Ladislav Procházka

Заметка о прямых суммах групп типа $\mathfrak{P}^{+}$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 17 (1967), No. 1, 28–35

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100757`

Чехословацкий математический журнал, т. 17 (92) 1967, Прага

ЗАМЕТКА О ПРЯМЫХ СУММАХ ГРУПП ТИПА $\mathscr{P}^{+}$

LADISLAV PROCHÁZKA (Ладислав Прохазка), Praha

(Поступило в редакцию 18/X 1965 г.)

Буквой p будем всюду обозначать некоторое простое число. Для простого числа p будет $\mathscr{P}_p$ представлять кольцо целых p-адических чисел и $\mathscr{P}_p^+$ будет его аддитивная группа. Во всей статье идет речь только об абелевых группах.

Если группа G является прямой суммой групп $\mathscr{P}_p^+$, значит, $G = \sum_{\iota \in I} J_\iota$, где $J_\iota \cong \mathscr{P}_p^+$ $(\iota \in I)$, то можно группу G представить в виде аддитивной группы линейных форм от неопределенных элементов x_ι $(\iota \in I)$ с коэффициентами из кольца $\mathscr{P}_p$; символически будем писать $G = \sum_{\iota \in I} \mathscr{P}_p x_\iota$. Тогда можно группу G считать модулем над кольцом $\mathscr{P}_p$, или, просто $\mathscr{P}_p$-модулем, если умножение определить так, что $\alpha g = \alpha\alpha_1 x_{\iota_1} + \ldots + \alpha\alpha_n x_{\iota_n}$, где $\alpha \in \mathscr{P}_p$ и $g = \alpha_1 x_{\iota_1} + \ldots + \alpha_n x_{\iota_n} \in G$.

Лемма 1. *Пусть G – группа, $G \cong \mathscr{P}_p^+$, и пусть H – такая подгруппа в G, что $G/H \cong \mathscr{C}(p)$. Тогда $H = pG$, значит, $H \cong G$, и если G считать $\mathscr{P}_p$-модулем, то H является подмодулем в G.*

Доказательство. Прежде всего в силу предположения имеем $pG \subseteq H \subseteq G$. Но из доказательства теорема 43.1 из [1] уже следует, что $G/pG \cong \mathscr{C}(p)$. Значит, $H = pG$ и лемма полностью доказана.

Лемма 2. *Пусть G – группа, $G \cong \mathscr{P}_p^+$, и пусть H – такая подгруппа в G, что группа G/H конечна. Тогда $G \cong H$ и если G считать $\mathscr{P}_p$-модулем, то H является подмодулем в G.*

Доказательство. Группа G/H конечна, и, следовательно, она p-примарна, так как для каждого простого числа $q \neq p$ группа G и одновременно фактор-группа G/H q-полна. Наше утверждение можно теперь доказать методом полной индукции по длине композиционного ряда группы G/H, применяя лемму 1.

Лемма 3. *Пусть G – произвольный $\mathscr{P}_p$-модуль и пусть H – подгруппа адди-*

тивной группы модуля G. Если фактор-группа G/H является периодической и редуцированной, то H уже служит $\mathscr{P}_p$-подмодулем для модуля G.

Доказательство. Если $x \in H$ и $\alpha \in \mathscr{P}_p$, то убедимся в том, что $\alpha x \in H$; притом можно предполагать, что $x \neq O$. Пусть J – циклический $\mathscr{P}_p$-подмодуль модуля G, для которого x является образующим элементом; итак, $J = \mathscr{P}_p x$. Кроме того положим $K = J \cap H$. Если считать J и K аддитивными группами, то будет

$$J/K = J/(J \cap H) \cong \{J, H\}/H \subseteq G/H\,,$$

значит, J/K является редуцированной периодической группой. В силу предложения 1.2 из [7] либо $J \cong \mathscr{P}_p^+$, либо $J \cong \mathscr{C}(p^k)$. Если $J \cong \mathscr{P}_p^+$, то по тем же причинам как в случае леммы 2 можно утверждать, что группа J/K p-примарна и, следовательно, кончена (смотри лемму 14 из [4]). Итак, по лемме 2 K является $\mathscr{P}_p$-подмодулем $\mathscr{P}_p$-модуля J. Но если $J \cong \mathscr{C}(p^k)$, то последнее утверждение следует из предложения 1.14 в [7]. Значит, всегда из $x \in K = J \cap H$ следует $\alpha x \in K \subseteq H$, и лемма доказана.

Лемма 4. *Если группа G является прямой суммой групп изоморфных с $\mathscr{P}_p^+$ и если H – подгруппа в G такая, что G/H является редуцированной периодической группой, то $H \cong G$.*

Доказательство. Пусть $G = \sum_{\iota \in \mathbf{I}} \mathscr{P}_p x_\iota$. Если G считаем $\mathscr{P}_p$-модулем, то G является свободным $\mathscr{P}_p$-модулем. По лемме 3 служит подгруппа H $\mathscr{P}_p$-подмодулем модуля G, итак, по лемме 15 из [3] H также будет свободным $\mathscr{P}_p$-модулем. Пусть $\mathscr{P}_p y_\varkappa$ $(\varkappa \in \mathbf{K})$ – система циклических подмодулей в H, прямая сумма которых (в смысле модулей) образует модуль H. Каждый ненулевой элемент из H можно тогда представить единственным образом в виде $\alpha_1 y_{\varkappa_1} + \ldots + \alpha_r y_{\varkappa_r}$ $(\varkappa_i \neq \varkappa_j$ для $i \neq j)$, где $\alpha_i \in \mathscr{P}_p$ и $\alpha_i \neq O$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$; следовательно, подгруппа H является прямой суммой аддитивных групп $\mathscr{P}_p y_\varkappa$ $(\varkappa \in \mathbf{K})$. Итак, имеем $H = \sum_{\varkappa \in \mathbf{K}} \mathscr{P}_p y_\varkappa$. Очевидно, множества $(x_\iota;\ \iota \in \mathbf{I})$ и $(y_\varkappa;\ \varkappa \in \mathbf{K})$ являются независимыми множествами $\mathscr{P}_p$-модуля G; притом ясно, что множество $(x_\iota;\ \iota \in \mathbf{I})$ максимально относительно этого свойства. Так как G/H является периодической группой, то для каждого $g \in G$ существует натуральное число k такое, что $kg \in H = \sum_{\varkappa \in \mathbf{K}} \mathscr{P}_p y_\varkappa$. Отсюда уже следует, что $(y_\varkappa;\ \varkappa \in \mathbf{K})$ также является максимальным независимым множеством $\mathscr{P}_p$-модуля G. По теореме 1 из [2] мощность максимального независимого множества $\mathscr{P}_p$-модуля G является инвариантом G, значит, $\operatorname{card} \mathbf{I} = \operatorname{card} \mathbf{K}$. Отсюда уже вытекает, что $H \cong G$.

Лемма 5. *Пусть G – произвольная группа вида $G = A_1 \dotplus A_2$, где группа A_1 q-полна для каждого простого числа $q \neq p$ и группа A_2 p-полна. Пусть H – такая подгруппа в G, что G/H является редуцированной периодической группой. Если $h \in H$, $h = a_1 + a_2$, где $a_i \in A_i$ $(i = 1, 2)$, то $a_i \in H$ $(i = 1, 2)$.*

Доказательство. Так как имеем

$$(1) \qquad A_i/(H \cap A_i) \cong \{H, A_i\}/H \subseteq G/H \quad (i = 1, 2),$$

то $A_1/(H \cap A_1)$ является редуцированной периодической группой, которая должна быть одновременно q-полной для каждого простого числа $q \neq p$. Но это уже значит, что группа $A_1/(H \cap A_1)$ p-примарна. Следовательно, существует натуральное число k такое, что $p^k a_1 \in H \cap A_1$. Тогда из соотношения $p^k h = p^k a_1 + p^k a_2 \in H$ следует, что $p^k a_2 \in H$, или, также $p^k a_2 \in H \cap A_2$. В силу (1) $A_2/(H \cap A_2)$ является редуцированной периодической группой, которая будет одновременно p-полной. Отсюда вытеакет, что p-примарное слагаемое периодической группы $A_2/(H \cap A_2)$ должно быть нулевой группой. Итак, из соотношения $p^k a_2 \in H \cap A_2$ уже следует $a_2 \in H \cap A_2$. Тогда в силу $h = a_1 + a_2 \in H$ будет также $a_1 \in H$ и лемма полностью доказана.

Лемма 6. *Пусть p_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — последовательность различных простых чисел и пусть G — группа вида $G = \sum_{i=1}^{\infty} G_i$, где G_i является прямой суммой групп $\mathscr{P}^+_{p_i}$ и некоторой периодической p_i-примарной группы $(i = 1, 2, \ldots)$. Пусть H — подгруппа в G такая, что G/H является редуцированной периодической группой. Если $h \in H$, $h = g_1 + g_2 + \ldots + g_n$, где $g_i \in G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то $g_i \in H$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

Доказательство. Лемму докажем методом полной индукции по числу n. Притом для $n = 1$ утверждение тривиально, итак, пусть $n > 1$ и пусть лемма справедлива для $n - 1$. Если положим $A_1 = G_n$ и $A_2 = \sum_{i \neq n} G_i$, то $G = A_1 \dotplus A_2$, группа A_1 q-полна для каждого простого числа $q \neq p_n$ и группа A_2 p_n-полна; притом $g_n \in A_1$ и $g_1 + \ldots + g_{n-1} \in A_2$. Прежде всего по лемме 5 имеем $g_n \in H$ и $g_1 + \ldots + g_{n-1} = h' \in H$. Кроме того из леммы 5 непосредственно следует, что если положить $B_i = H \cap A_i$ $(i = 1, 2)$, то $H = B_1 \dotplus B_2$. Тогда имеем

$$G/H \cong A_1/B_1 \dotplus A_2/B_2,$$

или, A_2/B_2 является редуцированной периодической группой. Так как $h' = g_1 + \ldots + g_{n-1} \in H \cap A_2 = B_2$ и $A_2 = \sum_{i \neq n} G_i$, то по индуктивному предположению будет $g_i \in B_2 \subseteq H$ $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$. Доказательство леммы завершено.

Лемма 7. *Пусть группа G и ее подгруппа H удовлетворяют условиям леммы 6. Если положим $H_i = H \cap G_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то будет $H = \sum_{i=1}^{\infty} H_i$.*

Доказательство. Очевидно, имеем

$$\{H_i \ (i = 1, 2, \ldots)\} = \sum_{i=1}^{\infty} H_i \subseteq H.$$

Но если $h \in H$, то h можно представить в виде $h = g_1 + g_2 + \ldots + g_n$, где $g_i \in G_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. По лемме 6 уже будет $g_i \in H \cap G_i = H_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, или, $h \in \sum_{i=1}^{\infty} H_i$. Этим полностью доказано равенство $H = \sum_{i=1}^{\infty} H_i$.

Определение. Группу G будем называть группой типа $\mathscr{P}^+$, если существует простое число p такое, что $G \cong \mathscr{P}_p^+$.

Теорема 1. *Пусть группа G является прямой суммой групп типа $\mathscr{P}^+$ и пусть H – подгруппа в G такая, что G/H является редуцированной периодической группой. Тогда $H \cong G$.*

Доказательство. Пусть дано некоторое определенное прямое разложение группы G в группы типа $\mathscr{P}^+$ и пусть $p_1, p_2, \ldots$ – последовательность всех (положительных) простых чисел. Символом G_i обозначим прямую сумму всех групп $\mathscr{P}_{p_i}^+$ $(i = 1, 2, \ldots)$ из данного прямого разложения G; значит, $G = \sum_{i=1}^{\infty} G_i$. Если положим $H_i = H \cap G_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то по лемме 7 будет $H = \sum_{i=1}^{\infty} H_i$. Для каждого i имеем

$$G_i/H_i = G_i/(G_i \cap H) \cong \{G_i, H\}/H \subseteq G/H\,,$$

или, G_i/H_i является редуцированной периодической группой. Отсюда по лемме 4 будет $H_i \cong G_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, $H = \sum_{i=1}^{\infty} H_i \cong \sum_{i=1}^{\infty} G_i = G$. Этим теорема полностью доказана.

Лемма 8. *Пусть G – группа без кручения, содержащая подгруппу H вида $H = A_1 \dotplus A_2$, где группа A_1 q-полна для каждого простого числа $q \neq p$ и группа A_2 p-полна. Пусть G/H – периодическая группа. Если A_1^* представляет наименьшую сервантную подгруппу в G, содержащую A_1, то группа $(A_1^* \dotplus A_2)/H$ служит p-примарным слагаемым для группы G/H.*

Доказательство. Символом $(G/H)^{(p)}$ обозначим p-примарное слагаемое группы G/H. По предположению группа A_1 является q-полной для каждого простого числа $q \neq p$, значит, A_1^*/A_1 должна быть p-примарной группой. Так как $A_1^*/A_1 \cong (A_1^* \dotplus A_2)/H$, то $(A_1^* \dotplus A_2)/H \subseteq (G/H)^{(p)}$. Пусть теперь $g \in G$ и $g + H \in (G/H)^{(p)}$. Итак, для удобного натурального числа n будет $p^n g \in H = A_1 \dotplus A_2$, или, $p^n g = a_1 + a_2$, где $a_i \in A_i$ $(i = 1, 2)$. Из p-полноты группы A_2 следует существование элемента $a_2' \in A_2$ такого, что $p^n a_2' = a_2$. Это значит, что $p^n(g - a_2') = a_1 \in A_1$, или, $g - a_2' \in A_1^*$. Отсюда следует, что $g \in A_1^* \dotplus A_2$ и также $g + H \in (A_1^* \dotplus A_2)/H$. Но этим уже доказана правильность равенства $(A_1^* \dotplus A_2)/H = (G/H)^{(p)}$.

Лемма 9. *Пусть* p_i $(i = 1, 2, \ldots)$ *— последовательность различных простых чисел и пусть* G *— группа без кручения, содержащая подгруппу* H *вида* $H = \sum_{i=1}^{\infty} H_i$, *где группа* H_i *является прямой суммой групп* $\mathscr{P}_{p_i}^{+}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. *Если* G/H *— периодическая группа, то группу* G *можно представить в виде* $G = \sum_{i=1}^{\infty} G_i$, *где* G_i *является наименьшей сервантной подгруппой в* G *содержащей* H_i $(i = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Прежде всего ясно, что если положить $G^* = \{G_i \ (i = 1, 2, \ldots)\}$, то будет $G^* = \sum_{i=1}^{\infty} G_i$. По лемме 8 будет для каждого i $(G_i \dotplus \sum_{j \neq i} H_j)/H$ p_i-примарным слагаемым группы G/H; притом одновременно имеем $(G_i \dotplus \sum_{j \neq i} H_j)/H \subseteq G^*/H$. Но если p — такое простое число, что $p \neq p_i$ $(i = 1, 2, \text{и}\ldots)$, то подгруппа H должна быть p-полной и, следовательно, p-примарное слагаемое группы G/H будет нулевой группой. Таким образом мы доказали, что все примарные слагаемые группы G/H содержатся в G^*/H, или, $G/H = G^*/H$. Это уже значит, что $G = G^*$, и лемма полностью доказана.

Теорема 2. *Пусть* G *— группа без кручения, пусть* H *— подгруппа в* G *и пусть* G/H *— периодическая группа, каждое примарное слагаемое которой является группой с ограниченными в совокупности порядками элементов. Если одна из групп* G *и* H *является прямой суммой групп типа* $\mathscr{P}^{+}$, *то* $G \cong H$.

Доказательство. Если сама группа G является прямой суммой групп типа $\mathscr{P}^{+}$, то достаточно применить теорему 1 и получим соотношение $H \cong G$.

Итак, пусть подгруппа H разложима в прямую сумму групп типа $\mathscr{P}^{+}$ и пусть дано некоторое ее прямое разложение этого рода. Если p_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — последовательность всех (положительных) простых чисел, то символом H_i обозначим прямую сумму всех слагаемых типа $\mathscr{P}_{p_i}^{+}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. По лемме 9 можно тогда группу G представить в виде $G = \sum_{i=1}^{\infty} G_i$, где G_i является наименьшей сервантной подгруппой в G, содержащей H_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Теперь достаточно доказать, что $G_i \cong H_i$ для каждого i. В самом деле, по лемме 8 группа $(G_i \dotplus \sum_{j \neq i} H_j)/H$ служит p_i-примарным слагаемым для группы G/H, следовательно, порядки ее элементов ограничены в совокупности. Так как $(G_i \dotplus \sum H_j)/H \cong G_i/H_i$, то существует натуральное число n такое, что $nG_i \subseteq H_i$, т. е. группа H_i/nG_i обладает ограниченными в совокупности порядками элементов. По теореме 1 отсюда следует, что $H_i \cong nG_i$. Но G_i является группой без кручения, значит, $nG_i \cong G_i$, или $H_i \cong nG_i \cong G_i$.

Этим доказательство теоремы завершено.

Теперь воспользуемся только что полученными результатами и результатами из [4] для описания структуры некоторых смешанных групп.

Теорема 3. *Пусть G — смешанная группа с периодической частью P, пусть H — подгруппа в G с периодической частью Q и пусть G/H — периодическая группа с ограниченными в совокупности порядками элементов. Если некоторая из групп G/P и H/Q является прямой суммой групп типа $\mathscr{P}^+$ и если одна из групп G и H расщепляема, то обе группы G, H расщепляемы, причем $G/P \cong H/Q$.*

Доказательство. Пусть некоторая из групп G/P и H/Q является прямой суммой групп типа $\mathscr{P}^+$ и пусть одна из групп G, H расщепляема. Тогда из следствия теоремы 3 из [4] вытекает, что обе группы G и H расщепляемы одновременно. Если $H = A \dotplus Q$, то положим $K = A \dotplus P$. Так как $A \cong H/Q \cong$ $\cong K/P$, то одна из групп G/P и K/P разложима в прямую сумму групп типа $\mathscr{P}^+$; притом G/P — группа без кручения. Так как $H \subseteq K$, то G/K и одновременно также $(G/P)/(K/P)$ является группой с ограниченными в совокупности порядками элементов. Следовательно, можем применить теорему 2 и получим соотношение $G/P \cong K/P \cong H/Q$. Теорема полностью доказана.

В заключение докажем еще следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть G — расщепляемая группа вида $G = A \dotplus P$, где группа P периодическая и A является прямой суммой групп типа $\mathscr{P}^+$. Пусть H — подгруппа в G с периодической частью Q и пусть G/H — редуцированная периодическая группа. Если каждое примарное слагаемое группы P/Q обладает ограниченными в совокупности порядками элементов, то $H = A^* \dotplus Q$ и $A^* \cong A$.*

Доказательство. Пусть p_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — последовательность всех простых чисел и пусть дано некоторое прямое разложение группы A в группы типа $\mathscr{P}^+$. Пусть далее A_i является прямой суммой всех групп $\mathscr{P}^+_{p_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ из данного разложения группы A и пусть P_i представляет p_i-примарное слагаемое группы P $(i = 1, 2, \ldots)$. Если теперь положим $G_i = A_i \dotplus P_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, то $G = \sum_{i=1}^{\infty} G_i$, и по лемме 7 можем писать $H = \sum_{i=1}^{\infty} H_i$, где $H_i = G_i \cap H\,(i =$ $= 1, 2, \ldots)$. Очевидно, периодической частью группы H_i является p_i-примарное слагаемое Q_i группы Q. Ясно, что для доказательства теоремы достаточно показать, что каждая группа H_i расщепляема, $H_i = A_i^* \dotplus Q_i$ и $A_i^* \cong A_i$.

Пусть i — некоторый индекс. Положим $K_i = \{H_i, P_i\}$; итак, $K_i \subseteq G_i$. Так как $G_i = A_i \dotplus P_i$ и $P_i \subseteq K_i$, то $K_i = B_i \dotplus P_i$, где $B_i = A_i \cap K_i$. По теореме об изоморфизме имеем

$$(2) \qquad A_i/B_i = A_i/(A_i \cap K_i) \cong \{A_i, K_i\}/K_i \subseteq G_i/K_i$$

и одновременно

$$(3) \qquad G_i/K_i \cong (G_i/H_i)/(K_i/H_i)\,.$$

Кроме того, для группы K_i/H_i имеет место соотношение

$$(4) \qquad K_i/H_i = \{H_i, P_i\}/H_i \cong P_i/(H_i \cap P_i) = P_i/Q_i\,;$$

но так как группа P_i/Q_i изоморфна с p_i-примарным слагаемым группы P/Q, то в силу (4) порядки элементов группы K_i/H_i ограничены в совокупности. Далее, из соотношения

$$G_i/H_i \cong (G_i \dotplus \sum_{j \neq i} H_j)/H \subseteq G/H$$

следует, что G_i/H_i является редуцированной периодической группой и так как для каждого простого числа $q \neq p_i$ группа G_i/H_i q-полна, то она необходимо p_i-примарна. Отсюда и из (3) и (4) в силу леммы 19 из [6] получаем, что G_i/K_i является редуцированной p_i-примарной группой. Но такой же будет в силу (2) группа A_i/B_i. Следовательно, по теореме 1 будет $A_i \cong B_i$. Так как группа K_i/H_i обладает ограниченными в совокупности порядками элементов (смотри (4)), то по теореме 3 группа H_i расщепляема, $H_i = A_i^* \dotplus Q_i$, и притом $A_i^* \cong B_i \cong A_i$.

Этим доказательство теоремы завершено.

Литература

[1] *L. Fuchs:* Abelian groups, Budapest 1958.

[2] *L. Fuchs:* Ranks of modules, Ann. Univ. Sci. Budapestinensis *VI*, 1963, 71—78.

[3] *I. Kapalansky:* Infinite abelian groups, Ann Arbor 1954.

[4] *Л. Прохазка:* Расширения абелевых групп при помощи групп периодических. Чех. мат. ж. 17 (92), 1967, 12—27.

[5] *Л. Прохазка:* Заметка о факторно расщепляемых абелевых группах, Čas. pěst. mat. *87* (1962), 404—414.

[6] *Л. Прохазка:* Об однородных абелевых группах без кручения, Чех. мат. жур. *14* (*89*) 1964, 171—202.

[7] *Л. Я. Куликов:* Обобщенные примарные группы. I, Труды Моск. матем. общества, *1*, 1952, 247—326.

Адрес автора: Praha 8 - Karlín, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta KU).

Zusammenfassung

BEMERKUNG ÜBER DIREKTE SUMMEN VON GRUPPEN VOM TYPE $\mathscr{P}^+$

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

In dieser Bemerkung werden nur abelsche Gruppen untersucht. Mit dem Symbol $\mathscr{P}_p^+$ bezeichnen wir die additive Gruppe ganzer p-adischen Zahlen. Eine torsionsfreie Gruppe G ist vom Type $\mathscr{P}^+$ genannt, falls es eine Primzahl p gibt, für die die Relation $G \cong \mathscr{P}_p^+$ erfüllt ist.

Satz 1. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe, die als eine direkte Summe von Gruppen vom Type $\mathscr{P}^+$ darstellbar ist, und H sei eine ihrer Untergruppen. Ist G/H eine reduzierte periodische Gruppe, so ist $H \cong G$.*

Satz 2. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe, H eine ihrer Untergruppen und G/H sei eine periodische Gruppe, deren jede maximale p-primäre Untergruppe ordnungsbeschränkt ist. Ist eine von den Gruppen G, H als eine direkte Summe von Gruppen vom Type $\mathscr{P}^+$ darstellbar, so gilt $G \cong H$.*

Für irgendeine Gruppe G wird das Symbol G_t die maximale periodische Untergruppe von G bezeichnen.

Satz 3. *Es sei G eine Gruppe und H eine ihrer Untergruppen, für die G/H ordnungsbeschränkt ist. Wenn eine von den Gruppen G/G_t, H/H_t als eine direkte Summe von Gruppen vom Type $\mathscr{P}^+$ dargestellt werden kann und wenn eine von den Gruppen G, H spaltbar ist, so müssen schon beide Gruppen G, H spaltbar sein und außerdem gilt $G/G_t \cong H/H_t$.*

Satz 4. *Es sei G eine spaltbare Gruppe, für die die Faktorgruppe G/G_t als eine direkte Summe von Gruppen vom Type $\mathscr{P}^+$ darstellbar ist, und H sei eine Untergruppe von G. Ist G/H eine reduzierte periodische Gruppe und ist jede maximale p-primäre Untergruppe von G_t/H_t ordnungsbeschränkt, so muß die Gruppe H ebenfalls spaltbar sein und es gilt $G/G_t \cong H/H_t$.*