Zbyněk Nádeník

Über die Enveloppe von Zylinderflächen konstanter Breite

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 19 (1969), No. 2, 349–355

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100901

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

# ÜBER DIE ENVELOPPE VON ZYLINDERFLÄCHEN KONSTANTER BREITE

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha

(Eingelangt am 4. Juni 1968)

Eng an [4] anknüpfend verwenden wir die Voraussetzungen und Bezeichnungen aus [4], Abschn. A–C der Eingleitung, indem wir aber nur die zweimalige stetige Differenzierbarkeit der torusförmigen Enveloppe $S$ verlangen. Unter den Gegenpunkten von $S$ (s. [4], Abschn. 11) verstehen wir solche Punktepaare auf einer Charakteristik von $S$, in denen die Tangentenebenen von $S$ parallel sind, d. h. die Punkte mit den Parametern $(\alpha, u)$ und $(\alpha, -u)$.

*Angenommen, jede konvexe Zylinderfläche $Z(\alpha)$ der einparametrigen Familie mit der Hüllfläche $S$ sei konstanter Breite $B(\alpha)$. Dann ist sogar $B(\alpha) = B =$ konst., so dass $S$ als Enveloppe der konstanten Breite $B$ bezeichnet werden kann* (s. Abschn. 1).

*So eine Enveloppe hat folgende Eigenschaften*:

a) *Die Gegenpunkte von $S$ haben die Entfernung $B$ und eine gemeinsame Normale.*

b) *In den Gegenpunkten sind die Krümmungsrichtungen paarweise parallel und die Summe der entsprechenden Krümmungsradien ist der Breite $B$ gleich.*

c) *Folflich ist* (stets im $n$-dimensionalen Raum)

$$\sum_{i=1}^{n-1} R_i(\alpha, u) + \sum_{i=1}^{n-1} R_i(\alpha, -u) = (n-1)\,B\,. \tag{1}$$

*Aber auch umgekehrt, wenn in den Gegenpunkten einer Enveloppe $S$ die Gleichung* (1) *gilt, dann ist $S$ von konstanter Breite $B$.*

Wenn einer der Gegenpunkte parabolisch ist, so gilt dasselbe auch von dem anderen (s. [4], Abschn. 11) und dann ist die Summe der unbegrenzten Krümmungsradien in parallelen Krümmungsrichtungen als Grenzwert aufzufassen.

Die in den nachfolgeden Abschnitten 2 und 3 bewiesenen Behauptungen a)–c) erinnern and die wohlbekannten Eigenschaften eines Eikörpers konstanter Breite $B$ (s. [1], S. 127–128). Zwischen den Fundamentalmasszahlen so eines Körpers gelten weiter die zuerst von A. Dinghas [3] und später ohne Differenzierbarkeitsvoraussetzungen von H. Debrunner [2] bewiesenen Relationen

$$(*)\qquad 2W_{n-k} = \sum_{\varkappa=0}^{k-1} (-1)^{\varkappa} \binom{k}{\varkappa} B^{k-\varkappa} W_{n-\varkappa} \quad (k \text{ ungerade} \leqq n)\,.$$

In üblicher Bezeichnungsweise liefert (*) für $n = 3$ die Beziehungen von Blaschke für Sphäroformen

$$(**)\qquad M = 2\pi B\,, \quad V = \tfrac{1}{2}BO - \tfrac{1}{3}\pi B^3\,.$$

*Dagegen für das Volumen* $W_0$, *die Oberfläche* $nW_1$ *und die Krümmungsintegrale* $n\binom{n-1}{n-i} W_i$ ($i = 2, \ldots, n-1$; s. [4], Abschn. C der Einleitung) *der Enveloppe S konstanter Breite B gelten die Gleichungen*

$$(2)\qquad 2W_{n-k} = \sum_{\varkappa=0}^{k-2} (-1)^{\varkappa} \binom{k}{\varkappa+1} B^{k-\varkappa-1} W_{n-\varkappa-1} \quad (k \text{ gerade} \leqq n)$$

(s. Abschn. 4, 5). *Für* $n = 3$ *liefert* (2) *als Analogon zu* (**) *die einzige Beziehung*

$$(3)\qquad O = BM\,.$$

Wir übergehen zu den Beweisen.

**1.** In den Gegenpunkten $(\alpha, u)$ und $(\alpha, -u)$ von $S$ gilt für den Einheitsvektor der Flächennormale von $S$

$$(1,1)\qquad \mathbf{N}(\alpha, -u) = -\mathbf{N}(\alpha, u)\,,$$

also nach (5) aus [4] ist

$$(1,2)\qquad \cos\gamma(\alpha, -u) = -\cos\gamma(\alpha, u)\,.$$

Betreffs des in [4], Abschn. 1 eingeführten $n$-Beines kann man annehmen, dass[1])

$$(1,3)\qquad \mathbf{t}_\lambda(\alpha, -u) = -\mathbf{t}_\lambda(\alpha, u)\,.$$

Aus (1,4) in [4] und aus (1,1), (1,3) ergibt sich

$$(1,4)\qquad \omega_n^1(\alpha, -u) = -\omega_n^1(\alpha, u)\,, \quad \omega_n^\lambda(\alpha, -u) = \omega_n^\lambda(\alpha, u)\,.$$

Infolgedessen ist nach [4], (1,8)

$$(1,5)\qquad d[H(\alpha, -u) + H(\alpha, u)] =$$
$$= [-H_1(\alpha, -u) + H_1(\alpha, u)]\,\omega_n^1(\alpha, u) + [H_\lambda(\alpha, -u) + H_\lambda(\alpha, u)]\,\omega_n^\gamma(\alpha, u)\,.$$

---

[1]) Wir behalten in den Abschn. 1—3 die Verabredung von [4], Abschn. 1: der Index $\lambda$ durchläuft überall die Werte $2, \ldots, n-1$, wobei von der Einsteinschen Summationsbezeichnungsweise Gebrauch gemacht wird.

**2.** Die Gültigkeit der Beziehung

$$(2,1) \qquad H(\alpha, -u) + H(\alpha, u) = B(\alpha)\,, \quad \alpha \in \langle 0, a)$$

für die Stützfunktion $H(\alpha, u)$ von $S$ bringt zum Ausdruck das Bestehen der konstanter Breite $B(\alpha)$ der Zylinderfläche $Z(\alpha)$. Setzt man aus (2,1) in (1,5) ein, benutzt man (1,6) aus [4] und beachtet man, dass die Formen $d\alpha$ und $\omega_n^\lambda$ unabhängig sind (vgl. [4], Abschn. 1), so erhält man

$$(2,2) \qquad H_\lambda(\alpha, -u) = -H_\lambda(\alpha, u)$$

und

$$(2,3) \qquad dB(\alpha)/d\alpha = [-H_1(\alpha, -u) + H_1(\alpha, u)] \,.\, \cos \gamma(\alpha, u)\,.$$

Du hängt die linke Seite von $u$ nicht ab. Demzufolge ist

$$(2,4) \qquad B(\alpha) = \text{konst}\,.$$

in (2,1), w. z. b. w.

Nach (2,3) ist dann noch

$$(2,5) \qquad H_1(\alpha, -u) = H_1(\alpha, u)\,.$$

**3.** In ausführlicher Schreibweise lautet die durch (1,15) in [4] gegebene Parameterdarstellung von $S$ folgends

$$(3,1) \qquad \mathbf{y}(\alpha, u) = \mathbf{x}(\alpha) + H_1(\alpha, u)\, \mathbf{t}(\alpha) + \sum_{\lambda=2}^{n-1} H_\lambda(\alpha, u)\, \mathbf{t}_\lambda(\alpha, u) + H(\alpha, u)\, \mathbf{N}(\alpha, u)\,.$$

Deshalb ist nach (1,1), (1,3), (2,1) mit (2,4), (2,2) und (2,5)

$$(3,2) \qquad \mathbf{y}(\alpha, u) - \mathbf{y}(\alpha, -u) = B\mathbf{N}(\alpha, u)\,,$$

woraus sich die Behauptungen a) sofort ergeben.

Den Beweis von b) kann man auf Grund von (3,2) und (1,1) auf dieselbe Weise wie für einen konvexen Körper konstanter Breite führen; siehe [1], S. 128.

(1) folgt unmittelbar aus b). – Es gelte nun umgekehrt (1) auf einer Enveloppe $S$. Nach der ausführlich geschriebenen verallgemeinerten Weingartenschen Formel (12) aus [4] ist

$$(3,3) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} R_i(\alpha, u) = -\varrho(\alpha) : \cos \gamma(\alpha, u) + \Delta_2(H(\alpha, u)) + (n-1)\, H(\alpha, u)\,.$$

Aus (3,3) und (1) erhält man zufolge (1,2), dass

$$(3,4) \qquad \Delta_2[H(\alpha, -u) + H(\alpha, u)] + (n-1)\,[H(\alpha, u) + H(\alpha, -u)] = (n-1)\, B\,.$$

Die Lösung dieser linearen Differentialgleichung ist von der Form

$$H(\alpha, -u) + H(\alpha, u) = X(\alpha, u) + B\,, \tag{3,5}$$

wo $X(\alpha, u)$ die Lösung der zu (3,4) gehörigen homogenen Gleichung ist. Nach [4], Abschn. B kann aber die Stützfunktion der Enveloppe $S$ durch eine geeignete Translation der Grundkurve $C$ von $X(\alpha, u)$ befreit werden. Infolgedessen reduziert sich (3,5) auf (2,1) mit (2,4).

**4.** Nach den Formeln (14) und (15) aus [4] ist

$$W_i = \frac{n-i}{n}\int_C \mathscr{W}_i \,\mathrm{d}s + \frac{1}{n\binom{n}{i}}\int_\Omega \sum_{r=0}^{n-i}\binom{i+r}{i} H^r \,.\, \Delta_{n-i-r+1}(H)\,\mathrm{d}\Omega\,, \tag{4,1}$$

$$i = 0, 1, \ldots, n-1\,; \quad \Delta_1(H) = 1\,, \quad \Delta_{n+1}(H) = 0\,; \tag{4,2}$$

alle benutzten Symbole sind in den Abschnitten C, D der Einleitung von [4] erklärt.

Wenn die Enveloppe $S$ konstanter Breite $B$ ist, so ist auch jede in $(n-1)$-dimensionaler Ebene liegende $(n-2)$-dimensionale Eifläche $F(\alpha)$ (d. h. der Normalschnitt der Zylinderfläche $Z(\alpha)$; s. Abschn. A in [4]) konstanter Breite $B$ und für die Masszahlen $\mathscr{W}_i(\alpha)$ von $F(\alpha)$ bestehen die Relationen, welche aus (*) mit $n-1$ statt $n$ folgen

$$\sum_{\varkappa=0}^{2l-2}(-1)^\varkappa\binom{2l-1}{\varkappa}B^{2l-\varkappa-1}\mathscr{W}_{n-\varkappa-1} - 2\mathscr{W}_{n-2l} = 0\,; \quad l = 1, 2, \ldots; \; 2l \leqq n\,. \tag{4,3}$$

Integriert man jetzt (4,3) über die Grundkurve $C$ und setzt man dann für die Kurvenintegrale $\int_l \mathscr{W}_i\,\mathrm{d}s$ aus (4,1) ein, so erhält man nach einfachen Umformungen

$$\begin{aligned} 0 = {} & \frac{n}{2l}\left\{\sum_{\varkappa=0}^{2l-2}(-1)^\varkappa\binom{2l}{\varkappa+1}B^{2l-\varkappa-1}W_{n-\varkappa-1} - 2W_{n-2l}\right\} - \\ & - \int_\Omega \sum_{\varkappa=0}^{2l-2}\sum_{r=0}^{\varkappa+1}(-1)^\varkappa \frac{\binom{2l-1}{\varkappa}\binom{n-\varkappa+r-1}{r}}{(\varkappa+1)\binom{n}{\varkappa+1}} B^{2l-\varkappa-1}H^r \,.\, \Delta_{\varkappa-r+2}(H)\,\mathrm{d}\Omega + \\ & + \int_\Omega \sum_{r=0}^{2l} \frac{\binom{n-2l+r}{r}}{l\binom{n}{2l}} H^r \,.\, \Delta_{2l-r+1}(H)\,\mathrm{d}\Omega\,. \end{aligned} \tag{4,4}$$

Die zweite und dritte Zeile in (4,4) bringen wir auf die Form (man beachte (4,2)!)

$$(4,5) \qquad \int_\Omega \{*\}\, \mathrm{d}\Omega + \int_\Omega \sum_{j=2}^{2l} \{**\}_j \,.\, \Delta_j(H)\, \mathrm{d}\Omega\,,$$

wo $\{*\}$ keinen der Operatoren $\Delta_2, \ldots, \Delta_n$ enthält und wo folglich, wenn wir einstweilen ausser der Veränderung der Summation keine weiteren Umformungen durchführen,

$$\{*\} = \frac{1}{l} H^{2l} - \sum_{\nu=1}^{2l-1} (-1)^{\nu-1} \,.\, \frac{1}{\nu} \binom{2l-1}{\nu-1} B^{2l-\nu} H^\nu\,,$$

$$\{**\}_j = \frac{\binom{n-j+1}{n-2l}}{l\binom{n}{n-2l}} H^{2l-j+1} -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{2l-j} (-1)^{j+\nu} \,.\, \frac{\binom{2l-1}{j+\nu-2}\binom{n-j+1}{\nu}}{(j+\nu-1)\binom{n}{j+\nu-1}} B^{2l-j-\nu+1} H^\nu\,, \quad (j = 2, \ldots, 2l)\,.$$

Daraus ergibt sich weiter

$$(4,6) \qquad 2l \,.\, \{*\} = 2H^{2l} - \sum_{\nu=1}^{2l-1} (-1)^{\nu-1} \binom{2l}{\nu} B^{2l-\nu} H^\nu\,,$$

$$(4,7) \qquad \frac{2l\binom{n}{n-2l}}{\binom{n-j+1}{n-2l}} \,.\, \{**\}_j = 2H^{2l-j+1} - \sum_{\nu=0}^{2l-j} (-1)^{j+\nu} \binom{2l-j+1}{\nu} B^{2l-j-\nu+1} H^\nu\,.$$

**5.** Wir wenden uns der Untersuchung zu, wie sich die Ausdrücke rechts in (4,6) und (4,7) bei der Transformation

$$(5,1) \qquad H \to B - H$$

verhalten.

Die rechte Seite von (4,7) geht über in

$$(5,2) \qquad 2 \sum_{p=0}^{2l-j+1} (-1)^p \binom{2l-j+1}{p} B^{2l-j-p+1} H^p -$$

$$- \sum_{\nu=0}^{2l-j} \sum_{p=0}^{\nu} (-1)^{j+\nu+p} \binom{2l-j+1}{\nu} \binom{\nu}{p} B^{2l-j-p+1} H^p\,.$$

Wenn wir hier in der zweiten Zeile die Glieder mit derselben Potenz von $H$ zusammenfassen, so erhalten wir diese Zeile in der Form

$$(5,3)\qquad -\sum_{\nu=0}^{2l-j}\sum_{q=0}^{2l-j-\nu}(-1)^{j+q}\binom{2l-j+1}{\nu+q}\binom{\nu+q}{\nu}B^{2l-j-\nu+1}H^{\nu}\,.$$

Schreiben wir nun $\nu$ statt $p$ in der ersten Zeile von (5,2) und ersetzen die zweite Zeile von (5,2) durch (5,3), so gewinnt die rechte Seite von (4,7) die Gestalt

$$(5,4)\qquad 2(-1)^{j-1}\,H^{2l-j+1}+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{2l-j}\left\{2(-1)^{\nu}\binom{2l-j+1}{\nu}-\sum_{q=0}^{2l-j-\nu}(-1)^{j+q}\binom{2l-j+1}{\nu+q}\binom{\nu+q}{\nu}\right\}B^{2l-j-\nu+1}H^{\nu}\,.$$

Infolge

$$\binom{2l-j+1}{\nu+q}\binom{\nu+q}{\nu}=\binom{2l-j+1}{\nu}\binom{2l-j-\nu+1}{q}$$

nimmt (5,4) diese Form an

$$(5,5)\qquad (-1)^{j-1}\,.\left[2H^{2l-j+1}-\right.$$

$$\left.-\sum_{\nu=0}^{2l-j}\left\{2-\sum_{q=0}^{2l-j-\nu}(-1)^{j+\nu+q}\binom{2l-j-\nu+1}{q}\right\}(-1)^{j+\nu}\binom{2l-j+1}{\nu}B^{2l-j-\nu+1}H^{\nu}\right].$$

Es ist leicht zu verifizieren, dass die Summe in den Klammern $\{\ \}$ in (5,5) gleich 1 ist. Folglich nach (5,5) und (4,7)

$$(5,6)\qquad \{**\}_j|_{H-B}=(-1)^{j-1}\,\{**\}_j|_H\quad (j=2,\ldots,2l)\,.$$

Das formale Einsetzen $j=1$ in (4,7) liefert nach (4,6) die Beziehung $\{*\}= =\{**\}_1-B^{2l}/2l$ und nachdem das obige Verfahren in diesem Abschnitt auch für $j=1$ gilt, so haben wir sofort

$$(5,7)\qquad \{*\}|_{H-B}=\{*\}|_H\,.$$

**6.** Nach der Definition der Differentialoperatoren $\Delta_j\,(j=2,\ldots,n$; siehe Abschn. $D$ der Einleitung in [4]) ist offensichtlich $\Delta_j(B-H)=(-1)^{j-1}\,\Delta_j(H)$. Daraus und aus (5,6) und (5,7) ergibt sich unmittelbar, dass die Integranden aller Integrale in (4,5) gegenüber der Transformation (5,1) invariant sind.

Jetzt benutzen wir die Zerlegung des sphärischen Bildes $\Omega$ der Enveloppe $S$ auf die Teile $\Omega_e$ und $\Omega_l$ (siehe Abschn. 7 in [4]) und die Integrale in (4,5) tauschen wir nach (7,2) in [4] mit den über $\Omega_e$ und $\Omega_h$ erstreckten Integrale aus; statt (4,5) erhalten wir also die folgende Umformung der zwei letzten Zeilen in (4,4):

$$(6,1)\qquad \int_{\Omega_e}\Big[\{*\}+\sum_{j=2}^{2l}\{**\}_j\,.\,\Delta_j(H)\Big]\,\mathrm{d}\Omega_e-\int_{\Omega_h}\Big[\{*\}+\sum_{j=2}^{2l}\{**\}_j\,.\,\Delta_j(H)\Big]\,\mathrm{d}\Omega_h\,.$$

Die Abbildung der Punkte von $S$ auf ihre Gegenpunkte bedeutet für die Stützfunktion von $S$ die Transformation (5,1) und für die sphärischen Bilder der Gegenpunkte die Symmetrie in bezug auf den Nullpunkt, welche offenbar $\Omega_h$ in $\Omega_e$ und $d\Omega_h$ in $d\Omega_e$ überführt.

Daraus erhalten wir, indem wir auch die zu Beginn dieses Abschnitts bewiesene Eigenschaft der Integranden aus (4,5) in Betracht ziehen, dass die Differenz (6,1) zu Null wird. In (4,4) bleibt daher nur die erste Zeile, die sofort (2) liefert.

*Literatur*

[1] *T. Bonnesen - W. Fenchel:* Theorie der konvexen Körper. Berlin 1934, New York 1948.

[2] *H. Debrunner:* Zu einem massgeometrischen Satz über Körper konstanter Breite. Math. Nachr. *13* (1955), 165—167.

[3] *A. Dinghas:* Verallgemeinerung eines Blaschkeschen Satzes über konvexe Körper konstanter Breite. Rev. math. Un. interbalkanique *3* (1940), 17—20.

[4] *Z. Nádeník:* Über Geometrie im Grossen der Enveloppen von konvexen Zylinderflächen. Czech. Math. J. *19* (*94*), (1969), 299—317.

*Anschrift des Verfassers:* Praha 2, Trojanova 13, ČSSR (České vysoké učení technické).