{1}{2(\gamma-1)} + \frac{r_{\sigma-1}}{4} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \ldots + \frac{r_2}{4} + \frac{r_1}{4} - \frac{1}{2} + \varepsilon\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{\beta-1}\right)\right) \lg x\right\} \leqq$$

$$\leqq c(\varepsilon)\, x^{r/2-1-1/(\gamma-1)+\varepsilon(1/4+2(\beta-1))},$$

als

$$\varepsilon < \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2}, \operatorname*{Min}_{1 \leqq j \leqq \sigma} \frac{1}{4}\left(r_j - \frac{2\gamma}{\gamma-1}\right)\right)$$

ist, was zu beweisen war.

Durch geringe Modifikation des eben durchgeführten Beweises bekommen wir den

Satz 3. *Es sei* $\sigma \geqq 2$, *ganz, weiter seien* $r_j \geqq 1$, *ganz* $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, $r = r_1 + r_2 + \ldots + r_\sigma$, $\alpha_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, $\beta(\alpha_2/\alpha_1, \alpha_3/\alpha_1, \ldots, \alpha_\sigma/\alpha_1) = \beta$. *Dann gilt für jedes* $\varepsilon > 0$

$$P_Q(x) = O\left(\exp\left\{\left(\frac{r}{2} - \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{\sigma} \operatorname{Min}\left(\frac{2\beta}{\beta-1}, r_j\right) + \left(\frac{\sigma}{2} - 1\right)\frac{\beta}{\beta-1} + \varepsilon\right)\lg x\right\}\right)$$

für die Formen der Gestalt (1).

Der Satz 3 ist zwar auch für $2 \leqq r \leqq 4$ richtig, aber in diesen Fällen sind schärfere Resultate bekannt.

Alle Ergebnisse samt Beweisen lassen sich unmittelbar auf etwas allgemeinere Formen der Gestalt

$$Q(u) = \sum_{j=1}^{\sigma} \alpha_j Q_j(u_{1,j}, u_{2,j}, \ldots, u_{r_j,j}) \quad (\alpha_j > 0) \quad (j = 1, 2, \ldots, \sigma)$$

übertragen, wo die quadratischen Formen Q_j $(j = 1, 2, \ldots, \sigma)$, positiv definit sind, und ganzzahlige Koeffizienten haben.

Literaturverzeichnis

[1] *V. Jarník:* „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Math. Annalen *100* (1928), 699—721.

[2] *V. Jarník:* „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden: eine Anwendung des Hausdorffschen Maßbegriffes", Math. Zeitschrift *38* (1934), 217—256.

[3] *B. Diviš:* "On lattice points in high-dimensional ellipsoids" (preliminary communication), Comment. Math. Univ. Carolinae, Vol. *9*, fasc. 2, 199—205 (1968).

Anschrift des Verfassers: Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).