Czechoslovak Mathematical Journal

Jan Kadlec; Vitalii Borisovič Korotkov

Об оценках s-чисел операторов вложения и операторов, повышающих гладкость

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 4, 678–687,688–689,690–699

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100865`

Чехословацкий математический журнал, т. 18 (93) 1968, Прага

ОБ ОЦЕНКАХ s-ЧИСЕЛ ОПЕРАТОРОВ ВЛОЖЕНИЯ И ОПЕРАТОРОВ, ПОВЫШАЮЩИХ ГЛАДКОСТЬ

ЯН КАДЛЕЦ (Jan Kadlec), Прага, и ВИТАЛИЙ БОРИСОВИЧ КОРОТКОВ, Новосибирск

(Поступило в редакцию 3/VII 1967 г.)

Задача об оценке s-чисел вполне непрерывных операторов, повышающих гладкость, изучалась в различных постановках многими авторами. Краткий обзор относящихся к этой задаче работ можно найти в монографиях И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [1], Н. Данфорда и Дж. Шварца [2].

В этой статье мы рассматриваем задачу в той постановке, в какой она рассматривалась в [1], [3], [4], [5]. В статье предлагается еще один подход к задаче, базирующийся на оценках s-чисел операторов вложения. Попутно осуществляется распространение некоторых результатов работ [4], [5] на случай пространств W_2^l с нецелым l. Рассматривается также случай $l = (l_1, \ldots, l_N)$.

Вторая часть статьи непосредственно связана с теоремой М. Г. Крейна [3] (см. также [1], стр. 157) и ее обобщением, полученным В. И. Параской [5]. Рассмотрения этой части существенно опираются на теоремы вложения для абстрактных функций. Приводятся приложения полученных результатов к оценкам s-чисел интегральных операторов с ядрами, удовлетворяющими различным условиям гладкости. В заключение второго параграфа приводится еще одно доказательство теоремы М. Г. Крейна, основанное на известном неравенстве Г. Вейля.

Третий параграф статьи посвящен получению необходимых и достаточных условий при которых выполняется некоторое неравенство, составляющее основное содержание теоремы М. Г. Крейна [3] (см. также [1], стр. 157) и ее обобщения – теоремы В. И. Параски [5].

I. Пусть H_1 и H_2 – гильбертовы пространства, V – вполне непрерывный оператор, действующий из H_1 в H_2. Согласно [1], стр. 48, можно определить s – числа оператора V равенствами

$$s_{n+1}(V) = \inf_{\{K\}_n} \|V - K_n\|_{H_1 \to H_2}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

где $\{K\}_n$ – множество всех конечномерных операторов, действующих из H_1 в H_2, ранг которых не превосходит n.

Пусть G – некоторая ограниченная область N – мерного евклидова пространства R_N, $l > 0$. Обозначим через $W_2^l(G)$ совокупность всех функций f из $L_2(G)$, имеющих конечную норму

$$\|f\|^2_{W_2{}^l(G)} = \|f\|^2_{L_2(G)} + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha f\|^2_{L_2(G)},$$

если l целое, и

$$\|f\|^2_{W_2{}^l(G)} = \|f\|^2_{W_2{}^{[l]}(G)} + \sum_{|\alpha|=[l]} \int_G \int_G \frac{|D^\alpha f(x) - D^\alpha f(y)|^2}{|x-y|^{N+2\{l\}}} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

если l нецелое; здесь через $[l]$ обозначена целая часть l, $\{l\} = l - [l]$, производные, как обычно, понимаются в обобщенном смысле.

Пусть $Q_N = \{x : x = (x_1, \ldots, x_N), |x_i| \leqq \pi, i = 1, 2, \ldots, N\}$. Обозначим через $\tilde{W}_2^l$ совокупность всех 2π-периодических по каждой переменной x_k $(k = 1, 2, \ldots, N)$ функций, принадлежащих $L_2(Q_N)$ и имеющих конечную норму:

$$\|f\|^2_{\tilde{W}_2{}^l} = \sum_{k=(k_1,\ldots,k_N)} (1 + |k_1|^{2l} + \ldots + |k_N|^{2l}) f_k^2$$

где

$$f_k = \frac{1}{(2\pi)^N} \left| \int_{Q_N} f(x)\, e^{i(k,x)} \,\mathrm{d}x \right|.$$

Известно, что для функций $f \in \tilde{W}_2^l$ норма $\|f\|_{\tilde{W}_2{}^l}$ эквивалентна норме $\|f\|_{W_2{}^l(Q_N)}$.

Лемма. *Пусть E оператор вложения пространства $\tilde{W}_2^{l+r}$ в $\tilde{W}_2^l$, $l \geqq 0$, $r > 0$. Тогда*

$$s_n(E) \leqq \frac{c}{n^{r/N}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Доказательство. Пусть $k = (k_1, \ldots, k_N)$ – целочисленный вектор и $|k| = \max_{i=1,2,\ldots,N} |k_i|$. Число всех различных целочисленных векторов k, удовлетворяющих условию $|k| \leqq m$, равно $(2m+1)^N$. Из определения s-чисел следует, что

$$s_{(2m+1)^N+1}(E) \leqq \Big\|E - \sum_{|k|\leqq m} (\cdot, e^{i(k,x)})\, e^{i(k,x)}\Big\|_{\tilde{W}_2{}^{l+r} \to \tilde{W}_2{}^l} \leqq$$

$$\leqq \sup_{f \in \tilde{W}_2{}^{l+r}} \sqrt{\left(\frac{\sum\limits_{|k|>m} (1 + |k_1|^{2l} + \ldots + |k_N|^{2l}) f_k^2}{\sum\limits_{|k|>m} (1 + |k_1|^{2l+2r} + \ldots + |k_N|^{2l+2r}) f_k^2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{(2m+1)^r} \sup_{f \in \tilde{W}_2{}^{l+r}} \sqrt{\left(\frac{\sum\limits_{|k|>m} (2m+1)^{2r} (1 + |k_1|^{2l} + \ldots + |k_N|^{2l}) f_k^2}{\sum\limits_{|k|>m} (1 + |k_1|^{2l+2r} + \ldots + |k_N|^{2l+2r}) f_k^2}\right)}$$

Т.к. $|k| > m$, то

$$\frac{(2m+1)^{2r}(1+|k_1|^{2l}+\ldots+|k_N|^{2l})}{1+|k_1|^{2l+2r}+\ldots+|k_N|^{2l+2r}} \leqq (N+1)\,3^{2r}.$$

Следовательно,

$$s_{(2m+1)^N+1}(E) \leqq \frac{3^r\sqrt{(N+1)}}{(2m+1)^r} = \frac{c_1}{(2m+1)^r}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Положив $t_m = (2m+1)^N$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, получим

$$s_{t_m+1}(E) \leqq \frac{c_1}{t_m^{r/N}}, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Пусть n, $n \geqq 3^N + 1 = t_1 + 1$, произвольное натуральное число. Тогда при некотором m_0

$$t_{m_0} + 1 \leqq n \leqq t_{m_0+1}$$

и, следовательно,

$$s_n(E) \leqq s_{t_{m_0}+1}(E) \leqq \frac{c_1}{t_{m_0}^{r/N}} = \frac{c_1}{n^{r/N}}\frac{n^{r/N}}{t_{m_0}^{r/N}} \leqq$$

$$\leqq \frac{c_1}{n^{r/N}}\left(\frac{t_{m_0+1}}{t_{m_0}}\right)^{r/N} = \frac{c_1}{n^{r/N}}\left(\frac{2_{m_0}+3}{2_{m_0}+1}\right)^r = \frac{c_2}{n^{r/N}}.$$

Таким образом,

$$s_n(E) \leqq \frac{c_2}{n^{r/N}}, \quad n \geqq 3^N + 1.$$

Отсюда следует, что

$$s_n(E) \leqq \frac{c}{n^{r/N}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Лемма доказана.

Будем говорить, что область $\Omega_N \subset R_N$ удовлетворяет $P(L; \lambda)$ – условию, если существует линейный ограниченный оператор L, действующий из $W_2^\lambda(\Omega_N)$ в $W_2^l(R_N)$ такой, что для всех $f \in W_2^\lambda(\Omega_N)$

$$(Lf)(s) = f(s)$$

почти всюду в Ω_N.

Теорема 1. *Пусть G – ограниченная область евклидова пространства R_N с границей, удовлетворяющей $P(L; l+r)$–условию*[1]*, и пусть T — линейный*

[1] Известно [6], что если граница G липшицева, то область G удовлетворяет $P(L; l+r)$-условию.

оператор, днйствующий из $W_2^l(G)$ в $W_2^{l+r}(G)$, $l \geqq 0$, $r > 0$. Обозначим через $\tilde{T}$ оператор T, рассматриваемый как оператор, действующий из $W_2^l(G)$ в $W_2^l(G)$. Тогда

$$s_n(\tilde{T}) \leqq \frac{c}{n^{r/N}}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что замыкание $\bar{G}$ области G содержится строго внутри куба Q_N. Так как граница области G удовлетворяет $P(L;\ l+r)$-условию, то существует ограниченный линейный оператор продолжения J_G, действующий из $W_2^{l+r}(G)$ в $\tilde{W}_2^{l+r}$, такой, что для любой функции $f \in W_2^{l+r}(G)$

$$P_G J_G f = f$$

где $P_G F = F(x)\,\chi_G(x)$, $\chi_G(x)$ – характеристическая функция множества G. Заметим, что P_G ограниченный линейный оператор, действующий из $W_2^l(Q_N)$ в $W_2^l(G)$.

Таким образом,

$$\tilde{T} = P_G E J_G T.$$

Следовательно,

$$s_n(\tilde{T}) \leqq \|P_G\|\ \|J_G\|\ \|T\|\ s_n(E) \leqq \|J_G\|\ \|T\|\ s_n(E) \leqq \frac{c}{n^{r/N}}.$$

Замечание I. Доказанную теорему нетрудно распространить на случай операторов, действующих из прямого произведения $W_2^{l_1}(G_N^1) \times \ldots \times W_2^{l_k}(G_N^k)$ в прямое произведение $W_2^{l_1+r}(G_N^1) \times \ldots \times W_2^{l_k+r}(G_N^k)$, $r > 0$, $l_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Замечание 2. Если в условиях теоремы I оператор T вполне непрерывен, то

$$s_{2n-1}(\tilde{T}) \leqq \frac{c}{n^{r/N}}\, s_n(T).$$

В самом деле,

$$\tilde{T} = P_G E J_G T$$

и в силу известного неравенства Фан Цюя

$$s_{2n-1}(\tilde{T}) \leqq \|P_G\|\ \|J_G\|\ s_n(E)\, s_n(T) \leqq \frac{c}{n^{r/N}}\, s_n(T).$$

Замечание 3. Пусть пространство H_2 компактно вложено в гильбертобо пространство H_1 и известны оценки линейных n-поперечников единичного шара пространства H_2, рассматриваемого как компактное множество в H_1.

Пусть T линейный оператор, действующий из H_1 в H_2, и $\tilde{T}$ – оператор T, рассматриваемый как оператор, действующий из H_1 в H_1. Тогда

$$\tilde{T} = ET,$$

где E – оператор вложения H_2 в H_1, и с помощью оценок линейных n-поперечников единичного шара H_2 в пространстве H_1 нетрудно получить оценку s-чисел оператора $\tilde{T}$.

Приведем в качестве примера следующую теорему.

Будем говорить, что область $\Omega_N \subset R_N$ удовлетворяет $P(L; \lambda_1, \ldots, \lambda_N)$-условию, если существует линейный ограниченный оператор L, действующий из $W_2^{\lambda_1,\ldots,\lambda_N}(\Omega_N)$ [2] в $W_2^{\lambda_1,\ldots,\lambda_N}(R_N)$ такой, что для всех $f \in W_2^{\lambda_1,\ldots,\lambda_N}(\Omega_N)$

$$(Lf)(s) = f(s)$$

почти всюду в Ω_N.

Теорема 2. *Пусть ограниченная область* $G \subset R_N$ *удовлетворяет* $P(L; l_1, \ldots, l_N)$*-условию*[3] *и пусть* T – *ограниченный линейный оператор действующий из* $L_2(G)$ *в* $W_2^{l_1,\ldots,l_N}(G)$, $l_1, \ldots, l_N$ – *натуральные числа. Обозначим через* $\tilde{T}$ *оператор* T, *рассматриваемый как оператор, действующий из* $L_2(G)$ *в* $L_2(G)$. *Тогда*

$$s_n(\tilde{T}) \leqq \frac{c}{n^\gamma},$$

где

$$\gamma = \frac{1}{l_1^{-1} + \ldots + l_N^{-1}}.$$

Доказательство. Как и выше, будем считать, что $\bar{G} \subset Q_N$. Введем в рассмотрение пространство $\tilde{W}_2^{l_1,\ldots,l_N}$ периодических функций. Ясно, что норма

$$\|f\|_{W_2{}^{l_1,\ldots,l_N}(Q_N)}$$

эквивалентна норме

$$\|f\|_{\tilde{W}_2{}^{l_1,\ldots,l_N}} = \sum_k (1 + |k|^{2l_1} + \ldots + |k_N|^{2l_N}) f_k^2,$$

где

$$f_k = \frac{1}{(2\pi)^N} \left| \int_{Q_N} f(x)\, e^{i(k,x)}\, \mathrm{d}x \right|.$$

---

[2] Определение пространства $W_2^{l_1,\ldots,l_N}(\Omega_N)$ см. например в [7].

[3] Известно (см. например [8]), что если область G удовлетворяет условию „рога“, то она удовлетворяет $P(L; l_1, \ldots, l_N)$-условию.

В силу условий, наложенных на границу области G, существует линейный ограниченный оператор продолжения J_G, действующий из $W_2^{l_1,\dots,l_N}(G)$ в $\tilde{W}_2^{l_1,\dots,l_N}$ такой, что

$$P_G J_G f = f$$

для любой функции $f \in W_2^{l_1,\dots,l_N}(Q_N)$.

Тогда

$$\tilde{T} = P_G E J_G T.$$

Следовательно,

$$s_n(\tilde{T}) \leqq \|P_G\| \, \|J_G\| \, \|T\| \, s_n(E) \leqq \|J_G\| \, \|T\| \, s_n(E).$$

Из оценок линейных n-поперечников, полученных Б. С. Митягиным [9], следует, что

$$s_n(E) \leqq \frac{c_1}{n^\gamma}.$$

Таким образом,

$$s_n(\tilde{T}) \leqq \frac{c}{n^\gamma}.$$

2. Пусть X — банахово пространство, G — ограниченная область N — мерного евклидова пространства R_N. Обозначим через $B_p(X; G)$, $1 \leqq p < \infty$, совокупность всех измеримых абстрактных функций $\varphi(s)$, определенных на G, принимающих значения в X и имеющих конечную норму

$$\|\varphi\|_{B_p(X;G)} = \left(\int_G \|\varphi(s)\|_X^p \, \mathrm{d}s \right)^{1/p}.$$

Нетрудно видеть, что для любой функции $\varphi \in B_p(X; G)$ и любой функции $g \in C(\bar{G})$ абстрактная функция $\varphi(s)\, g(s)$ принадлежит $B_p(X; G)$ и интегрируема в смысле И. М. Гельфанда.

Следуя С. Л. Соболеву [10], будем говорить, что функция $\varphi(s)$ из $B_p(X; G)$ имеет обобщенную производную $\varphi_\alpha(s) = \partial^{|\alpha|}\varphi(s)/(\partial x_1^{\alpha_1}, \dots, \partial x_N^{\alpha_N})$ из $B_p(X; G)$, если для любой бесконечно дифференцируемой финитной в G скалярной функции $g(s)$ имеет место равенство

$$\int_G \varphi(s) \frac{\partial^{|\alpha|} g(s)}{\partial x_1^{\alpha_1}, \dots, \partial x_N^{\alpha_N}} \, \mathrm{d}s = (-1)^{|\alpha|} \int_G \varphi_\alpha(s)\, g(s) \, \mathrm{d}s,$$

интегралы от абстрактных функций здесь и всюду далее понимаются в смысле И. М. Гельфанда.

Следуя С. Л. Соболеву [10], обзначим через $B_p^l(X; G)$ совокупность абстрактных функций $\varphi(s)$ из $B_p(X; G)$, имеющих конечную норму:

$$\|\varphi\|_{B_p{}^l(X;G)}^p = \|\varphi\|_{B_p(X;G)}^p + \sum_{|\alpha|=l} \|D^\alpha \varphi\|_{B_p(X;G)}^p$$

если l — натуральное число, и

$$\|\varphi\|_{B_p{}^l(X;G)}^p = \|\varphi\|_{B_p{}^{[l]}(X;G)}^p + \sum_{|\alpha|=[l]} \int_G \int_G \frac{\|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)\|^p}{|x-y|^{N+p\{l\}}} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y ,$$

если l нецелое, здесь $[l]$ — целая часть l, $\{l\} = l - [l]$.

Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства. Обозначим через $\mathfrak{S}_q(H_1; H_2)$ совокупность всех вполне непрерывных операторов T, действующих из H_1 в H_2 и удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^q(T) < \infty .$$

Теорема 3. *Если H — сепарабельное гильбертово пространство, то пространство $\mathfrak{S}_2(H; W_2^l(G))$ изометрично и изоморфно пространству $B_2^l(H; G)$. Изометрический изоморфизм определяется равенством $(Th)(s) = \langle h, \varphi(s) \rangle$.*

Доказательство. Пусть $T \in \mathfrak{S}_2(H; W_2^l(G))$. Тогда, как известно, оператор T представим в следующем виде

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle f, \varphi_n \rangle \psi_n ,$$

где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система в H, $\{\psi_n\}$ — ортонормированная система в $W_2^l(G)$. При этом

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T) < \infty .$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T) \int_G |\psi_n(s)|^2 \, \mathrm{d}s \leqq \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T) \, \|\psi_n\|_{W_2{}^l(G)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T) < \infty ,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T) \, |\psi_n(s)|^2$$

сходится для всех s из некоторого множества $G_0 \subset G$, причем $m(G \setminus G_0) = 0$. Обозначим через θ нулевой элемент пространства $W_2^l(G)$ и определим на G функцию $\varphi(s)$ равенством

$$\varphi(s) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \, \varphi_n \, \psi_n(s) , & \text{если} \quad s \in G_0 \\ \theta, & \text{если} \quad s \in G \setminus G_0 . \end{cases}$$

Так как

$$\|\varphi(s)\|_H^2 = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n^2(T)\,|\psi_n(s)|^2, & \text{если} \quad s \in G_0 \\ 0, & \text{если} \quad s \in G \backslash G_0\,, \end{cases}$$

то функция $\varphi(s)$ принимает значения в H. Пусть h – произвольный элемент из H. Из определения функции $\varphi(s)$ следует, что функции $(Th)(s)$ и $\langle h\ \varphi(s)\rangle$ эквивалентны; следовательно, скалярная функция $\langle h, \varphi(s)\rangle$ измерима для любого элемента $h \in H$, а так как H сепарабельное пространство, то по известной теореме И. М. Гельфанда функция $\varphi(s)$ измерима. При этом

$$\|\varphi\|_{B_2(H;G)}^2 = \int_G \|\varphi(s)\|^2\,\mathrm{d}s = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T) \int_G |\psi_n(s)|^2\,\mathrm{d}s \leqq \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T) < \infty\,.$$

Таким образом, $\varphi \in B_2(H;\,G)$. Выше уже отмечалось, что для любого $h \in H$ функции $(Th)(s)$ и $\langle h, \varphi(s)\rangle$ эквивалентны.

Следовательно,

$$(Th)(s) = \langle h, \varphi(s)\mathrm{\tau}\rangle\,, \quad \varphi \in B_2(H;\,G)\,.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N)$ вектор с неотрицательными целыми компонентами, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_N = [l]$, где $[l]$ – целая часть числа l и $D^\alpha = \partial^{|\alpha|}/(\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_N^{\alpha_N})$.

Рассмотрим оператор

$$(T_\alpha f)(s) = D^\alpha[(Tf)(s)]\,.$$

Так как для любого базиса $\{h_i\}$ в H

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|T_\alpha h_i\|_{L_2(G)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \|D^\alpha(Th_i)(s)\|_{L_2(G)}^2 \leqq \sum_{i=1}^{\infty} \|Th_i\|_{W_2{}^l(G)}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T) < \infty\,,$$

то

$$T_\alpha \in \mathfrak{S}_2(H;\,L_2(G))\,.$$

Отсюда дословным повторением приведенных выше расуждений получим:

$$(T_\alpha h)(s) = \langle h, \varphi_\alpha(s)\rangle\,, \quad \varphi_\alpha \in B_2(H;\,G)\,.$$

Покажем, что $\varphi_\alpha(s) = D^\alpha[\varphi(s)]$. Пусть $g(s) \in \mathring{C}^\infty(G)$ и $h \in H$. Тогда

$$\left\langle h, \int_G \varphi(s)\,D^\alpha\,g(s)\,\mathrm{d}s \right\rangle = \int_G \langle h, \varphi(s)\rangle\,D^\alpha\,g(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_G (Th)(s)\,D^\alpha\,g(s)\,\mathrm{d}s = (-1)^{|\alpha|} \int_G (T_\alpha h)(s)\,g(s)\,\mathrm{d}s =$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_G \langle h, \varphi_\alpha(s)\rangle\,g(s)\,\mathrm{d}s = (-1)^{|\alpha|} \left\langle h, \int_G \varphi_\alpha(s)\,g(s)\,\mathrm{d}s \right\rangle.$$

В силу произвольности $h \in H$ отсюда следует, что

$$\int_G \varphi(s)\, D^\alpha g(s)\,\mathrm{d}s = (-1)^{|\alpha|} \int_G \varphi_\alpha(s)\, g(s)\,\mathrm{d}s$$

для любой функции g из $\mathring{C}^\infty(G)$. Следовательно,

$$\varphi_\alpha(s) = D^\alpha \varphi(s)\,, \quad |\alpha| = [l]\,.$$

Остается доказать включение $\varphi \in B_2^l(H; G)$ и проверить равенство норм $\|\varphi\|_{B_2{}^l(H;G)}$ и $\|T\|_2$. Мы рассмотрим случай, когда l нецелое число. Случай целого l рассматривается аналогично. Пусть $\{h_i\}$ — какой нибудь базис в H. Тогда

$$\|\varphi\|^2_{B_2{}^l(H;G)} = \int_G \|\varphi(s)\|^2\,\mathrm{d}s + \sum_{|\alpha|=[l]} \int_G \|D^\alpha \varphi(s)\|^2\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=[l]} \int_G \int_G \frac{\|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)\|^2}{|x-y|^{N+2(l-[l])}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_G \sum_{i=1}^\infty [|\langle h_i\, \varphi(s)\rangle|^2 + \sum_{|\alpha|=[l]} |\langle h_i,\, D^\alpha \varphi(s)\rangle|^2]\,\mathrm{d}s +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=[l]} \int_G \int_G \sum_{i=1}^\infty \frac{|\langle h_i,\, D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)\rangle|^2}{|x-y|^{N+2(l-[l])}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \sum_{i=1}^\infty \|Th_i\|^2_{W_2{}^l(G)} = \sum_{i=1}^\infty s_i^2(T) = \|T\|_2^2\,.$$

Обратно, пусть $\varphi \in B_2^l(H; G)$ и

$$(Th)(s) = \langle h,\, \varphi(s)\rangle\,.$$

Подобно предыдущему, пользуясь определением обобщенной производной абстрактной функции, покажем, что

$$D^\alpha[(Th)(s)] = \langle h,\, D^\alpha \varphi(s)\rangle\,, \quad |\alpha| = [l]\,.$$

Переписав в обратном порядке цепочку равенств, завершающую доказательство первой части теоремы, получим

$$\|T\|_2^2 = \|\varphi\|^2_{B_2{}^l(H;G)}\,.$$

Теорема доказана.

Элементы пространства $B_2^l(H; G)$ в случае целого l и $H = L_2(G)$ допускают удобное для приложений описание, которым мы сейчас и займемся.

Пусть $K(s, t)$, $(s, t) \in (G \times G)$ — ядро Гильберта-Шмидта, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) для почти каждого $t \in G$, $K(s, t)$ как функция точки $s \in G$ имеет всевозможные обобщенные производные порядка l:

$$D_s^\alpha K(s, t) = K_\alpha(s, t) ;$$

2) ядра $K_\alpha(s; t)$, $|\alpha| = l$ являются ядрами Гильберта-Шмитда.

Обозначим через Γ_l совокупность всех ядер $K(s, t)$ Гильберта-Шмидта, удовлетворяющих условиям 1), 2). Введем в Γ_l норму следующим равенством

$$\|K\|_{\Gamma_l}^2 = \int_G \int_G |K(s, t)|^2 \, ds \, dt + \sum_{|\alpha| = l} \int_G \int_G |K_\alpha(s, t)|^2 \, ds \, dt .$$

Теорема 4. *Пространство $B_2^l(L_2(G); G)$ изометрично и изоморфно пространству Γ_l. Изометрический изоморфизм определяется равенством*

$$\varphi(s) = \overline{K(s, .)} .$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in B_2^l(L_2(G); G)$. Тогда $\varphi \in B_2(L_2(G); G)$ и равенство

$$K(s, t) = \overline{\varphi(s)} \tag{1}$$

определяет ядро Гильберта-Шмидта. Так как $\varphi \in B_2^l(L_2(G); G)$, то обобщенные производные φ^α, $|\alpha| = l$ также принадлежат $B_2(L_2(G); G)$. Следовательно, ядра

$$K_\alpha(s, t) = \overline{\varphi^\alpha(s)} , \quad |\alpha| = l \tag{2}$$

являются ядрами Гильберта-Шмидта.

Рассмотрим в пространстве $C^l(\bar{G})$ линеал $\mathring{C}^\infty(G)$. Так как пространство $C^l(\bar{G})$ сепарабельно, то в $\mathring{C}^\infty(G)$ найдется счетное множество функций $g_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, всюду плотное в $\mathring{C}^\infty(G)$ по норме пространства $C^l(\bar{G})$ [11], стр. 298. В силу определения обобщенной производной мы получим для любой функции $g_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ и любой функции $h(t)$ из $L_2(G)$ следующее равенство

$$\int_G \langle h, \varphi(s) \rangle \, D^\alpha g_i(s) \, ds = (-1)^{|\alpha|} \int_G \langle h, \varphi^\alpha(s) \rangle \, g_i(s) \, ds .$$

Отсюда в силу (1) и (2)

$$\int_G \left[\int_G K(s, t) \, h(t) \, dt \right] D^\alpha g_i(s) \, ds = (-1)^{|\alpha|} \int_G \left[\int_G K_\alpha(s, t) \, h(t) \, dt \right] g_i(s) \, ds .$$

Изменив в последнем равенстве порядок интегрирования, получим

$$\int_G \left[\int_G (K(s, t) \, D^\alpha g_i(s) - (-1)^{|\alpha|} K_\alpha(s, t) \, g_i(s) \, ds \right] h(t) \, dt = 0 .$$

В силу произвольности $h(t)$ отсюда следует, что найдется измеримое множество G_i, $m(G\backslash G_i) = 0$, такое, что для всех $t \in G_i$

$$\int_G [K(s, t)\, D^\alpha g_i(s) - (-1)^{|\alpha|} K_\alpha(s, t)\, g_i(s)]\, ds = 0\,.$$

Пусть $G_0 = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} G_i$. Тогда $m(G\backslash G_0) = 0$ и для всех $t \in G_0$ и $i = 1, 2, 3, \ldots$ имеют место равенства

$$\int_G [K(s, t)\, D^\alpha g_i(s)\, ds - (-1)^{|\alpha|} K_\alpha(s, t)\, g_i(s)]\, ds = 0\,.$$

Но функции $g_i(s)$, $i = 1, 2, 3, \ldots$ принадлежат $\mathring{C}^\infty(G)$ и образуют в нем свюду плотное по норме $C^l(\bar{G})$ множество. Следовательно, для всех $t \in G_0$ $K_\alpha(s, t) = D_s^\alpha K(s, t)$. При этом в силу (1) и (2)

$$\|K\|_{\Gamma_l}^2 = \int_G \int_G |K(s, t)|^2\, ds\, dt + \sum_{|\alpha| = l} \int_G \int_G |K_\alpha(s, t)|^2\, ds\, dt =$$

$$= \int_G \|\varphi(s)\|^2\, ds + \sum_{|\alpha| = l} \int_G \|D^\alpha \varphi(s)\|^2\, ds = \|\varphi\|^2_{B_2{}^l(L_2(G);G)}\,.$$

Обратно, пусть $K(s, t) \in \Gamma_l$. Равенствами

$$(3) \qquad \varphi(s) = \overline{K(s, t)}\,, \quad \varphi_\alpha(s) = \overline{K_\alpha(s, t)} = \overline{D_s^\alpha K(s, t)}\,, \quad |\alpha| = l$$

определим абстрактные функции φ, φ_α, принадлежащие $B_2(L_2(G);\, G)$. Покажем, что φ_α является обобщенной производной функции φ. Пусть $g \in \mathring{C}^\infty(G)$, тогда по условию для почти всех $t \in G$

$$\int_G K(s, t)\, D^\alpha g(s)\, ds = (-1)^{|\alpha|} \int_G K_\alpha(s, t)\, g(s)\, ds\,.$$

Так как K и K_α — ядра Гильберта-Шмидта, то для любой функции $h(t)$ из $L_2(G)$

$$\int_G \left[\int_G K(s, t)\, D^\alpha g(s)\, ds\right] h(t)\, dt = (-1)^{|\alpha|} \int_G \left[\int_G K_\alpha(s, t)\, g(s)\, ds\right] h(t)\, dt\,.$$

Переставив в полученном равенстве порядок интегрирования и воспользовавшись (3), и получим для любого $h \in L_2(G)$

$$\int_G \langle h, \varphi(s)\rangle\, D^\alpha g(s)\, ds = (-1)^{|\alpha|} \int_G \langle h, \varphi_\alpha(s)\rangle\, g(s)\, ds\,.$$

Отсюда $\int_G \varphi(s)\, D^\alpha g(s)\, ds = (-1)^{|\alpha|} \int_G \varphi_\alpha(s)\, g(s)\, ds$. Таким образом, $\varphi_\alpha = D^\alpha \varphi$, следовательно, $\varphi \in B_2^l(L_2(G);\, G)$. Равенство норм $\|\varphi\|^2_{B_2{}^l(L_2(G);G)}$ и $\|K\|_{\Gamma_l}$ очевидно.

Следствие 1. *Пусть действующий в $L_2(G)$ линейный ограниченный оператор T имеет вид*

$$(Tf)(s) = \langle f, \varphi(s) \rangle, \quad \varphi(s) \in B_2^l(L_2(G); G), \quad l > 0,$$

граница области $G(G \subset R_N)$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2l/N} s_n^2(T) < \infty$$

и, следовательно,

$$T \in \mathfrak{S}_q(L_2(G); L_2(G)),$$

где

$$q > \frac{1}{1/2 + l/N}.$$

Доказательство. По теореме 3,

$$T = ET_1,$$

где $T_1 \in \mathfrak{S}_2(L_2(G); W_2^l(G))$, E — оператор вложения $W_2^l(G)$ в $L_2(G)$. В силу замечания 2 к теореме 1

$$s_{2n-1}(T) \leqq \frac{c}{n^{l/N}} s_n(T_1).$$

Откуда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{2l/N} s_{2n-1}^2(T) \leqq c \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T_1) < \infty$, и, следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2l/N} s_n^2(T) < \infty.$$

Как и в [1], стр. 157, из полученного неравенства вытекает принадлежность оператора T постранству $\mathfrak{S}_q(L_2(G); L_2(G))$.

Следствие 2. *Пусть в условиях следствия 1 $\varphi \in B_2^l(L_2(G); G)$, $1 < p \leqq 2$ и $k = l - N/p + N/2$. Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2k/N} s_n^2(T) < \infty$$

и

$$T \in \mathfrak{S}_q(L_2(G); L_2(G)),$$

где

$$q > \frac{1}{1/2 + k/N}.$$

Справедливость следствия 2 вытекает из следствия 1 и вложения

$$B_p^l(L_2(G); G) \to B_2^k(L_2(G); G) \tag{4}$$

легко доказываемого с помощью применения техники, развитой в [10], [12], к известному (см. [7]) вложению

$$W_p^l(G) \to W_p^l(R_N) \to W_2^k(R_N) \to W_2^k(G)\,.$$

Введем в рассмотрение пространства $H_p^r(L_2(G); G)$, являющиеся абстрактными аналогами пространств $H_p^r(G)$ С. М. Никольского [7]. Пусть $r = \bar{r} + \alpha$, где $\bar{r}$ — целое число, $0 < \alpha \leqq 1$. Обозначим через G_δ, $\delta > 0$, множество точек x ($x \in G$) расстояние которых до границы области G больше δ. Будем говорить, что $\varphi(s) \in H_p^r(L_2(G); G)$, если $\varphi \in B_p(L_2(G); G)$ и все ее обобщенные производные $D^{\bar{r}}\varphi = \varphi^{\bar{r}}$ удовлетворяют неравенству

$$\|\varphi^{\bar{r}}(s + h) - \varphi^{\bar{r}}(s)\|_{B_p(L_2(G); G_\delta)} \leqq M|h|^\alpha\,, \quad |h| < \delta\,,$$

если $0 < \alpha < 1$, и неравенству

$$\|\varphi^{\bar{r}}(s + h) - 2\varphi^{\bar{r}}(s) + \varphi^{\bar{r}}(s - h)\|_{B_p(L_2(G); G_\delta)} \leqq M|h|\,, \quad |h| < \delta\,,$$

если $\alpha = 1$.

Если граница области G принадлежит классу $C^{(\bar{r}+1)}$, то имеет место вложение

$$H_p^r(L_2(G); G) \to B_p^{r-\varepsilon}(L_2(G); G)\,, \quad \varepsilon > 0 \tag{5}$$

хорошо известное для пространств $H_p^r(G)$ и $W_p^{r-\varepsilon}(G)$ [7].

Комбинируя вложения (4), (5) получим

Следствие 3. *Пусть граница области G принадлежит классу $C^{(\bar{r}+1)}$, действующий в $L_2(G)$ оператор имеет вид*

$$(Tf)(s) = (f, \varphi(s))\,,$$

где $\varphi \in H_p^r(L_2(G); G)$, $1 < p < 2$. Пусть $k = l - N/p + N/2 > 0$. Тогда

$$T \in \mathfrak{S}_q(L_2(G); L_2(G))\,,$$

где

$$q > \frac{1}{1/2 + k/N}\,.$$

Частным случаем следствия 3 является

Следствие 4. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $-\infty < a < b < +\infty$ *и для любого* h, *удовлетворяющего условию* $a + |h| < b - |h|$ *выполнено неравенство*

$$\|\varphi(s + h) - \varphi(s)\|_{B_2(L_2(a,b);(a+|h|,b-|h|))} \leqq M|h|^\alpha .$$

Тогда

$$T \in \mathfrak{S}_q(L_2(a, b); L_2(a, b)), \quad \text{где} \quad q > 1/(\tfrac{1}{2} + \alpha) .$$

Следствие 4 является усилением одного результата Э. Хилле и Я. Д. Тамаркина (см., например, [2] стр. 279).

Замечание. На основании теоремы 4 следствия 1—4 можно сформулировать в терминах ядер, отвечающих абстрактными функциям.

Доказанная выше теорема 3 позволяет установить связь между приведенной в [1], стр. 157 теоремой, близкой по идее доказательства к теореме М. Г. Крейна [3], и ее обобщением — теоремой В. И. Параски [5] — и выяснить степень обобщения. Для удобства мы приведем формулировки обеих теорем.

Теорема A ([1], стр. 157). *Если ядро* $K(s, t)$ *оператора Гильберта-Шмидта* T, *действующего в* $L_2(a, b)$, *имеет производную в среднем* $K_{01}(s, t)$, *то-есть, если* $\lim_{h\to 0} \int_a^b |K_{01}(s, t) - [K(s + h, t) - K(s, t)]/h|^2 \,\mathrm{d}t = 0$ *и* $K_{01}(s, t)$ — *ядро Гильберта-Шмидта, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 s_n^2(T) < \infty ,$$

Аналогично, если ядро Гильберта-Шмидта $K(s, t)$ *имеет* l*-ю произвольную в среднем — ядро* $K_{0l}(s, t)$, *являющееся ядром Гильберта-Шмидта, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2l} s_n^2(T) < \infty \tag{6}$$

откуда следует, что $T \in \mathfrak{S}_q(L_2(a, b); L_2(a, b))$, *где* $q > 1/(1/2 + \alpha)$.

Заметив, что l-я производная в среднем ядра $K(s, t)$ является l-ой сильной (по нормер L_2) производнойа бстрактной функции $\varphi(s) = K(s, \bullet)$, можно сформулировать условие теоремы A следующим образом: функция $\varphi(s)$ принадлежит $B_2(L_2(a, b); (a, b))$ и имеет сильную производную $D^l \varphi(s)$, принадлежащую $B_2(L_2(a, b); (a, b))$.

Теорема B ([5], стр. 628). *Пусть* l *и* k — *натуральные числа. Если* $T \in \mathfrak{S}_q(W_2^k(G); W_2^{k+l}(G))$ *и* $\tilde{T}$ — *оператор* T, *рассматриваемый как оператор в* $W_2^k(G)$, *то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{lq/N} s_n^q(\tilde{T}) < \infty$$

и, следовательно, $\tilde{T} \in \mathfrak{S}_p(W_2^k(G); W_2^k(G))$, *где* $p > (1/q + l/N)^{-1}$.

Для сравнения обеих теорем положим $N = 1$, $k = 0$, $q = 2$. Из теоремы 3 следует, что $T \in \mathfrak{S}_2(L_2(G); W_2^l(G))$ тогда и только тогда, когда функция φ, отвечающая ядру, принадлежит пространству $B_2^l(L_2(a, b); (a, b))$.

Таким образом, в теореме A неравенство (6) обеспечивается существованием l-ой *сильной* производной функции φ и принадлежностью этой производной пространству $B_2(L_2(a, b); (a, b))$. В теореме B для выполнения неравенства (6) требуется условие, эквивалентное существованию l-ой *обобщенной* производной функции φ и принадлежностью ее вместе с функцией φ пространству $B_2(L_2(a, b); (a, b))$.

В заключение параграфа приведем еще один метод доказательства неравенств типа неравенства (6). Для простоты рассмотрим одномерный случай. В силу изложенного выше можно ограничиться рассмотрением периодического случая.

Пусть ядро $K(s, t)$ интегрального оператора T, действующего в $L_2(-\pi, \pi)$, имеет вид

$$K(s, t) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{l,m} e^{ils} g_m(t)\,,$$

где $\{g_m\}$ — какая-нибудь ортонормированная система в $L_2(-\pi, \pi)$. Будем предполагать, что коэффициенты $a_{l,m}$ удовлетворяют следующему условию

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{i,m}|^2 \, |l|^{2\alpha} < \infty$$

где $\alpha > 0$.

Покажем, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} s_n^2(T) < \infty\,. \tag{7}$$

Лемма. *Пусть* $\alpha > 0$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$, $b_n \geqq 0$. *Тогда*

$$c_1 \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha-1} \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} b_n \leqq c_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha-1} \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n\,. \tag{8}$$

Для доказательства правого неравенства в (8) воспользуемся очевидным неравенством

$$c_3 n^{2\alpha} \leqq \sum_{k=1}^{n-1} k^{2\alpha-1} \leqq c_4 n^{2\alpha}\,, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\alpha} b_n \leqq b_1 + \frac{1}{c_3} \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sum_{k=1}^{n-1} k^{2\alpha-1} \leqq c_2 \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sum_{k=1}^{n-1} k^{2\alpha-1} = c_2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha-1} \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n\,.$$

Аналогично доказывается левое неравенство в (8).

Перейдем к доказательству неравенства (7). Пусть

$$T_{2k+1}f = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)}} \sum_{l=-k}^{k} \sum_{m=1}^{\infty} a_{l,m}(f, g_m)\, e^{ils}.$$

Тогда в силу неравенства Вейля

$$\sum_{n=2k+2}^{\infty} s_n^2(T) \leqq \|T - T_{2k+1}\|_2^2 = \sum_{|l| \geqq k+1} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{l,m}|^2.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{2\alpha-1} \sum_{n=2k+2}^{\infty} s_n^2(T) \leqq \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{2\alpha-1} \sum_{|l| \geqq k+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |a_{l,m}|^2 \leqq$$

$$\leqq c_5 \sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha-1} \sum_{n=k+1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (|a_{n,m}|^2 + |a_{-n,m}|^2) \leqq c_6 \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |l|^{2\alpha} |a_{l,m}|^2 < \infty.$$

Таким образом

$$\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{2\alpha-1} \sum_{n=2k+2}^{\infty} s_n^2(T) < \infty. \tag{9}$$

Так как

$$(2k)^{2\alpha-1} \sum_{n=2k+1}^{\infty} s_n^2(T) \leqq c_7 (2k-1)^{2\alpha-1} \sum_{n=2k}^{\infty} s_n^2(T), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

то, в силу (9)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2k)^{2\alpha-1} \sum_{n=2k+1}^{\infty} s_n^2(T) < \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha-1} \sum_{n=k+1}^{\infty} s_n^2(T) < \infty. \tag{10}$$

Отсюда и из доказанной выше леммы вытекает справедливость неравенства (7).

3. До сих пор речь шла о достаточных условиях для выполнения неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{lq/N} s_n^q(T) < \infty.$$

Можно, однако, поставить задачу об отыскании необходимых и достаточных условий, при которых выполняется указанное неравенство. Ниже приводится решение этой задачи в случае $0 < q \leqq 2$.

Теорема 5. *Пусть T — вполне непрерывный оператор, действующий в пространстве $W_2^m(G_N)$, $m \geqq 0$, $l > 0$ и $0 < q \leqq 2$. Для того, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^q(T)\, n^{lq/N} < \infty \tag{11}$$

Необходимо и достаточно, чтобы оператор T был унитарно эквивалентен оператору $\tilde{T}_1 = ET_1$, где

$$T_1 \in \mathfrak{S}_q(\tilde{W}_2^m, \tilde{W}_2^{m+l}),$$

E — оператор вложения $\tilde{W}_2^{m+l}$ в $\tilde{W}_2^m$.

Доказательство необходимости. В силу замечания 2 к теореме 1

$$s_{2n-1}(T) = s_{2n-1}(\tilde{T}_1) \leqq \frac{c}{n^{l/N}}\, s_n(T_1).$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_{2n-1}^q(T)\, n^{lq/N} \leqq c \sum_{n=1}^{\infty} s_n^q(T_1) < \infty .$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^q(T)\, n^{lq/N} < \infty .$$

Доказательство достаточности. Пусть T — вполне непрерывный оператор, действующий в $W_2^m(G_N)$. Пусть $\mathfrak{R}$ — подпространство, являющееся замыканием области значений оператора T и $\dim \mathfrak{R}$ размерность $\mathfrak{R}$. Могут представиться четыре различных случая:

1. $\mathfrak{R} = W_2^m(G_N)$;
2. $\dim \mathfrak{R} = \infty$, $\dim (W_2^m(G_N) \ominus \mathfrak{R}) = \infty$;
3. $0 < \dim (W_2^m(G_N) \ominus \mathfrak{R}) < \infty$;
4. $\dim \mathfrak{R} < \infty$.

Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

1. Обозначим через Z_N множество всех векторов вещественного евклидова пространства R_N, все компоненты которых суть целые числа или нуль.

Через Z обозначим множество всех натуральных чисел. Пусть $k = (k_1, \ldots, k_N) \in Z_N$ и $|k| = \max\limits_{j=1,2,\ldots,N} |k_j|$. Мы будем говорить, что вектор $a \in Z_N$ подчинен вектору $k \in Z_N$, если $a \neq k$ и первая из разностей $a_j - k_j$, $j = 1, 2, 3, \ldots, N$, отличная от нуля, отрицательна.

Пусть $k \in Z_N$. Обозначим через $\varrho(k)$ число всех различных векторов $a \in Z_N$, подчиненных k и удовлетворяющих условию $|a| = |k| = \max\limits_{j=1,2,\ldots,N} |k_j|$. Подчеркнем, что $\varrho(k) = 0$ для всех векторов k вида $k = (-n, \ldots, -n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Рассмотрим на Z_N функцию $\omega(k)$

$$\omega(k) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |k| = 0 \\ (2|k| - 1)^N + \varrho(k) + 1, & \text{если} \quad |k| \neq 0 . \end{cases}$$

Функция $\omega(k)$ взаимно-однозначно отображает множество Z_N на все множество Z. При этом для $|k| \neq 0$

$$(12) \qquad (2|k| - 1)^N < \omega(k) < (2|k| + 1)^N .$$

Левое неравенство очевидно и означает, в частности, что $\omega(k)$ больше числа всех векторов $a \in Z_N$, удовлетворяющих условию $|a| \leqq |k| - 1$. Правое неравенство следует из того, что $\omega(k)$ меньше числа всех векторов $a \in Z_N$, уводлетворяющих условию $|a| \leqq |k|$, а это число, как легко видеть, равно $(2|k| + 1)^N$.

Пусть T — вполне непрерывный оператор, действующий в $W_2^m(G_N)$. Так как в рассматриваемом случае $\mathfrak{R} = W_2^m(G_N)$, то

$$(13) \qquad Tf = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle f, \varphi_n \rangle \psi_n$$

где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система в $W_2^m(G_N)$, $\{\psi_n\}$ — полная ортонормированная система в $W_2^m(G_N)$.

Пользуясь построенным выше взаимно-однозначным отображением Z_N на Z, мы можем записать (13) в следующем виде:

$$(14) \qquad Tf = \sum_{k \in Z_N} s_{\omega(k)}(T) \langle f, \varphi_{\omega(k)} \rangle \psi_{\omega(k)} .$$

Определим отображающий $W_2^m(G_N)$ на $\tilde{W}_2^m$ изометрический оператор V, задав его на базице $\psi_{\omega(k)}$, $k \in Z_N$, равенствами

$$V\psi_{\omega(k)} = \frac{e^{i(k,x)}}{\left\|e^{i(k,x)}\right\|_{\tilde{W}_2^m}}, \quad k \in Z_N .$$

Тогда, в силу (14),

$$(15) \qquad \tilde{T}_1 f = VTV^{-1}f = \sum_{k \in Z_N} s_{\omega(k)} \langle f, h_{\omega(k)} \rangle \frac{e^{i(k,x)}}{\left\|e^{i(k,x)}\right\|_{\tilde{W}_2^m}}$$

где $h_{\omega(k)} = V\varphi_{\omega(k)}$. Заметим, что $\{h_{\omega(k)}\}$ — ортонормированная система в $\tilde{W}_2^m$.

Положим для краткости $\|f\|_{W_2^\alpha} = \|f\|_\alpha$.

Рассмотрим оператор T_1:

$$(16) \qquad T_1 f = \sum_{k \in Z_N} s_{\omega(k)} \frac{\left\|e^{i(k,x)}\right\|_{m+l}}{\left\|e^{i(k,x)}\right\|_m} \langle f, h_{\omega(k)} \rangle \frac{e^{i(k,x)}}{\left\|e^{i(k,x)}\right\|_{m+l}}$$

T_1 — линейный ограниченный оператор, действующий из $\tilde{W}_2^m$ в $\tilde{W}_2^{m+l}$. В самом деле,

$$\|T_1 f\|^2_{\tilde{W}_2{}^{m+l}} \leqq \|f\|^2_{\tilde{W}_2{}^m} \sum_{k \in Z_N} s^2_{\omega(k)}(T) \frac{\|e^{i(k,x)}\|^2_{m+l}}{\|e^{i(k,x)}\|^2_m} =$$

$$= \|f\|^2_m \left(s_1^2(T) + \sum_{\substack{k \in Z_N \\ k \neq 0}} s^2_{\omega(k)}(T) \frac{1 + |k_1|^{2m+2l} + \ldots + |k_N|^{2m+2l}}{1 + |k_1|^{2m} + \ldots + |k_N|^{2m}} \right) \leqq$$

$$\leqq \|f\|^2_m (N+1) \left(s_1^2(T) + \sum_{\substack{k \in Z^N \\ |k| \neq 0}} s^2_{\omega(k)}(T) \frac{|k|^{2m+2l}}{|k|^{2m}} \right) \leqq$$

$$\leqq \|f\|^2_m (N+1) \big(s_1^2(T) + \sum_{\substack{k \in Z_N \\ |k| \neq 0}} s^2_{\omega(k)}(T) (\omega(k))^{2l/N}\big) =$$

$$= \|f\|^2_m (N+1) \sum_{k \in Z_N} s^2_{\omega(k)}(T) (\omega(k))^{2l/N} =$$

$$= \|f\|^2_m (N+1) \sum_{n=1}^{\infty} s_n^2(T)\, n^{2l/N} \leqq \|f\|^2_m (N+1) \big[\sum_{n=1}^{\infty} s_n^q(T)\, n^{lq/N}\big]^{2/q}.$$

Заключительное неравенство в этой цепочке выполнено в силу условия $0 < q \leqq 2$.

Полная непрерывность оператора T_1 следует из неравенства

$$\left\| T_1 f - \sum_{|k| \leqq j} s_{\omega(k)}(T) \frac{\|e^{i(k,x)}\|_{m+l}}{\|e^{i(k,x)}\|_m} \langle f, h_{\omega(k)} \rangle \frac{e^{i(k,x)}}{\|e^{i(k,x)}\|_{m+l}} \right\|^2_{m+l} \leqq$$

$$\leqq \|f\|^2_m (N+1) \big[\sum_{|k| > j} s^q_{\omega(k)}(T) (\omega(k))^{lq/N}\big]^{2/q} =$$

$$= \|f\|^2_m (N+1) \big(\sum_{n=(2j+1)^N+1} s_n^q(T)\, n^{lq/N}\big)^{2/q},$$

получаемого аналогичными рассуждениями. Итак, T_1 — вполне непрерывный оператор, действующий из $\tilde{W}_2^m$ в $\tilde{W}_2^{m+l}$ причем

$$\tilde{T}_1 = ET_1 .$$

Остается показать, что $T_1 \in \mathfrak{S}_q(\tilde{W}_2^m, \tilde{W}_2^{m+l})$. Так как $0 < q \leqq 2$, то в силу теоремы И. Ц. Гохберга и А. С. Маркуса (см. [1], стр. 125) достаточно показать, что

$$\sum_{k \in Z_N} \|T_1 h_{\omega(k)}\|^q_{\tilde{W}_2{}^{m+l}} < \infty .$$

Мы имеем:

$$\sum_{k \in Z_N} \|T_1 h_{\omega(k)}\|^q_{\tilde{W}_2{}^{m+l}} = \sum_{k \in Z_N} s^q_{\omega(k)} \left[\frac{\|e^{i(k,x)}\|_{m+l}}{\|e^{i(k,x)}\|_m} \right]^q \leqq$$

$$\leqq (N+1)^{q/2} \big(s_1^q + \sum_{\substack{k \in Z_N \\ |k| \neq 0}} s^q_{\omega(k)} |k|^{lq}\big) \leqq (N+1)^{q/2} \sum_{k \in Z_N} s^q_{\omega(k)} [\omega(k)]^{lq/N} =$$

$$= (N+1)^{q/2} \sum_{n=1}^{\infty} s_n^q n^{lq/N} < \infty .$$

2. Рассмотрим теперь случай, когда $\dim \mathfrak{N} = \infty$ и $\dim(W_2^m \ominus \mathfrak{N}) = \infty$. Обозначим через Z_N^+ совокупность всех векторов $k \in Z_N$ с неотрицательной первой компонентой и через $\varrho_+(k)$ число всех векторов $a \in Z_N^+$, подчиненных k и удовлетворяющих условию $|a| = |k|$. Фукция

$$\omega_+(k) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad |k| = 0 \\ (2|k| - 1)^{N-1}|k| + \varrho_+(k) + 1, & \text{если} \quad |k| \neq 0 \end{cases}$$

взаимно-однозначно отображает Z_N^+ на все множество Z и при этом удовлетворяет при $|k| \neq 0$ очевидным неравенствам:

$$(2|k| - 1)^{N-1}|k| < \omega_+(k) < (2|k| + 1)^{N-1}(|k| + 1).$$

Пусть T — вполне непрерывный оператор, действующий в $W_2^m(Q_N)$, $\dim \mathfrak{N} = \infty$ и $\dim(W_2^m \ominus \mathfrak{N}) = \infty$. Тогда

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle f, \varphi_n\rangle \psi_n = \sum_{k \in Z_N^+} s_{\omega+(k)}\langle f, \varphi_{\omega+(k)}\rangle \psi_{\omega+(k)},$$

где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система в $W_2^m(G_N)$, $\{\psi_n\}$ — полная ортонормированная система в замыкании множества значений оператора T, которое мы обозначили через $\mathfrak{N}$. Пусть $\{\hat{\psi}_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — какая-нибудь полная ортонормированная система в $W_2^m \ominus \mathfrak{N}$. Обозначим через $\hat{\omega}(k)$ какое-нибудь взаимно-однозначное отображение множества $\hat{Z}_N = Z_N \backslash Z_N^+$ на множество Z.

Определим изометрический оператор V, отображающий $W_2^m(G_N)$ на $\tilde{W}_2^m$:

$$V\psi_{\omega+(k)} = \frac{e^{i(k,x)}}{\|e^{i(k,x)}\|_m}, \quad k \in Z_N^+,$$

$$V\hat{\psi}_{\hat{\omega}(k)} = \frac{e^{i(k,x)}}{\|e^{i(k,x)}\|_m}, \quad k \in \hat{Z}_N.$$

Тогда

$$\tilde{T}_1 f = VTV^{-1}f = \sum_{k \in Z_N^+} s_{\omega+(k)}\langle f, V\varphi_{\omega+(k)}\rangle \frac{e^{i(k,x)}}{\|e^{i(k,x)}\|_m}.$$

Рассмотрим еще оператор T_1:

$$T_1 f = \sum_{k \in Z_N^+} s_{\omega+(k)}(T) < f, V\varphi_{\omega+(k)}\rangle \frac{\|e^{i(k,x)}\|_{m+l}}{\|e^{i(k,x)}\|_m} \frac{e^{i(k,x)}}{\|e^{i(k,x)}\|_{m+l}}.$$

Дословным повторением соответствующих рассуждений 1-го случая убеждаемся, что T_1 вполне непрерывный оператор, действующий из $\tilde{W}_2^m$ в $\tilde{W}_2^{m+l}$, при этом

$$\tilde{T}_1 = ET_1.$$

Остается проверить, что $T_1 \in \mathfrak{S}_q(\tilde{W}_2^m; \tilde{W}_2^{m+l})$. Пусть $\{g_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ — какая-нибудь полная ортонормированная система в подпространстве, ортогональном подпространству, натянутому на вектора $V\varphi_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|T_1 V\varphi_n\|_{m+l}^q + \sum_{\nu=1}^{\infty} \|T_1 g_\nu\|_{m+l}^q =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \|T_1 V\varphi_n\|_{m+l}^q = \sum_{k\in Z_N^+} s_{\omega+(k)}^q \frac{\|e^{i(k,x)}\|_{m+l}^q}{\|e^{i(k,x)}\|_m^q} \leqq$$

$$\leqq (N+1)^{q/2} \left[s_1^q(T) + \sum_{k\in Z_N^+} s_{\omega+(k)}^q(T) \, |k|^{lq}\right] \leqq$$

$$\leqq (N+1)^{q/2} \sum_{k\in Z_N^+} s_{\omega+(k)}^q(T) \, [\omega_+(k)]^{lq/N} = (N+1)^{q/2} \sum_{n=1}^{\infty} s_n^q(T) \, n^{lq/N}.$$

3. Пусть $0 < \dim(W_2^m \ominus \mathfrak{R}) = s < \infty$; обозначим через $\tilde{Z}_N$ совокупность всех векторов $k \in Z_N$, отличных от векторов $k_j = (-j, \ldots, -j)$, $j = 1, 2, 3, \ldots, s$. Определим на $\tilde{Z}_N$ функцию $\tilde{\omega}(k)$ следующим равенством:

$$\tilde{\omega}(k) = \begin{cases} \omega(k) - |k|, & \text{если} \quad |k| \leqq s; \\ \omega(k) - s, & \text{если} \quad |k| > s. \end{cases}$$

Функция $\tilde{\omega}$ взаимно-однозначно отображает $\tilde{Z}_N$ на Z и при $|k| > s$

$$(2|k| - 1)^N - s < \tilde{\omega}(k) < (2|k| + 1)^N - s.$$

Оператор T в этом случае имеет вид:

$$Tf = \sum_{k\in\tilde{Z}_N} s_{\tilde{\omega}(k)}(T) \langle f, \varphi_{\tilde{\omega}(k)}\rangle \psi_{\tilde{\omega}(k)},$$

где $\{\varphi_{\tilde{\omega}(k)}\}$ — ортонормированная система в $W_2^m(G_N)$, $\{\psi_{\tilde{\omega}(k)}\}$ — полная ортонормированная система в $\mathfrak{R}$. Пусть $\hat{\psi}_\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots, s$ — ортонормированный базис в подпространстве $W_2^m \ominus \mathfrak{R}$.

Изометрический оператор V определим равенствами:

$$V\psi_{\tilde{\omega}(k)} = \frac{e^{i(k,x)}}{\|e^{i(k,x)}\|_m}, \quad k \in \tilde{Z}_N,$$

$$V\hat{\psi}_\nu = \frac{e^{i(k_\nu,x)}}{\|e^{i(k_\nu,x)}\|_m}, \quad k_\nu = (-\nu, \ldots, -\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, s.$$

Тогда

$$\tilde{T}_1 f = VTV^{-1} f = ET_1,$$

где

$$T_1 f = \sum_{k\in\tilde{Z}_N} s_{\tilde{\omega}(k)}(T) \frac{\|e^{i(k,x)}\|_{m+l}}{\|e^{i(k,x)}\|_m} < f, \varphi_{\tilde{\omega}(k)} > \frac{e^{i(k,x)}}{\|e^{i(k,x)}\|_{m+l}}.$$

Принадлежность оператора T_1 классу $\mathfrak{S}_q(\tilde{W}_2^m; \tilde{W}_2^{m+l})$ проверяется так же, как в предыдущем случае.

4. В этом случае справедливость теоремы очевидна.

Пользуясь случаем, выражаем глубокую признательность О. В. Бесову и Я. Фуке за полезные обсуждения.

Цитированная литература

[1] *И. Ц. Гохберт* и *М. Г. Крейн:* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. Москва, изд-во „Наука", 1965.

[2] *Н. Данфорд* и *ДЖ. Т. Шварц:* Линейные операторы. Спектральная теория. Москва, изд-во „Мир", 1966.

[3] *М. Г. Крейн:* О характеристических числах дифференцируемых симметрических ядер. Матем. сб., *2* (*44*) : 4 (1937), 725—732.

[4] *S. Agmon:* On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary problems. Comm. Pure Appl. Math., vol. *15* n. 2 (1962), 119—147.

[5] *В. И. Параска:* Об асимптотике собственных и сингулярных чисел линейных операторов, повышающих гладкость. Матем. сб., *68* (*110*) : 4 (1965), 621—631.

[6] *A. P. Calderon:* Lebesgue spaces of differentiable functions and distributions. Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., *4* (1961), 33—49.

[7] *С. М. Никольский:* О теоремах вложения, продолжения и приближения дифференцируемых функций многих переменных, УМН, том *XVI*, вып. 5 (101), (1961) 63—114.

[8] *О. В. Бесов:* К теории вложения и продолжения классов дифференцируемых функций. Матем. заметки, том *I*, вып. 2 (1967), 235—244.

[9] *Б. С. Митягин:* Приближение функций в пространствах L_p и C на торе, Матем. сб., *58* (*100*), № 4 (1962), 397—414.

[10] *S. L. Sobolev:* Sur les équations aux dérivées partielles hyperboliques non-linéaires. Roma, Edizioni Cremonese, 1961.

[11] *В. И. Смирнов.* Курс высшей математики. Том V. Гос. изд. физ. -мат. лит. М., 1959.

[12] *В. Б. Коротков:* Представления линейных непрерывных операторов абстрактными функциями и теоремы вложения. ДАН СССР, *153* : 2 (1963), 262—265.

Адрес автора: В. Б. Коротков, Новосибирск 90, Институт математики СОАН СССР.