Jan Kadlec

О решении первой краевой задачи для некоторого обобщения уравнения теплопроводности в классах функций с дробной производной по времени

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 16 (1966), No. 1, 91–113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100714

Чехословацкий математический журнал, т. 16 (91) 1966, Прага

О РЕШЕНИИ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРОГО ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КЛАССАХ ФУНКЦИЙ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ПО ВРЕМЕНИ

ЯН КАДЛЕЦ (Jan Kadlec), Прага

(Поступило в редакцию 2/II 1965г.)

1. ВВЕДЕНИЕ

Важную роль при изучении эллиптических дифференциальных уравнений играют методы фунционального анализа. В настоящей работе мы используем эти методы для уравнений, которые очень близки эллиптическим (см. § 2). Класическим примером такого уравнения является уравнение теплопроводности. Показывается, что с уравнениями, которые мы будем рассматривать, возможно работать как с эллиптическими, так как билинейная форма, порожденная уравнением, „эллиптична" над некоторыми пространствами, если только „эллиптичность" понимается в достаточно широком смысле.

В работе [7] изучалось для гладких коэффициентов уравнения и гладкой области параболическое уравнение над пространствами функций, которые обладают дробными производными по переменной t. В работах [2], [3], [8], [9] изучаются уравнения, поведение которых близко поведению уравнения теплопроводности. Возникает вопрос, можно-ли рещить такие уравнения при более слабых предположениях на область и коэффициенты и регулярность правой части уравнения. Для этого изучаются в § 3 подробно свойства специальных пространств функций, в которых мы будем искать решение уравнения. В § 4 доказывается, что рассматриваемые дифференциальные операторы однозначно отображают пространства решений на пространства правых частей.

В § 5 для таких уравнений решается первая краевая задача.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

2.1 Обозначения. Пусть E_n – вещественное n-мерное Евклидово пространство, Ω – ограниченная область в E_n. Точки пространства E_n обозначим $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Пусть, далее, $E_{n+1} = E_n \times E_1$ – $(n + 1)$-мерное пространство точек (x, t), где $x \in E_n$. Переменная t — время. Пусть $I \subset E_1$ является открытым интервалом $I = (a, b)$, $-\infty \leqq a < b \leqq +\infty$. Обозначим $Q = \Omega \times I$. Границу Ω и Q обозначим $\Omega^{\bullet}$ и $Q^{\bullet}$.

Пусть $i = (i_1, \ldots, i_n)$, где i_α неотрицательные целые числа и $|i| = i_1 + \ldots + i_n$,

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}.$$

Пусть $k \geqq 0$, $l \geqq 0$ целые числа и пусть $a^{ij}(x, t)$, $b^{ij\alpha\beta}(x, t)$ — ограниченные измеримые функции на Q. При этом функции a^{ij} определены для $|i| \leqq k$, $|j| \leqq k$ и функции $b^{ij\alpha\beta}$ для

$$0 < \alpha + \beta < 2l + 1, \quad 0 \leqq \alpha \leqq \left(l + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{|i|}{k}\right), \quad 0 \leqq \beta \leqq \left(l + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{|j|}{k}\right),$$

где α, β целые числа (множество таких чисел α, β обозначим коротко символом $\varrho(i, j, l)$).

Обозначим

$$A(u, v) = \sum_{\substack{|i| \leqq k \\ |j| \leqq k}} \int_Q \overline{a^{ij} D^i u} D^j v \, \mathrm{d}Q$$

и $\mathscr{D}(Q)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций на Q с компактным носителем в Q.

Пусть существует постоянная $\nu > 0$ такая, что для всех $\varphi \in \mathscr{D}(Q)$ имеет место

$$\operatorname{Re} A(\varphi, \varphi) \geqq \nu \sum_{|i| \leqq k} |D^i \varphi|^2_{L_2(Q)},$$

где Re обозначает действительную часть комплексного числа. Далее обозначим

$$B(u, v) = \sum_{\substack{|i| \leqq k \\ |j| \leqq k}} \sum_{\varrho(i,j,l)} \int_Q \overline{b^{ij\alpha\beta} D^i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}} D^j \frac{\partial^\beta v}{\partial t^\beta} \, \mathrm{d}Q,$$

$$D(u, v) = A(u, v) + B(u, v) + \int_Q \overline{\frac{\partial^{l+1} u}{\partial t^{l+1}}} \frac{\partial^l v}{\partial t^l} \, \mathrm{d}Q.$$

Пусть для всех $\varphi \in \mathscr{D}(Q)$ имеет место $\operatorname{Re} B(\varphi, \varphi) \geqq 0$.

Пусть f — обобщенная функция на Q. Скажем, что $Du = f$, если для всех $\varphi \in \mathscr{D}(Q)$ имеет место $D(u, \varphi) = \overline{f(\overline{\varphi})}$.

Символом D обозначаем дифференциальный оператор

$$Du = \sum_{\substack{|i|\leq k\\|j|\leq k}} D^j(-1)^{|j|}\, a^{ij}D^i u + \sum_{\substack{|i|\leq k\\|j|\leq k}} \sum_{\varrho(i,j,l)} D^j \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta}(-1)^{\beta+|j|}\, b^{ij\alpha\beta}\, D^i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} +$$

$$+ (-1)^l \frac{\partial^{2l+1} u}{\partial t^{2l+1}} = Au + Bu + (-1)^l \frac{\partial^{2l+1} u}{\partial t^{2l+1}}$$

где $Au = \sum_{|i|,|j|\leq k} D^j(-1)^{|j|}\, a^{ij}D^i u$ является эллиптической частью оператора D.

Первая краевая задача для оператора D заключается в нахождении функции u, для которой $Du = f$ и в некотором смысле (см. § 4) имеют место условия

$$u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = \ldots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}}(x, t) = 0$$

для всех $x \in \Omega^\cdot$, $t \in I$, где ν — вектор внешней нормали к $\Omega^\cdot$, и

$$u(x, a) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, a) = \ldots = \frac{\partial^l u}{\partial t^l}(x, a) = 0\,,$$

$$u(x, b) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, b) = \ldots = \frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}}(x, b) = 0$$

для $x \in \Omega$.

Точно говоря, функция u находится в пространстве ${}^0_S W_2^{(k,l')}(\Omega \times I)$, которое мы ниже определим.

2.2 Определение. Пусть α — целое число. Обозначим $\alpha' = \alpha + \frac{1}{2}$. Обозначим, далее, для $Q = \Omega \times (-\infty, \infty)$

$$|\varphi| = \frac{1}{2\pi}\left(\int_Q |\eta|^{2l+1} \left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t)\, e^{i\eta t}\, \mathrm{d}t\right|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\varphi\| = \Big(\sum_{|i|\leq k} |D^i\varphi|^2_{L_2(Q)} + |\varphi|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathfrak{F}\, \varphi(x, \eta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t)\, e^{i\eta t}\, \mathrm{d}t\,.$$

Символом ${}^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, \infty))$ (кратце ${}^0W_2^{(k,l')}$) обозначим замыкание $\mathscr{D}(Q)$ в норме $\|\,.\|$.

Очевидно, что ${}^0W_2^{(k,l')}$ — полное пространство Гильберта. Функция $u \in {}^0W_2^{(k,l')}$ обладает всеми обобщенными по x порядка k, интегрируемыми с квадратом, и l-тыми производными по t, тоже интегрируемыми с квадратом. Итак функция u имеет на всех гиперплоскостях $t = \mathrm{const}$ следы всех производных по t до порядка $l-1$. Следы находятся в пространстве $L_2(\Omega)$. Через M обозначим замыкание всех $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (-\infty, \infty))$, для которых $\partial^\alpha \varphi / \partial t^\alpha (x, a) = = \partial^\alpha \varphi / \partial t^\alpha (x, b) = 0$ для $\alpha = 0, 1, \ldots, l-1$ в норме $\|.\|$.

${}^0_R W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ – пространство всех $u \in L_2(\Omega \times (a, b))$, для которых существует продолжение $Pu \in M$. В этом пространстве введем норму

$$\|u\|_R^{(a,b)} = \inf \|Pu\| ,$$

где нижняя грань берется по всем продолжениям функции u.

Пусть $u \in {}^0W_2^{(k,l')}$, $\varphi \in \mathscr{D}(Q)$, $Q = \Omega \times (a, b)$. Обозначим

$$\begin{aligned}\langle u, \varphi \rangle_a^b &= (-1)^{l+1} \int_Q \bar{u} \frac{\partial^{2l+1} \varphi}{\partial t^{2l+1}} \, \mathrm{d}Q = \\ &= (-1)^{l+1} \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \bar{u} \frac{\partial^{2l+1} \varphi}{\partial t^{2l+1}} \, \mathrm{d}\Omega \, \mathrm{d}t = \\ &= 2\pi \mathrm{i} \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \eta \mathfrak{F} \frac{\partial^l u}{\partial t^l} (x, \eta) \, \mathfrak{F} \frac{\partial^l \varphi}{\partial t^l} (x, \eta) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

и

$$|u|_P^{(a,b)} = \sup_{\|\varphi\|_{R^{(a,b)}} \leqq 1, \varphi \in \mathscr{D}(Q)} |\langle u, \varphi \rangle_a^b| .$$

Далее обозначим ${}^0_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ пространство всех $u \in {}^0_R W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ для которых $|u|_P^{(a,b)} < +\infty$.

В пространство ${}^0_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ введем норму $\|u\|_P^{(a,b)} = \left(\sum_{|i| \leqq k} |D^i u|^2_{L_2(Q)} + \right.$ $\left. + [|u|_P^{(a,b)}]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

В § 3 покажем, что ${}^0_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ полное пространство.

${}^0_S W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ обозначим подпространство ${}^0_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ тех u, для которых существует продолжение $Pu \in {}^0W_2^{(k,l')}$ такое, что $Pu(x, t) = 0$ для $t < a$.

2.3 Замечание. ${}^0W_2^{(k,l)}$ – замыкание $\mathscr{D}(\Omega \times (-\infty, \infty))$ в норме

$$|\varphi|_{W_2(k,l)} = \left(\sum_{|i| \leqq k} |D^i \varphi|^2_{L_2(Q)} + \left| \frac{\partial^l \varphi}{\partial t^l} \right|^2_{L(Q)} \right)^{\frac{1}{2}} .$$

2.4 Теорема. *Пусть P – отображает линейно и непрерывно $W_2^{(l)}(E_1)$ в $W_2^{(l)}(E_1)$ и $W_2^{(l+1)}(E_1)$ в $W_2^{(l+1)}(E_1)$. Пусть отображение T удовлетворяет для почти всех $x \in \Omega$ условию*

$$Tu(x, t) = Pu(x, t) ,$$

где $Pu(x, t)$ понимается в смысле $x = \mathrm{const}$. Пусть, далее, T отображает непрерывно и линейно ${}^0W_2^{(k,l+1)}$ в ${}^0W_2^{(k,l+1)}$ и ${}^0W_2^{(k,l)}$ в ${}^0W_2^{(k,l)}$. Тогда отображение T отображает линейно и непрерывно ${}^0W_2^{(k,l')}$ в ${}^0W_2^{(k,l')}$.

Доказательство. Из теории интерполяций (см. [6]) вытекает, что P отображает $W_2^{(l')}(E_1)$ в $W_2^{(l')}(E_1)$ непрерывно. Итак

$$|Tu|^2 \leqq C(|u|^2 + |u|^2_{L_2(Q)}),$$

где $Q = \Omega \times (-\infty, \infty)$.

С другой стороны для $|i| \leqq k$

$$|D^i Tu|^2_{L_2(Q)} \leqq |Tu|^2_{W_2(k,l)} \leqq C|u|^2_{W_2(k,l)} \leqq C\|u\|^2,$$

и

$$|u|^2 \leqq \|u\|^2, \quad |u|^2_{L_2(Q)} \leqq \|u\|^2.$$

Из этого уже вытекает, что

$$\|Tu\|^2 \leqq C\|u\|.$$

2.5 **Теорема.** *Пусть* $u \in {}^0_R W_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$. *Определим функцию* Ku *соотношениями*

$$Ku(x, t) = u(x, t) \quad \text{для} \quad t > 0,$$

$$Ku(x, t) = \sum_{\beta=1}^{r} \lambda_\beta u(x, -\beta t) \quad \text{для} \quad t < 0,$$

где $r > l$ *и числа* λ_β *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{\beta=1}^{r} \lambda_\beta (-\beta)^\alpha = 1$$

для $\alpha = 0, 1, \ldots, l$. *Тогда* $Ku \in {}^0W_2^{(k,l')}$ *и существует постоянная* $C > 0$ *так, что*

$$\|u\|_R^{(0,\infty)} \leqq \|Ku\| \leqq C\|u\|_R^{(0,\infty)}.$$

Доказательство. Отображение K для фиксированного x обозначим R Отображение $u \to u/(0, \infty) \to Ru$, которое функции $u \in L_2(-\infty, \infty)$ ставит в соответствие функцию $Ru \in L_2(-\infty, \infty)$, обозначим P и T определим соотношением $Tu(x, t) = Pu(x, t)$. Отображения P и T удовлетворяют условиям теоремы 2.4, итак $\|Tu\| \leqq C\|u\|$. Но Tu одинаково для всех функций, которые на $\Omega \times (0, \infty)$ совпадают и $Tu = K(u/(0, \infty))$; итак

$$\|Ku\| \leqq C\|u\|_R^{(0,\infty)}.$$

Очевидно, что $\|u\|_R^{(0,\infty)} \leqq \|Ku\|$, так как Ku — продолжение функции u.

2.6 Определение. Отображение K из теоремы 2.5 будем называть каноническим продолжением функции u. Каноническим продолжением функции $u \in {}^0_R W_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, 0))$ будем называть функцию Ku, для которой

$$(Ku)(x, -t) = K(u(x, -t)).$$

2.7 Замечание. Если будет ясно, какие a и b, то иногда будем писать место $\|u\|_P^{(a,b)}$ просто $\|u\|_P$ и под.

3.1 Теорема. *Пусть* $u \in {}_P^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, 0))$. *Пусть* Pu *— продолжение функции* u, $Pu \in {}^0W_2^{(k,l')}$. *Тогда* $Pu \in {}_P^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$ *и существует положительная постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$\|Pu\|_P^{(0,\infty)} \leqq C(\|Pu\| + \|u\|_P^{(-\infty,0)}).$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (0, \infty))$. Тогда $K\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (-\infty, \infty))$ и $K\varphi/_{(-\infty,0)} \in \mathscr{D}(\Omega \times (-\infty, 0))$. Но

$$\langle Pu, \varphi\rangle_0^\infty = \langle Pu, K\varphi\rangle_{-\infty}^\infty - \langle Pu, K\varphi\rangle_{-\infty}^0 .$$

Теперь

$$|\langle Pu, K\varphi\rangle_{-\infty}^\infty| \leqq C\|Pu\| \, \|K\varphi\| ,$$

$$|\langle u, K\varphi\rangle_{-\infty}^0| \leqq C\|u\|_P^{(-\infty,0)} \, \|K\varphi\|_R^{(-\infty,0)}$$

$$\|K\varphi\|_R^{(-\infty,0)} \leqq \|K\varphi\| \leqq C\|\varphi\|_R^{(0,\infty)}$$

Итак

$$|\langle Pu, \varphi\rangle_0^\infty| \leqq C(\|Pu\| + \|u\|_P^{(-\infty,0)}) \, \|\varphi\|_R^{(0,\infty)}$$

и теорема доказана.

3.2 Лемма. *Пусть* $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (-\infty, \infty))$ *и* $\delta^\alpha\varphi/\partial t^\alpha(x, 0) = 0$ *для* $0 \leqq \alpha \leqq l - 1$. *Тогда функция* ψ, *определенная соотношением* $\psi(x, t) = l! \; \varphi(x, t)/t^l$ *для* $t \neq 0$ *обладает непрерывным продолжением на* $\Omega \times (-\infty, \infty)$ *и* $\psi \in \mathscr{D}(\Omega \times (-\infty, \infty))$.

Доказательство. Лемму хватит доказывать только для $l = 1$. В этом случае очевидно, что $\psi(x, 0) = \partial\varphi/\partial t\,(x, 0)$. Обозначим

$$f_m(x, t) = \frac{\partial^m\psi}{\partial t^m}(x, t)\, t^{m+1} \quad \text{для} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Тогда имеют место соотношения:

1) $f_m(x, t) \to 0$ для $t \to 0$ равномерно по x,

2) $(\partial/\partial t) f_m(x, t) = t^m(\partial^{m+1}\varphi/\partial t^{m+1})(x, t)$,

которые легко доказать по индукции.

Теперь равномерно по x

$$\lim_{t\to 0} \frac{\partial^m\psi}{\partial t^m}(x, t) = \lim_{t\to 0} \frac{f_m(x, t)}{t^{m+1}} = \lim_{t\to 0} t^{-m}(m + 1)^{-1} \frac{\partial f^m}{\partial t}(x, t) =$$

$$= (m + 1)^{-1} \frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m+1}}(x, 0).$$

Итак существует $\partial^m\psi/\partial t^m(x, 0)$. Так как $D^i\varphi$ удовлетворяет предположениям теоремы и $D^i\psi(x, t) = (D^i\varphi(x, t))/t$ для $t \neq 0$, то существует тоже $(\partial^m/\partial t^m)\, D^i\psi(x, 0)$ и лемма доказана.

3.3 Лемма. *Овозначим для* $h > 0$

$$f_h(t) = 1 - \min\left(1, \max\left(0, 1 + h \ln |t|\right)\right).$$

Тогда

$$\lim_{h \to 0} |f_h|_{W_2(\frac{1}{2})} = 0\,,$$

где

$$|f|_{W_2(\frac{1}{2})} = \left(|f|^2_{L_2(E_1)} + \int_{-\infty}^{\infty} |\eta|\, |\mathfrak{F} f(\eta)|^2 \,\mathrm{d}\eta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Обозначим $F_h(x_1, x_2) = f_h(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$. Легко показать, что $F_h \to 0$ в пространстве $W_2^{(1)}(E_2)$. По теореме вложения (см. [1], [10]) $F_h(x_1, 0) \to 0$ в пространстве $W_2^{(\frac{1}{2})}(E_1)$. Но $F_h(x_1, 0) = f_h(x_1)$ и лемма доказана.

3.4 Теорема. $\mathscr{D}(\Omega \times (0, \infty))$ *плотно в пространстве* ${}_R^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$.

Доказательство. Определим

$$F_h(t) = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{l-1}}{(l - 1)!}\, f_h(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

где функция f_h из леммы 3.3. Пусть $g \in \mathscr{D}(-\infty, \infty)$ и $g(t) = 1$ для $-1 \leqq t \leqq 1$. Обозначим $G_h(t) = G(t)\, F_h(t)$.Для функции G_h имеет в окрестности нуля место равенство $G_h(t) = t^l/l!$ и легко доказать, что $G_h^{(l)} \to 0$ в пространстве $W_2^{(\frac{1}{2})}(E_1)$.

Пусть теперь $u \in {}_R^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$. Существует приближение φ, $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (-\infty, \infty))$ такое, что $\partial^\alpha\varphi/\partial t^\alpha(x, 0) = 0$ для $0 \leqq \alpha \leqq l - 1$. Обозначим $\psi(x, t) = l!\, \varphi(x, t)/t^l$. Тогда $\psi \in \mathscr{D}(\Omega \times (-\infty, \infty))$. Обозначим $\varphi_h(x, t) = (t^l/l! - G_h(t))\, \psi(x, t)$. Функция φ_h равна нулю в окрестности плоскости $t = 0$ и $\|\varphi_h - \varphi\| \to 0$ для $h \to 0$.

Итак $\|\varphi_h - \varphi\|_R^{(0,\infty)} \to 0$ для $h \to 0$. Если приближить φ_h усреднением по t, получим приближение функции u функцией, которая находится в пространстве $\mathscr{D}(\Omega \times (0, \infty))$.

Из теоремы 3.4 вытекает непосредственно

3.5 Теорема. $\mathscr{D}(\Omega \times (a, b))$ *плотно в пространстве* ${}_R^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$.

3.6 Замечание. Пусть функция $u \in {}_P^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ и функция $v \in {}_R^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$. Пусть $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega \times (a, b))$ и φ_n стремится к функции v в пространстве ${}_R^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$. Тогда существует предель $\lim\limits_{n \to \infty} \langle u, \varphi_n \rangle_a^b$ который обозначим $\langle u, v \rangle_a^b$.

3.7 Теорема $u \in {}_P^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$. *Тогда существует положительная постоянная C такая, что*

$$\|u\|_R^{(0,\infty)} \leqq C\|u\|_P^{(0,\infty)}.$$

Доказательство. Пусть Ku – каноническое продолжение функции u. Имеют место следующие неравенства:

$$\|u\|_R \leqq \|Ku\| \leqq C\|u\|_R.$$

Определим функцию Su следующим соотношением

$$Su(x, t) = -\mathfrak{F}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi} \mathrm{i} \operatorname{sgn} \eta \mathfrak{F} Ku(x, \eta)\right).$$

Для всех $t < 0$ определим $u(x, t) = 0$. Итак

$$\mathfrak{F}Ku(x, \eta) = \mathfrak{F}u(x, \eta) + \sum_{\beta=1}^{l+1} \frac{\lambda_\beta}{\beta} \mathfrak{F}u\left(x, -\frac{\eta}{\beta}\right).$$

и

$$\mathfrak{F}\frac{\partial^\alpha Su}{\partial t^\alpha}(x, \eta) = -\frac{\mathrm{i}}{2\pi}(-\mathrm{i}\eta)^\alpha \operatorname{sgn} \eta \mathfrak{F}Ku(x, \eta)$$

для $\alpha = 0, 1, \ldots, l$.

Из свойств чисел λ_β вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}\frac{\partial^\alpha Su}{\partial t^\alpha}(x, \eta)\, \mathrm{d}\eta = 0$$

для $\alpha = 0, 1, \ldots, l$.

Определим функцию Tu так, чтобы

$$Tu(x, t) = Su(x, t) \quad \text{для} \quad t > 0$$

и

$$Tu(x, t) = 0 \quad \text{для} \quad t < 0.$$

Отображение $u \to u/\Omega \times (0, \infty) \to Ku \to Tu$ непрерывно и линейно отображает пространство ${}^0W_2^{(k,l+1)}(\Omega \times E_1)$ в пространство ${}^0W_2^{(k,l+1)}(\Omega \times E_1)$. Непрерывно отображает тоже пространство ${}^0W_2^{(k,l)}(\Omega \times E_1)$ в пространство ${}^0W_2^{(k,l)}(\Omega \times E_1)$, так как следы всех производных по t до порядка l нулевые. Итак отображение, которое функции u ставит в соответствие функцию Tu, отображает линейно и непрерывно пространство ${}^0W_2^{(k,l')}$ в пространство ${}^0W_2^{(k,l')}$. Из этого вытекает, что $\|Tu\| \leqq C\|u\|_R$.

Обозначим $w_1 = Tu$, $w_2 = Su - Tu$, $Mu = w$, где

$$w(x, t) = w_1(x, t) - \sum_{\beta=1}^{l+1} \lambda_\beta \beta^{2l} w_2\left(x, -\frac{t}{\beta}\right).$$

Очевидно, что

$$\|Mu\|_R \leqq \|Mu\| \leqq C\|Ku\| \leqq C\|u\|_R .$$

Теперь

$$\langle u, Mu\rangle_0^\infty = \int_\Omega \int_0^\infty \overline{\frac{\partial^{l+1} u}{\partial t^{l+1}}(x, t)} \left[\frac{\partial^l w_1}{\partial t^l}(x, t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{\beta=1}^{l+1} \lambda_\beta \beta^l (-1)^l \frac{\partial^l w_2}{\partial t^l}\left(x, -\frac{t}{\beta}\right)\right] \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t = \langle u, w_1\rangle_0^\infty -$$

$$- \sum_{\beta=1}^{l+1} \lambda_\beta (-1)^l \beta^l \int_\Omega \int_0^\infty \overline{\frac{\partial^{l+1} u}{\partial t^{l+1}}(x, t)} \frac{\partial^l w_2}{\partial t^l}\left(x, -\frac{t}{\beta}\right) \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t.$$

После замены переменных $s = -t/\beta$ получаем

$$\langle u, Mu\rangle_0^\infty = \langle u, w_1\rangle_0^\infty +$$

$$+ \sum_{\beta=1}^{l+1} \lambda_\beta (-1)^{l+1} \beta^{l+1} \int_\Omega \int_{-\infty}^0 \overline{\frac{\partial^{l+1} u}{\partial t^{l+1}}(x, -\beta s)} \frac{\partial^l w_2}{\partial t^l}(x, s)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}s =$$

$$= \langle Ku, Su\rangle_{-\infty}^\infty = |Ku|^2 .$$

Итак

$$|Ku|^2 \leqq |u|_P \|Mu\|_R \leqq C\|u\|_P \|u\|_R$$

и

$$\|u\|_R^2 \leqq \|Ku\|^2 \leqq C\|u\|_P \|u\|_R + \sum_{|i| \leqq k} |D^i Ku|^2_{L_2(\Omega \times E_1)} \leqq C\|u\|_P \|u\|_R$$

и теоерема доказана.

3.8 Лемма. *Пусть функции* $u, v \in {}_R\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0,1))$, φ *— действительная функция,* $\varphi \in \mathscr{D}(0, 1)$, $\alpha \leqq l$, $\beta \leqq l$. *Тогда для любого* $\varkappa > 0$ *существует* $C(\varkappa) > 0$ *такая, что*

$$\left|\int_\Omega \int_0^1 \overline{\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}(x, t)} \varphi(t) \frac{\partial^\beta v}{\partial t^\beta}(x, t)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\right| \leqq$$

$$\leqq \varkappa\|u\|_R \|v\|_R + C(\varkappa)\, |u|_{L_2(\Omega \times (0,1))} |v|_{L_2(\Omega \times (0,1))} .$$

При этом постоянная $C(\varkappa)$ *не зависит от функций* u, v.

Доказательство. Пусть $\alpha + \beta = 0$. Тогда утверждение леммы очевидно. Пусть утверждение леммы имеет место для α', β' такие, что $\alpha' + \beta' < \alpha + \beta$.

Пусть (на пример) $\alpha \neq 0$. Существует действительная функция $\psi \in \mathscr{D}(0, 1)$ такая, что $\psi(t) = 1$ для всех t таких, что $\varphi(t) \neq 0$. Тогда

$$\int_\Omega \int_0^1 \overline{\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}}\, \varphi\, \frac{\partial^\beta v}{\partial t^\beta}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t = \int_\Omega \int_0^1 \overline{\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}}\, \varphi\psi\, \frac{\partial^\beta v}{\partial t^\beta}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_\Omega \int_0^1 \overline{\frac{\partial^\alpha u\varphi}{\partial t^\alpha}}\, \frac{\partial^\beta v\psi}{\partial t^\beta}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t + Z(u, v)\,,$$

где в член $Z(u, v)$ входят интегралы указанного вида, в которых α' и β' такие, что $\alpha' + \beta' < \alpha + \beta$, и которые по предположению можно оценить.

Далее

$$I = \left|\int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial^\alpha u\varphi}{\partial t^\alpha}\, \frac{\partial^\beta v\psi}{\partial t^\beta}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}t\right| \leqq C \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} |\eta|^{\alpha+\beta}\, |\mathfrak{F}\varphi Pu|\, |\mathfrak{F}\psi Pv|\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\eta$$

и

$$|\eta|^{\alpha+\beta} \leqq \varkappa|\eta|^{2l+1} + C(\varkappa)$$

где Pu и Pv продолжения функций u и v.

Итак

$$I \leqq \varkappa C\|Pu\|\, \|Pv\| + C(\varkappa)\, |Pu|_{L_2}\, |Pv|_{L_2}\,.$$

Теперь возьмем нижнюю грань правой части по всем продолжениям Pu и Pv и получим утверждение теоремы, если только $\varkappa$ достаточно малое.

3.9 Теорема. *Пусть функция* $u \in {}_P^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$. *Тогда существует постоянная* $C > 0$ *такая, что*

$$\|u\|_R^{(a,b)} \leqq C\|u\|_P^{(a,b)}\,.$$

Доказательство. В случае, когда $\max(|a|, |b|) = \infty$, сводится доказательство к доказательству теоремы 3.7. Псуть теперь $-\infty < a < b < +\infty$ и на пример $(a, b) = (0,1)$. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – бесконечно дифференцируемые действительные функции и $\varphi_1(t) + \varphi_2(t) = 1$ для всех $t \in E_1$, $\varphi_1(t) = 0$ для $t \leqq \frac{1}{4}$, $\varphi_2(t) = 0$ для $t \geqq \frac{3}{4}$. Для простоты положим $u(x, t) = 0$ для $t \notin (0, 1)$.

Очевидно, что $\|u\|_R^{(0,1)} \leqq \|u\varphi_1\|_R^{(0,1)} + \|u\varphi_2\|_R^{(0,1)}$. По теореме 3.7

$$\|u\varphi_1\|_R^{(0,1)} \leqq \|u\varphi_1\|_R^{(-\infty,1)} \leqq C\|u\varphi_1\|_P^{(-\infty,1)}$$

Далее

$$\sup_{\|v\|_R^{(-\infty,1)} \leqq 1} \langle u\varphi_1, v\rangle_{-\infty}^1 = \sup\left(\langle u, \varphi_1 v\rangle_{-\infty}^1 + Z(u, v)\right),$$

где $Z(u, v)$ состоит из членов вида

$$C \int_\Omega \int_0^1 \frac{\overline{\partial^\alpha u}}{\partial t^\alpha} \varphi_1{}^{(\beta)} \frac{\partial^\gamma v}{\partial t^\gamma} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t$$

где $\alpha \leqq l$, $\gamma \leqq l$, $\beta \geqq 1$, $\alpha + \beta + \gamma = 2l + 1$.

Итак

$$|Z(u, v)| \leqq \left(\varkappa \|u\|_R^{(0,1)} + C(\varkappa) |u|_{L_2}\right) \|v\|_R^{(0,1)}$$

и

$$\sup_{\|v\|_{R^{(-\infty,1)}} \leqq 1} \langle u\varphi_1, v\rangle_{-\infty}^1 \leqq \|u\|_P^{(0,1)} \|\varphi_1 v\|_R^{(0,1)} + \left(\varkappa \|u\|_R^{(0,1)} + C(\varkappa) |u|_{L_2}\right) \|v\|_R^{(0,1)} .$$

Далее

$$\|v\|_R^{(0,1)} \leqq \|v\|_R^{(-\infty,1)} \leqq 1$$

и

$$\|\varphi_1 v\|_R^{(0,1)} \leqq \|\varphi_1 v\|_R^{(-\infty,1)} \leqq C\|v\|_R^{(-\infty,1)} \leqq C .$$

Итак получаем

$$\|u\varphi_1\|_P^{(-\infty,1)} \leqq C(\varkappa) \|u\|_P^{(0,1)} + \varkappa \|u\|_P^{(0,1)}$$

и

$$\|u\varphi_1\|_R^{(0,1)} \leqq C(\varkappa) \|u\|_P^{(0,1)} + C\varkappa \|u\|_P^{(0,1)} .$$

Аналогично получаем

$$\|u\varphi_2\|_R^{(0,1)} \leqq C(\varkappa) \|u\|_P^{(0,1)} + C\varkappa \|u\|_P^{(0,1)} .$$

Итак для $C\varkappa < \frac{1}{4}$ получаем

$$\|u\|_R^{(0,1)} \leqq C\|u\|_P^{(0,1)} .$$

3.10 Теорема. *Пространство* ${}_P^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ *является пространством Банаха.*

Доказательство. Пусть $\|u_n - u_m\|_P^{(a,b)} \to 0$ для $m \to \infty$, $n \to \infty$. Итак $\|u_n - u_m\|_R^{(a,b)} \to 0$ и существует предел u в пространстве ${}_R^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$. Для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (a, b))$ имеет место $|\langle u_n, \varphi\rangle_a^b| \leqq C\|\varphi\|_R$, где $C = \sup_n |u_n|_P < \infty$. Итак $u \in {}_P^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ и очевидно последовательность u_n стремится к функции u в пространстве ${}_P^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$.

3.11 Лемма. *Пусть функция* $u \in {}^0W_2^{(k,l')}$ *и пусть* $u(x, t) = 0$ *для* $t < 0$. *Тогда существует последовательность* $\varphi_n \in \mathscr{D}(\Omega \times (0, \infty))$, $\varphi_n(x, t) = 0$ *для* $t < 0$ *такая, что* φ_n *стремится к функции* u *в пространстве* ${}^0W_2^{(k,l')}$.

Доказательство. Обозначим $u_\lambda(x, t) = u(x, t - \lambda)$. Тогда $\lim_{\lambda \to 0} u_\lambda = u$ в пространстве ${}^0W_2^{(k,l')}$. Итак существует λ такое, что $\|u - u_\lambda\| < 1/2n$. Пусть ψ — бесконечно дифференцируемая функция такая, что $\psi(t) = 0$ для $t < \frac{1}{2}\lambda$ и $\psi(t) = 1$ для $t > \lambda$. Теперь существуют функции $\varkappa_m \in \mathscr{D}(\Omega \times E_1)$ такие, что $\chi_m \to u_\lambda$ для $m \to \infty$. Итак $\psi\chi_m \to \psi u_\lambda = u_\lambda$. Теперь существует m_0 такое, что $\|u_\lambda - \psi\chi_{m_0}\| < 1/2n$. Обозначим $\psi\chi_{m_0} = \varphi_n$. Тогда $\|\varphi_n - u\| < 1/n$ и теорема доказана.

3.12 Лемма. *Пусть функция* $u \in {}^0W_2^{(k,l')}$ *и пусть* $u(x, t) = 0$ *для* $t < 0$. *Пусть* Ku *— каноническое продолжение функции* u. *Обозначим* $Pu = 2u - Ku$ *на* $\Omega \times (-\infty, \infty)$. *Тогда существуют постоянные* $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$ *такие, что*

$$C_1\|u\| \leqq \|Pu\| \leqq C_2\|u\| .$$

Доказательство. Второе неравенство очевидно. Теперь

$$\|u\| = \tfrac{1}{2}\|Pu + Ku\| \leqq \tfrac{1}{2}\|Pu\| + \tfrac{1}{2}\|Ku\| \leqq \tfrac{1}{2}\|Pu\| + C\|u\|_R^{(0,\infty)} \leqq C\|Pu\| ,$$

так как Pu — продолжение функции u и лемма доказана.

3.13 Теорема. ${}^0W_2^{(k,l')} = {}^0_PW_2^{(k,l')}(\Omega \times E_1)$ *и существует постоянная* $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$ *так, что*

$$C_1\|u\| \leqq \|u\|_P^{(-\infty,\infty)} \leqq C_2\|u\| .$$

Доказательство: Теорема вытекает из неравенства

$$|\langle u, \varphi\rangle_{-\infty}^{\infty}| \leqq C\|u\| \, \|\varphi\| .$$

3.14 Лемма. *Пусть функция* $u \in {}^0W_2^{(k,l')}$ *и пусть* $u(x, t) = 0$ *для* $t < 0$. *Тогда*

$$C_1\|u\| \leqq \|u\|_P^{(0,\infty)} \leqq C_2\|u\| .$$

Доказательство. Второе из неравенств вытекает из определения. Из леммы 3.11 вытекает, что первое неравенство достаточно доказать для $u \in \mathscr{D}(\Omega \times (0, \infty))$.

Из теоремы 3.13 и леммы 3.12 следует, что

$$\sup_{\|\varphi\| \leqq 1} |\langle u, \varphi\rangle_{-\infty}^{\infty}| \leqq C\|Mu\| ,$$

где

$$Mu(x, t) = u(x, t) + \sum_{\beta=1}^{2l+1} \lambda_\beta u(x, -\beta t) ,$$

где

$$1 + \sum_{\beta=1}^{2l+1} \lambda_\beta(-\beta)^\alpha = 0 \quad \text{для} \quad \alpha = 0, 1, \ldots, l,$$

$$1 - \sum_{\beta=1}^{2l+1} \lambda_\beta(-\beta)^\alpha = 0 \quad \text{для} \quad \alpha = l + 1, \ldots, 2l.$$

Далее

$$|Mu|^2 \leqq C \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} \eta^{2l+1} \operatorname{sgn} \eta |\mathfrak{F}Mu(x, \eta)|^2 \, \mathrm{d}\eta \, \mathrm{d}x = C|\langle u, v\rangle_0^\infty|,$$

где $v \in {}^0W_2^{(k,l')}$, $\|v\| \leqq C\|u\|$ и

$$\mathfrak{F}v(x, \eta) = \operatorname{sgn} \eta \left[\mathfrak{F}u(x, \eta) + \sum_{\beta=1}^{2l+1} \frac{\lambda_\beta}{\beta} \mathfrak{F}u\left(x, -\frac{\eta}{\beta}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{\gamma=1}^{2l+1} \gamma^{2l+1} \lambda_\gamma \mathfrak{F}u(x, -\gamma\eta) + \sum_{\gamma,\beta=1}^{2l+1} \frac{\gamma^{2l+1}}{\beta} \lambda_\gamma \lambda_\beta \mathfrak{F}u\left(x, \frac{\gamma\eta}{\beta}\right) \right].$$

Для $\alpha = 0, 1, \ldots, l - 1$ имеет место

$$\frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha}(x, 0) = C \int_{-\infty}^{\infty} \eta^\alpha \mathfrak{F}v(x, \eta) \, \mathrm{d}\eta = 0.$$

Итак $v \in {}^0_RW_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$ и

$$|Mu|^2 \leqq C\|u\|_P^{(0,\infty)} \|v\|_R^{(0,\infty)} \leqq C\|u\|_P^{(0,\infty)} \|u\|.$$

Из этого уже вытекает, что

$$\|u\|^2 \leqq C\|u\|_P^{(0,\infty)} \|u\|.$$

3.15 Лемма. *Пусть функция* $u \in {}^0_PW_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ *и пусть* $u(x, t) = 0$ *для* $a < t < a + \varepsilon$. *Определим* $u(x, t) = 0$ *для* $t \leqq a$. *Тогда* $u \in {}^0_PW_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, b))$ *и существует постоянная* $C = C(\varepsilon) > 0$ *такая, что*

$$C(\varepsilon) \|u\|_P^{(-\infty,b)} \leqq \|u\|_P^{(a,b)} \leqq \|u\|_P^{(-\infty,b)}.$$

Доказательство. Второе неравенство очевидно. Обозначим $\psi(t)$ действительную бесконечно дифференцируемую функцию такую, что $\psi(t) = 0$ для $t < a + \frac{1}{2}\varepsilon$, $\psi(t) = 1$ для $t > a + \varepsilon$. Имеют место соотношения

$$|u|_P^{(-\infty,b)} = \sup_{\|\varphi\|_R^{(-\infty,b)} \leqq 1} |\langle u, \varphi\rangle_{-\infty}^b| = \sup |\langle u, \psi\varphi\rangle_{-\infty}^b|$$

и

$$\|\psi\varphi\|_R^{(a,b)} \leqq C(\varepsilon) \|\varphi\|_R^{(-\infty,b)} \leqq C(\varepsilon).$$

Итак

$$|u|_P^{(-\infty,b)} \leqq \sup_{\|\varphi\|_{R^{(a,b)}} \leqq C(\varepsilon)} \left|\langle u, \varphi\rangle_a^b\right| \leqq C(\varepsilon)\, |u|_P^{(a,b)}\,.$$

Из этого уже вытекает утверждение леммы.

3.16 Определение. *Для функции* $u \in {}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ *обозначим* $\|u\|_S^{(a,b)} = \|u\|_P^{(a,b)}$.

3.17. Теорема. *Пусть функция* $u \in {}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$. *Обозначим* Pu *продолжение функции* u *такое, что* $Pu(x, t) = 0$ *для* $t < a$. *Тогда функция* $Pu \in {}_P\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, b))$ *и существуют постоянные* $C_1 > 0$ *и* $C_2 > 0$ *такие, что*

$$C_1\|Pu\|_P^{(-\infty,b)} \leqq \|u\|_S^{(a,b)} \leqq C_2\|Pu\|_P^{(-\infty,b)}\,.$$

Доказательство непосредственно вытекает из леммы 3.14 и 3.15 при помощи разложения единицы.

3.18 Теорема. *Пространство* ${}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ *является полным пространством Банаха.*

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|u_n - u_m\|_S^{(a,b)} = 0$. Обозначим P продолжение из теоремы 3.17. Тогда $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|Pu_n - Pu_m\|_P^{(-\infty,b)} = 0$ и существует предель v. Очевидно, что $v(x, t) = 0$ для $t < a$. Итак функция $u = v/_{\Omega\times(a,b)} \in {}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$.

3.19 Замечание. Теорема 3.11 утверждает, что $\mathscr{D}(\Omega \times (0, \infty))$ плотно в пространстве ${}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$.

3.20 Лемма. *Пусть функции* $u, v \in {}_R\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$. *Пусть* $\varkappa_1 > 0$, $\varkappa_2 > 0$ *и пусть* $c(x, t)$ *— ограниченная измеримая функция на* $\Omega \times (a, b)$. *Пусть*

$$|i| \leqq k, \quad |j| \leqq k,$$

$$\alpha \leqq \left(l + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{|i|}{k}\right), \quad \beta \leqq \left(l + \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{|j|}{k}\right).$$

Тогда существуют постоянные $C(\varkappa_1) > 0$, $C(\varkappa_2) > 0$ *такие, что*

$$\left|\int_\Omega \int_a^b c D^i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\, \overline{D^j \frac{\partial^\beta v}{\partial t^\beta}}\, d\Omega\, dt\right| \leqq$$

$$\leqq \left[\varkappa_1\|u\|_R^{(a,b)} + C(\varkappa_1)\sum_{|i|\leqq k}\left|D^i u\right|_{L_2(\Omega\times(a,b))}\right]\left[\varkappa_2\|v\|_R^{(a,b)} + C(\varkappa_2)\sum_{|i|\leqq k}\left|D^i v\right|_{L_2(\Omega\times(a,b))}\right].$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left|\int_\Omega \int_a^b \overline{cD^i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}}\, D^j \frac{\partial^\beta v}{\partial t^\beta}\, d\Omega\, dt\right| \leqq C \left|D^i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\right|_{L_2(\Omega\times(a,b))} \left|D^j \frac{\partial^\beta v}{\partial t^\beta}\right|_{L_2(\Omega\times(a,b))}.$$

Из условий вытекает, что $\alpha \leqq l$ и $\beta \leqq l$. Если докажем, что для $u \in \mathscr{D}(\Omega \times (a, b))$ имеет место неравенство

$$\left|D^i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\right|^2_{L_2(\Omega\times(a,b))} \leqq C(\varkappa) \sum_{|i|\leqq k} |D^i u|^2_{L_2(\Omega\times(a,b))} + \varkappa \|u\|_R^{(a,b)},$$

то в силу плотности будет лемма доказана.

Пусть $(a, b) = (0, \infty)$. К другим случаям можно перейти при помощи разложения единицы и сдвига. Пусть Ku – каноническое продолжение функции u. Далее положим $Ku(x, t) = 0$ для $x \notin \Omega$. Очевидно, что

$$\left|D^i \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\right|^2_{L_2(\Omega\times(0,\infty))} \leqq C \left|D^i \frac{\partial^\alpha Ku}{\partial t^\beta}\right|_{L_2(E_{n+1})} \leqq$$

$$\leqq C \int_{E_{n+1}} |\xi_1|^{2i_1} \dots |\xi_n|^{2i_n} |\eta|^{2\alpha} |\mathscr{K}u(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta)|^2\, d\xi\, d\eta$$

где $\mathscr{K}u$ обозначает преобразование Фурье функции Ku по всем $n + 1$ переменным и $\xi_1, \dots, \xi_n$ – переменные сопряженные к $x_1, \dots, x_n$ и переменная η сопряженная к t.

При помощи известного неравенства

$$AB \leqq p^{-1}A^p + q^{-1}B^q$$

где $A > 0$, $B > 0$, $1/p + 1/q = 1$, можно показать, что для каждого $\varkappa_0 > 0$ существует $C(\varkappa_0) > 0$ такая, что

$$C|\xi_1|^{2i_1} \dots |\xi_n|^{2i_n} |\eta|^{2\alpha} \leqq C(\varkappa_0)\left(1 + |\xi_1|^{2k} + \dots + |\xi_2|^{2k}\right) + \varkappa_0 |\eta|^{2l+1}.$$

Итак

$$\left|D^j \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\right|^2_{L_2(\Omega\times(0,\infty))} \leqq$$

$$\leqq \int_{E_{n+1}} \left[C(\varkappa_0)\left(1 + |\xi_1|^{2k} + \dots + |\xi_n|^{2k}\right) + \varkappa_0 |\eta|^{2l+1}\right] . |\mathscr{K}u(\xi_1, \dots, \xi_n, \eta)|^2\, d\xi\, d\eta \leqq$$

$$\leqq C(\varkappa_0) \sum_{|i|\leqq k} |D^i Ku|_{L_2(E_{n+1})} + C\varkappa_0 \|Ku\| \leqq C(\varkappa_0) \sum_{|i|\leqq k} |D^i u|_{L_2(\Omega\times(0,\infty))} + C\varkappa_0 \|u\|_R^{(0,\infty)}.$$

Теперь достаточно положить $\varkappa_0 = \varkappa/c$ и лемма доказана.

3.21 Замечание. Из леммы 3.20 следует, что при предположениях этой леммы имеет место, что $D^i(\partial^\alpha u/\partial t^\alpha) \in L_2(\Omega \times (a, b))$.

4. РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НУЛЕВЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

4.1 Обозначения. В далнейшем будем предпологать, что область Ω такая, что для всех функций $u \in {}_P^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, 0))$ имеет место

$$\operatorname{Re} \langle u, u \rangle_{-\infty}^{0} \geqq 0 .$$

В этом случае будем писать $\Omega \in \mathfrak{P}$. [1])

4.2 Теорема. *Пусть* $u \in {}_S^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$. *Пусть* $\operatorname{Re} \langle u, u \rangle_a^b \geqq 0$. *Тогда существует положительная постоянная* μ, *которая зависит только от постоянной эллиптичности эллиптической части оператора и от постоянной, ограничивающей* a^{ij} *и* $b^{ij\alpha\beta}$, *так, что*

$$\sup_{\|v\|_{R^{(a,b)}} \leqq 1} |D(u, v)| \geqq \mu \|u\|_S^{(a,b)} .$$

Доказательство. Имеет место, что

$$\operatorname{Re} D(u, u) = \operatorname{Re} \langle u, u \rangle_a^b + \operatorname{Re} A(u, u) + \operatorname{Re} B(u, u) .$$

Но $\operatorname{Re} \langle u, u \rangle_a^b \geqq 0$ и $\operatorname{Re} B(u, u) \geqq 0$, итак

$$\nu \sum_{|i| \leqq k} |D^i u|_{L_2(\Omega \times (a,b))}^2 \leqq \operatorname{Re} D(u, u) \leqq |D(u, u)| .$$

С другой стороны

$$\langle u, v \rangle_a^b = D(u, v) - B(u, v) - A(u, v) .$$

По теореме 3.9 и лемме 3.20 имеет место $(\varkappa_2 = 1)$

$$|u|_P^{(a,b)} \leqq \sup_{\|v\|_R \leqq 1} |D(u, v)| + C_1(\varkappa) \left(\sum_{|i| \leqq k} |D^i u|_{L_2}^2\right)^{\frac{1}{2}} + \varkappa \|u\|_R^{(a,b)} .$$

Итак

$$\|u\|_P^{(a,b)} \leqq \sup_{\|v\|_R \leqq 1} |D(u, v)| + C_1(\varkappa) \, |D(u, u)|^{\frac{1}{2}} + C_2 \varkappa \|u\|_P^{(a,b)} .$$

С другой стороны

$$|D(u, u)| \leqq \|u\|_R^{(a,b)} \left| D\left(u, \frac{u}{\|u\|_R^{(a,b)}}\right) \right| \leqq \|u\|_R^{(a,b)} \sup_{\|v\|_R \leqq 1} |D(u, v)| \leqq$$

$$\leqq \left(\varepsilon \|u\|_R^{(a,b)} + C_3(\varepsilon) \sup_{\|v\|_R \leqq 1} |D(u, v)|\right)^2 .$$

---

[1]) Можно показать, что $\mathfrak{P} \supset \mathfrak{N}^{(0),1}$. (Смотри [4]).

Наконец получаем для $C_2 C_1(\varkappa)\,\varepsilon = \varkappa$

$$\|u\|_P^{(a,b)} \leqq C_4(\varkappa) \sup_{\|v\|_R \leqq 1} |D(u, v)| + \varkappa(C_2 + 1)\,\|u\|_P^{(a,b)}\,.$$

Если теперь предположим, что $\varkappa$ достаточно малое, получаем утверждение теоремы, так как $\|u\|_P^{(a,b)} = \|u\|_S^{(a,b)}$.

4.3 Теорема. *Пусть* $\Omega \in \mathfrak{P}$. *Пусть* $D(u, v) = 0$ *для фиксированной функции* $v \in {}_R\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$ *и для всех функций* $u \in {}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$. *Тогда* $v \equiv 0$.

Доказательство. Имеет место соотношение

$$\langle u, v\rangle_0^\infty = -A(u, v) - B(u, v)\,.$$

Для $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (0, \infty))$ и $v \in {}_R\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$ имеет место

$$\langle v, \varphi\rangle_0^\infty = \overline{A(\varphi, v)} + \overline{B(\varphi, v)}\,.$$

Из этого вытекает, что $v \in {}_P\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$ и предельным переходом $\varphi \to v$ получаем

$$\langle v, v\rangle_0^\infty = \overline{A(v, v)} + \overline{B(v, v)}\,.$$

Но $\operatorname{Re}\langle v, v\rangle_0^\infty \leqq 0$ и $\operatorname{Re} B(v, v) \geqq 0$, откуда $\operatorname{Re} A(v, v) = 0$ и $v \equiv 0$.

4.4 Определение. Сопряженное пространство к пространству ${}_R\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ обозначим ${}_RW_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (a, b))$. Скажем, что $Du = f$, где $f \in {}_RW_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (a, b))$ и $u \in {}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$, если для всех $v \in {}_R\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ имеет место $D(u, v) = \bar{f}(v) \equiv \overline{f(\bar{v})}$.

4.5 Теорема. *Отображение* D *взаимно однозначно и непрерывно отображает пространство* ${}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$ *на пространство* ${}_RW_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (0, \infty))$.

Доказательство. Пространство ${}_R\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$ рефлексивно. Далее имеет место соотношение

$$|Du| = \sup_{\|v\|_R \leqq 1} |D(u, v)| \geqq \mu\|u\|_S^{(0,\infty)}\,.$$

Итак отображение D является открытым отображением. Итак $D({}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty)))$ является полным подпространством ${}_RW_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (0, \infty))$. Пусть $v \in {}_R\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$ и $Du(v) = 0$ для всех $u \in {}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$. Тогда по теореме 4.3 $v \equiv 0$. Из этого вытекает, что $D({}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))) = {}_RW_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (0, \infty))$ и теорема доказана.

4.6 Теорема. *Пусть* $u \in {}_P\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, b))$. *Тогда существует продолжение функции* u, *которое обозначим* Pu, *такое, что* $Pu \in {}_P\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, \infty))$ *и* Pu *на* $\Omega \times (b, \infty)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\mathsf{D}Pu = (-1)^k \Delta^k Pu + (-1)^l \frac{\partial^{2l+1} Pu}{\partial t^{2l+1}} = 0$$

где $\Delta = \sum_{\alpha=1}^{n} (\partial^2)/(\partial x_\alpha^2)$.

Доказательство. Пусть Mu – продолжение функции u. Тогда $Mu \in {}_P\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (b, \infty))$. По теореме 4.5 существует функция $Nu \in {}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (b, \infty))$ такая, что $\mathsf{D}Nu = \mathsf{D}Mu$ на $\Omega \times (b. \infty)$. Для $t < 0$ продолжим функцию Nu нулем и получим, что $Nu \in {}^0W_2^{(k,l')}$ и $Nu \in {}_P\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (b, \infty))$. Если обозначим $Pu = Mu - Nu$ то Pu удовлеворяет условиям теоремы.

4.7 Теорема. *Пусть* $u \in {}_P\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, b))$. *Тогда для* $v \in {}_R\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, b))$ *имеет место*

$$\langle u, v\rangle_{-\infty}^{b} = \langle Pu, v\rangle_{-\infty}^{\infty} + \int_\Omega \int_b^\infty \sum_{|i|=|j|=k} \overline{d^{ij} D^i Pu D^i v} \, \mathrm{d}\Omega \, \mathrm{d}t \,,$$

где Pu – *продолжение функции* u *из теоремы* 4.6 *и* d^{ij} – *действительные коэффициенты оператора* $(-1)^k \Delta^k$, $d^{ij} = d^{ji}$.

Доказательство. Для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (-\infty, b))$ имеет место

$$\langle u, \varphi\rangle_{-\infty}^{b} = \langle Pu, M\varphi\rangle_{-\infty}^{\infty} - \langle Pu, M\varphi\rangle_{b}^{\infty} =$$

$$= \langle Pu, M\varphi\rangle_{-\infty}^{\infty} + \int_\Omega \int_b^\infty \sum \overline{d^{ij} D^i Pu} D^j M\varphi \, \mathrm{d}\Omega \, \mathrm{d}t \,,$$

где $M\varphi$ – продолжение φ. Утверждение теоремы получим предельным переходом $M\varphi \to v$.

4.8 Теорема. *Пусть* $u, v \in {}_P\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, b))$. *Тогда*

$$\langle u, v\rangle_{-\infty}^{b} + \overline{\langle v, u\rangle_{-\infty}^{b}} = 2 \operatorname{Re} \int_\Omega \int_b^\infty \sum \overline{d^{ij} D^i Pu} D^j Pv \, \mathrm{d}\Omega \, \mathrm{d}t \,,$$

где Pu *и* Pv – *продолжения из теоремы* 4.6.

Доказательство. Имеет место, что $\langle Pu, Pv\rangle_{-\infty}^{\infty} = -\overline{\langle Pv, Pu\rangle_{-\infty}^{\infty}}$. Теперь из теоремы 4.7 вытекает утверждение теоремы 4.8.

4.9 Теорема. *Пусть* $v \in {}_R\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ *и пусть для всех функций* $u \in {}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ *имеет место* $D(u, v) = 0$. *Тогда* $v \equiv 0$.

Доказательство. Аналогично как в доказательстве теоремы 4.3

$$\langle v, \varphi \rangle_a^b = \overline{A(\varphi, v)} + \overline{B(\varphi, v)}$$

для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (a, b))$. Из этого вытекает, что $v \in {}_P^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$.

Предельным переходом $\varphi \to u$ получаем

$$\overline{\langle v, u \rangle_a^b} = A(u, v) + B(u, v)\,.$$

Но с другой стороны из предположений теоремы вытекает, что

$$\langle u, v \rangle_a^b = -A(u, v) - B(u, v)\,.$$

Теперь из теоремы 4.8 вытекает, что

$$0 = \mathrm{Re} \int_\Omega \int_b^\infty \overline{\sum d^{ij} D^i Pu\, D^j Pv}\, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t\,,$$

где Pu и Pv – продолжения функций u и v из теоремы 4.6. Если положим $u(x, t) = \varphi(t)\, v(x, t)$, где φ – бесконечно дифференцируемая функция такая, что $\varphi(t) = 0$ для $t < a + \varepsilon$, $\varphi(t) = 1$ для $t > b - \varepsilon$, (где $\varepsilon < \frac{1}{2}(b - a)$), то $u \in {}_S^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ и $Pu = Pv$. Итак

$$0 = \mathrm{Re} \int_\Omega \int_b^\infty \sum \overline{d^{ij} D^i Pv} D^j Pv\, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t$$

и $Pv \equiv 0$ на $\Omega \times (b, \infty)$.

Если сделаем замену переменных $s = -t$, получаем, что функция $v^*(x, s) = v(x, -t)$ удовлетворяет на $\Omega \times (-b, -a)$ сопряженному уравнению с нулевой правой частью и $v^* \in {}_S^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (-b, -a))$. По теореме 4.2 получаем, что $v^* = 0$ и, следовательно, $v = 0$.

4.10 Теорема. *Оператор* D *отображает взаимно однозначно и взаимно непрерывно пространство* ${}_S^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ *на пространство* ${}_RW_2^{(-k,-l\,)}(\Omega \times (a, b))$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 4.5.

4.11 Теорема. *Пусть F – непрерывный линейный функционал над пространством* ${}_S^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$. *Тогда существует одна и только одна функция* $v \in {}_R^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ *такая, что* $F(u) = D(u, v)$ *для всех* $u \in {}_S^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$.

Доказательство. Обозначим D^{-1*} сопряженное отображение к отображению D^{-1}, обратному к отображению D. Тогда $F(u) = \mathsf{D}^{-1*}(F)(\mathsf{D}u)$. Пространство ${}_R^0W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ рефлексивно; поэтому существует отображение K

пространства сопряженного к пространству ${}_RW_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (a, b))$ в пространство ${}^0_RW_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ такое, что для всякого непрерывного линейного функционала G над пространством ${}_RW_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (a, b))$ имеет место $G(f) = f(KG)$ для всех $f \in {}_RW_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (a, b))$. Обозначим $v = K(\mathsf{D}^{-1}*(F))$. Тогда

$$F(u) = \mathsf{D}^{-1}*(F)(\mathsf{D}u) = \mathsf{D}u(K(\mathsf{D}^{-1}*(F))) = \mathsf{D}u(v) = D(u, v)$$

для всех $u \in {}^0_SW_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$.

5. РЕШЕНИЕ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

5.1 Определение. Скажем, что $u \in W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ если существует продолжение Pu функции u так, что $Pu \in {}^0W_2^{(k,l')}(E_{n+1})$.

Обозначим

$$\langle u, \varphi\rangle_a^b = \int_\Omega \int_a^b (-1)^{l+1} \bar{u}\, \frac{\partial^{2l+1}\varphi}{\partial t^{2l+1}}\, \mathrm{d}\Omega\, \mathrm{d}t\,,$$

$$|u|_P = \sup_{\|\varphi\|_{R^{(a,b)}} \leqq 1,\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (a,b))} \left|\langle u, \varphi\rangle_a^b\right|.$$

Скажем, что $u \in {}_PW_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$, если

$$\|u\|_P^{(a,b)} = \Big[\big(|u|_P^{(a,b)}\big)^2 + \sum_{|i| \leqq k} |D^i u|^2_{L_2(\Omega \times (a,b))}\Big]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

5.2 Определение. Пусть $u_0 \in {}_PW_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ и $f \in {}_RW_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (a, b))$. Функция $u \in {}_PW_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ решает задачу $\mathsf{D}u = f$ на $\Omega \times (a, b)$ с краевыми условиями

$$u(x, t) = u_0(x, t), \ldots, \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}}(x, t) = \frac{\partial^{k-1} u_0}{\partial \nu^{k-1}}(x, t)$$

для $x \in \Omega^\bullet$, $t \in (a, b)$, где ν – вектор внешней нормали к $\Omega^\bullet$, начальными условиями

$$u(x, a) = u_0(x, a), \ldots, \frac{\partial^l u}{\partial t^l}(x, a) = \frac{\partial^l u_0}{\partial t^l}(x, a)$$

и концевыми условиями

$$u(x, b) = u_0(x, b), \ldots, \frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}}(x, b) = \frac{\partial^{l-1} u_0}{\partial t^{l-1}}(x, b)\,,$$

если для всех $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (a, b))$ имеет место $D(u, \varphi) = f(\varphi)$ и $u - u_0 \in {}^0_SW_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$.

5.3 Теорема. *Для всякого* $f \in {}_R W_2^{(-k,-l')}(\Omega \times (a, b))$ *и* $u_0 \in {}_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ *существует одно и только одно решение и задачи* 5.2.

Доказательство. Достаточно решить задачу $\mathsf{D}u_1 = f - \mathsf{D}u_0$, $u_1 \in {}^0_S W_2^{(k,l')}(\Omega \times (a, b))$ и положить $u = u_0 + u_1$. Однозначность очевидна.

5.4 Замечание. Существует постоянная C такая, что для решения u имеет место оценка

$$\|u\|_P^{(a,b)} \leqq C\left(|f|_{{}_R W_2{}^{(-k,-l')}(\Omega \times (a,b))} + \|u_0\|_P^{(a,b)}\right).$$

5.5 Теорема. *Пусть* $u \in {}_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, 0))$ *и пусть* $Pu \in W_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, \infty))$ *— любое продолжение функции u. Тогда* $Pu \in {}_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.1.

5.6 Теорема. *Функция* $u \in {}_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, 0))$ *тогда и только тогда, если существует продолжение* $Pu \in W_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, \infty))$ *для которого на* $\Omega \times (0, \infty)$ *имеет место* $\mathsf{D}Pu = 0$, *где* D *— оператар нашего типа.*

Доказательство. Для $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega \times (0, \infty))$ имеет место

$$\langle Pu, \varphi\rangle_0^\infty = -A(Pu, \varphi) - B(Pu, \varphi).$$

Итак $Pu \in {}_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (0, \infty))$ и $u \in {}_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, 0))$. Обратное утверждение очевидно.

5.7 Теорема. *Для* $u \in {}^0_P W_2^{(k,l')}(\Omega \times (-\infty, 0))$ *норма* $\|u\|_P^{(-\infty,0)}$ *эквивалентна норме* $\|Pu\|$, *где* $Pu \in {}^0 W_2^{(k,l')}$ *— такое продолжение функции u, для которого на* $\Omega \times (0, \infty)$ *имеет место* $\mathsf{D}Pu = 0$, *где* D *— фиксированный оператор нашего типа.*

Доказательство. Достаточно доказать, что отображение $u \to Pu$ непрерывно. Тогда оно будет взаимно однозначным линейным отображением полного пространства на полное пространство, и, следовательно, обратное ему отображение будет непрерывным.

Пусть Ku — каноническое продолжение функции u. Тогда

$$\begin{aligned}\|Pu\| &= \|Pu - Ku + Ku\| \leqq \|Pu - Ku\| + \|Ku\| \leqq \\ &\leqq \|Pu - Ku\|_P^{(0,\infty)} + \|u\|_R^{(-\infty,0)} \leqq \|Pu\|_P^{(0,\infty)} + \|Ku\|_P^{(0,\infty)} + \|u\|_R^{(-\infty,0)} \leqq \\ &\leqq C\left(\|Ku\|_P^{(0,\infty)} + \|u\|_P^{(-\infty,0)}\right) \leqq C\left(\|Ku\|_P^{(-\infty,0)} + \|Ku\| + \|u\|_P^{(-\infty,0)}\right) \\ &\leqq C\|u\|_P^{(-\infty,0)}.\end{aligned}$$

При этом мы пользовались тем, что $Pu - Ku = 0$ на $\Omega \times (-\infty, 0)$, замечанием 3.2, 5.4 и теоремами 2.5 и 3.9.

5.8 Замечание. В доказательствах теорем отделов 4 и 5 нам продолжение функции решением уравнения заменяет условие $(\partial^l u)/(\partial t^l)|_{t=a} = 0$.

5.9 Замечание. При помощи теоремы 4.11 мы можем определить решение нашей краевой задачи для более широкого класса правых частей за счет того, что значение $(\partial^l u)/(\partial t^l)(x, a)$ определяется не только функцией u_0, но и правой частью уравнения.

Литература

[1] *О. В. Бесов:* О некоторых семействах функциональных пространств. Теоремы вложения и продолжения. ДАН СССР *126* (1959), 1163—1165.

[2] *А. А. Дезин:* Корректная граничная задача для некоторых неклассических операторов ДАН СССР, *123* (1958), № 4, 595—598.

[3] *А. А. Дезин:* Теоремы существования и единственности решений граничных задач для некоторых уравнений с частными производными в функциональных пространствах. Успехи математических наук, т. *XIV*, *3* (*87*) (1959), 21—73.

[4] *Й. Кадлец:* Об одном обобщении уравнения теплопроводности. CMUC, *6*, 1 (1965), 13—18.

[5] *J. Kadlec - R. Výborný:* Streng maximum principle for weakly noulinear parabolic equations. CMUC, *6*, 1 (1965), 19—20.

[6] *J. L. Lions:* Colloques Internationalex du Centre National de la Recherche Scientifique. Paris 1962.

[7] *J. L. Lions - E. Magenes:* Remarque sur les problemes aux limites pour opérateurs paraboliques, Comptes Rendus Acad. Sci, *251* (1960), 2118—2120.

[8] *В. П. Михайлов:* Об одной граничной задаче. ДАН СССР *147* (1962), № 3, 548—551.

[9] *В. П. Михайлов:* О первой краевой задаче для одного класса гипоэлиптических уравнений. Матем. сборник. Т. *63* (105), 2 (1964), 238—263.

[10] *M. Pagni:* Sulle trace di una certa classe di funcioni. Atti del Seminario matematico e fisico di Modena, *11* (1961—1962), 24—33.

Адресса автора: Praha 1, Žitná 25, ČSSR (Matematický ústav ČSAV).

Summary

SOLUTION OF THE FIRST BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A GENERALIZATION OF THE HEAT EQUATION IN CLASSES OF FUNCTIONS POSSESSING A FRACTIONAL DERIVATIVE WITH RESPECT TO THE TIME-VARIABLE

Jan Kadlec, Praha

In this paper, we deal with the differential equation of the form

$$Au + Bu + (-1)^l \frac{\partial^{2l+1}}{\partial t^{2l+1}} = f,$$

where

$$Au = \sum_{|i|,|j| \leqq k} D^i(-1)^j a^{ij} D^j u$$

$$Bu = \sum D^j \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} (-1)^{|j|+\beta} b^{ij\alpha\beta} D^i \frac{\partial^\alpha b}{\partial t^\alpha}$$

(the sum being extended over α, β satisfying $0 < \alpha + \beta < 2l + 1$, $0 \leqq \alpha \leqq \leqq (l + \frac{1}{2})(1 - |i|/k)$, $0 \leqq \beta \leqq (l + \frac{1}{2})(1 - |j|/k)$) and ($\nu > 0$)

$$\int_{\Omega \times (a,b)} \overline{A\varphi} \cdot \varphi \, d\Omega \, dt \geqq \nu \sum_{|i| \leqq k} |D^i \varphi|_{L_2(\Omega \times (a,b))}$$

$$\int_{\Omega \times (a,b)} \overline{B\varphi} \cdot \varphi \, d\Omega \, dt \geqq 0$$

for any infinitely differentiable function φ with compact support in $\Omega \times (a, b)$. Here a^{ij}, $b^{ij\alpha\beta}$ are bounded measurable functions. The domain Ω satisfies the Lipschitz condition.

We seek a solution of this equation satisfying

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = \ldots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}} = 0$$

on $\Omega^\cdot \times (a, b)$ and

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^l u}{\partial t^l} = 0$$

for $t = a$, $x \in \Omega$,

$$u = \frac{\partial u}{\partial t} = \ldots = \frac{\partial^{l-1} u}{\partial t^{l-1}} = 0$$

for $t = b$, $x \in \Omega$.

The right-hand side f of the equations is a continuous linear functional on the space ${}_R\overset{0}{W}{}_2^{(k,l+\frac{1}{2})}(\Omega \times (a, b))$, the solution being in ${}_S\overset{0}{W}{}_2^{(k,l+\frac{1}{2})}(\Omega \times (a, b))$. The spacer under consideration are certain spaces of functions having the derivatives of ordes $l + \frac{1}{2}$ in the direction of t.