Alois Kufner

Einige Eigenschaften der Sobolevschen Räume mit Belegungsfunktion

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 4, 597–620

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100698

Чехословацкий математический журнал, т. 15 (90) 1965, Прага

EINIGE EIGENSCHAFTEN DER SOBOLEVSCHEN RÄUME MIT BELEGUNGSFUNKTION

ALOIS KUFNER, Praha

(Eingegangen am 28. Dezember 1964)

In der Arbeit wird ein Typ Sobolevscher Räume mit spezieller Belegungsfunktion definiert und einige Eigenschaften dieser Räume studiert: es wird gezeigt, wie die Räume mit Belegungsfunktionen mit den gewöhnlichen Sobolevschen Räumen zusammenhängen und dass die glatten Funktionen in diesen Räumen dicht sind, und hauptsächlich werden für diese Räume einige Einbettungssätze bewiesen.

EINFÜHRUNG

In den letzten Jahren hat sich die Theorie der Banachschen Räume $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ – d.h. der Räume der auf einem Gebiet Ω definierten Funktionen, die mit allen Ableitungen der Ordnung $1, 2, \ldots, k$ mit der Potenz p und der Belegungsfunktion $r^\alpha(X)$ integrierbar sind – ziemlich stark entwickelt. Es erschien eine ganze Reihe von Arbeiten, in denen die Gewichtsfunktion nicht nur als Hilfsmittel dient, sondern eine wesentliche Rolle spielt. Systematische Untersuchungen auf diesem Gebiet der Funktionentheorie begannen mit den Arbeiten von L. D. KUDRJAVCEV (vgl. [5]), und es folgte bisher eine ganze Reihe von Arbeiten weiterer Autoren.

In der vorliegenden Arbeit werden einige Eigenschaften der Räume $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ für beschränkte Gebiete Ω abgeleitet; dabei ist die Belegungsfunktion $r^\alpha(X)$ eine Potenz der Entfernung des Punktes X aus Ω von einem festen Punkte auf der Grenze des Gebietes. Das Artikel gliedert sich unmittelbar an die Arbeit von J. NEČAS [7] an, wo allerdings als Gewichtsfunktion die Potenz der Entfernung von der Grenze des Gebietes auftritt. Es zeigt sich, dass die Behauptungen aus [7] auch für unsere Gewichtsfunktion erhalten bleiben, wobei man aber die Voraussetzungen über das Gebiet, über die Potenz α usw. abschwächen kann. Die hier benützten Methoden sind den Methoden in [7] analog.

In der Arbeit [7] wird auch die Lösung des Dirichletschen Problems auf dem Raume $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ untersucht. In einer weiteren Arbeit wollen wir zeigen, dass man die entsprechenden Resultate auch auf die hier erwähnten Räume übertragen kann.

Die Ergebnisse dieser Arbeit sind (ohne Beweise) im ersten Teil der vorläufigen Mitteilung [6] zusammengefasst.

1. EINIGE DEFINITIONEN UND HILFSSÄTZE

Es sei E_N ($N \geqq 2$) der N-dimensionale Euklidsche Raum und es seien $X = [x_1, x_2, \ldots, x_N]$ die Punkte aus E_N.

Es sei weiter Ω ein beschränktes Gebiet in E_N mit der Grenze S; wir werden voraussetzen, dass der Punkt $P = [0, 0, \ldots, 0]$ auf der Grenze S liegt, und bezeichnen mit $r(X) = (\sum_{i=1}^{N} x_i^2)^{1/2}$ die Entfernung des Punktes $X \in E_N$ von dem Punkte P.

Wir werden sagen, dass ein solches Gebiet vom Typ $\mathfrak{K}^{(0)}$ ist (und schreiben dann $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$), wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

A. Das Gebiet Ω hat im Punkte $P \in S$ die Kegeleigenschaft von aussen, d.h. es existiert ein endlicher Kegel K mit dem Scheitelpunkt im Punkte P, der mit dem Gebiet Ω keine gemeinsamen Punkte hat.

B. Es existieren m Koordinatensysteme in E_N: $[x_{k,1}; x_{k,2}; \ldots; x_{k,N-1}; x_{k,N}]$ (kurz $[X_k, x_{kN}]$) $(k = 1, 2, \ldots, m)$ und m Funktionen a_k, die auf $(N-1)$-dimensionalen Kugeln $\Delta_k = \{|X_k| = (\sum_{i=1}^{N-1} x_{ki}^2)^{1/2} < \gamma\}$ $(\gamma > 0)$ definiert sind und die ermöglichen, jeden Punkt X der Grenze S in der Form

$$[x_{k,1}; x_{k,2}; \ldots; x_{k,N-1}; a_k(x_{k,1}; x_{k,2}; \ldots; x_{k,N-1})] \text{ (kurz } [X_k, a_k(X_k)])$$

zu schreiben.

C. Die Funktionen a_k aus der Bedingung B, die die Grenze S lokal beschreiben, sind stetig in Δ_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

D. Es existiert eine positive Zahl β so, dass die Punkte $[X_k, x_{kN}]$, wo $X_k \in \Delta_k$ und $a_k(X_k) - \beta < x_{kN} < a_k(X_k)$ ist, im Innern des Gebietes Ω liegen und dass die Punkte $[X_k, x_{kN}]$, wo $X_k \in \Delta_k$ und $a_k(X_k) < x_{kN} < a_k(X_k) + \beta$ ist, ausserhalb $\bar{\Omega}$ liegen.

Wir werden sagen, dass ein beschränktes Gebiet Ω vom Typ $\mathfrak{N}^{(0)}$ ist (vgl. J. Nečas [8]), wenn die Bedingungen B, C und D erfüllt sind, und vom Typ $\mathfrak{N}^{(0),1}$, wenn die Bedingungen B, C und D erfüllt sind und wenn die Funktionen a_k nicht nur stetig sind, sondern auch die Lipschitz-Bedingung erfüllen, d.h.:

C*. Es existiert eine positive Zahl c so, dass für beliebige zwei Punkte $X_k, Y_k \in \Delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ die Ungleichung $|a_k(X_k) - a_k(Y_k)| \leqq c|X_k - Y_k|$ gilt.

Offensichtlich erfüllt ein Gebiet vom Typ $\mathfrak{N}^{(0),1}$ schon die Bedingung A.

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} V_k &= E\{[X_k, x_{kN}];\ X_k \in \Delta_k,\ a_k(X_k) - \beta < x_{kN} < a_k(X_k)\},\\ U_k &= E\{[X_k\, x_{kN}];\ X_k \in \Delta_k,\ a_k(X_k) - \beta < x_{kN} < a_k(X_k) + \beta\} \end{aligned}$$

($k = 1, 2, \ldots, m$; β ist die Zahl aus der Bedingung D). Die „Zylinder" V_k liegen also im Innern von Ω und die „Zylinder" U_k bilden eine Bedeckung der Grenze S.

Weiter sei U_{m+1} eine solche offene Menge, dass $\overline{U}_{m+1} \subset \Omega$ ist und dass die Mengen $U_1, U_2, \ldots, U_m, U_{m+1}$ das Gebiet Ω bedecken. Dann ist auch $\Omega = \sum_{i=1}^{m} V_i + U_{m+1}$.

Die Koordinatensysteme $[X_k, x_{kN}]$ und die Zahl γ aus der Bedingung B kann man so wählen, dass noch folgende Bedingungen erfüllt sind:

E. Der Punkt P liegt genau in einer von den Mengen U_k, und zwar in dem Bereich U_1, und hat von den übrigen Mengen U_i ($i = 2, 3, \ldots, m + 1$) eine positive Entfernung.

F. Der Punkt P ist auch der Ursprung des Koordinatensystems $[X_1, x_{1N}]$ und die Koordinatenachse x_{1N} bildet gleichzeitig die Achse des Kegels K aus der Bedingung A.

Es sei $i = (i_1, i_2 \ldots, i_N)$ ein Vektor mit ganzzahligen nichtnegativen Komponenten. Wir bezeichnen mit $|i|$ die Summe der Komponenten i_j und mit D^i die partielle Ableitung

$$D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1}\, \partial x_2^{i_2} \ldots \partial x_N^{i_N}}.$$

Weiter sei $p \geqq 1$, α eine reelle Zahl, k eine ganze nichtnegative Zahl. Dann bezeichnen wir mit $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ den Raum aller komplexwertigen, auf Ω definierten Funktionen u, deren partielle Ableitungen $D^i u$ der Ordnung $|i| \leqq k$ (im Sinne der Distributionen) mit der Potenz p und der Gewichtsfunktion $r^\alpha(X)$ integrierbar sind:

$$\int_\Omega |D^i u|^p\, r^\alpha(X)\, \mathrm{d}X < \infty \quad (0 \leqq |i| \leqq k).$$

Für $\alpha = 0$ schreiben wir $W_p^{(k)}(\Omega)$ – das sind die bekannten Sobolevschen Räume (vgl. S. L. Sobolev [9]); für $k = 0$ schreiben wir $L_{p,\alpha}(\Omega)$, für $\alpha = 0$ und $k = 0$ schreiben wir $L_p(\Omega)$.

Der Raum $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ mit der Norm

$$(1.2)\qquad \|u\|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} = \left[\sum_{|i|=0}^{k} \int_\Omega |D^i u|^p\, r^\alpha(X)\, \mathrm{d}X\right]^{1/p}$$

ist ein Banachscher Raum.

Bevor wir die Eigenschaften der Räume $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ untersuchen werden, führen wir zwei Hilfssätze an:

Hilfssatz 1. *Es sei* $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, $X_1 \in \Delta_1$, $y_{1N} \leqq x_{1N} \leqq a_1(X_1)$, $X = [X_1, x_{1N}]$, $Y = [X_1, y_{1N}]$, $\dot{X} = [X_1, a_1(X_1)]$, $r_1(X_1) = r(\dot{X})$, $r_2(X) = a_1(X_1) - x_{1N}$. *Dann existieren solche positive Zahlen* c_1 *und* c_2, *dass für alle* $X_1 \in \Delta_1$ *die Ungleichungen*

$$\frac{r(X)}{r(Y)} \leqq c_1 \tag{1.3}$$

und

$$c_2[r_1(X_1) + r_2(X)] \leqq r(X) \leqq r_1(X_1) + r_2(X) \tag{1.4}$$

gelten.

Beweis. Die Ungleichungen sind eine Folgerung der Kegeleigenschaft A. Wenn der Kegel K durch den Winkel ω bestimmt ist (d.h. ω ist der Winkel zwischen der Oberfläche des Kegels und seiner Achse) und wenn $0 < \omega < \pi/2$ ist, kann man leicht zeigen, dass $c_1 = 1/\sin \omega$ und $c_2 = \sin(\omega/2)$ ist.

Hilfssatz 2. *Es sei* u *eine komplexwertige Funktion, die auf dem Intervall* $(0, \infty)$ *stetig differenzierbar ist. Weiter sei* $p \geqq 1$, $\alpha \neq p - 1$ *und es gelte entweder*

I) $\alpha < p - 1$ *und die Funktion* $u(t)$ *verschwindet in der Umgebung des Punktes* $t = 0$, *oder*

II) $\alpha > p - 1$ *und die Funktion* $u(t)$ *verschwindet in der Umgebung des Punktes* $t = \infty$.

Dann gilt die Hardy*sche Ungleichung*

$$\int_0^\infty |u(t)|^p \, t^{\alpha - p} \, dt \leqq \left(\frac{p}{|\alpha - p + 1|}\right)^p \int_0^\infty \left|\frac{du}{dt}\right|^p t^\alpha \, dt \,. \tag{1.5}$$

Es sei weiter $c > 0$. *Dann gilt auch die Ungleichung*

$$\int_0^\infty |u(t)|^p (t + c)^{\alpha - p} \, dt \leqq \left(\frac{p}{|\alpha - p + 1|}\right)^p \int_0^\infty \left|\frac{du}{dt}\right|^p (t + c)^\alpha \, dt \,. \tag{1.6}$$

Beweis. Die Ungleichung (1.5) folgt aus dem Satz 330 in [3]; die Ungleichung (1.6) bekommen wir, wenn wir die Ungleichung (1.5) für die Funktion v benützen, die folgendermassen definiert ist:

$$v(t) = u(0) \quad \text{für} \quad t \in \langle 0, c \rangle \,,$$
$$v(t) = u(t - c) \quad \text{für} \quad t \in \langle c, \infty) \,.$$

2. DIE RÄUME $W_{p,\alpha}^{(k)}$

Die Sobolevschen Räume $W_p^{(k)}(\Omega)$ sind ein Spezialfall der Räume $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$: man bekommt sie für $\alpha = 0$. Beide diese Raumtypen sind auch sehr ähnlich; jede Funktion

$u \in W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ ist gleichzeitig ein Element des Raumes $W_p^{(k)}(\Omega^*)$, wo Ω^* ein beliebiger Teilbereich des Gebietes Ω ist, der von dem Punkte P auf der Grenze S des Gebietes Ω eine positive Entfernung hat (denn dann ist für $X \in \Omega^*$ $r^\alpha(X) \geqq c_1 > 0$*)). Jede Funktion aus $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ verhält sich also in einer positiven Entfernung von P wie eine Funktion aus $W_p^{(k)}(\Omega)$ und der Raum $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ beschreibt dazu noch das Verhalten der Funktion in einer Umgebung des Punktes P.

Da das Gebiet Ω beschränkt ist, gilt sogleich für $\alpha > 0$ die Ungleichung $\|u\|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} \leqq c_2 \|u\|_{W_p^{(k)}(\Omega)}$, d.h.

$$W_p^{(k)}(\Omega) \subset W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) \quad \text{für} \quad \alpha > 0\,. \tag{2.1}$$

Die Räume $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ sind also für $\alpha > 0$ reicher als die Sobolevschen Räume $W_p^{(k)}(\Omega)$; dabei ist die Inklusion in (2.1) scharf, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel. Es sei $\Omega \subset E_N$ ein Kugelsektor mit der Spitze im Punkte P. Wenn wir für $p \geqq 1$ die Funktion u folgendermassen wählen:

$$u(X) = r^{-N/p}(X)\,,$$

dann gilt $u \notin L_p(\Omega)$, aber $u \in L_{p,\alpha}(\Omega)$ für jedes $\alpha > 0$.

Für $\alpha < 0$ gilt die umgekehrte Inklusion:

$$W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) \subset W_p^{(k)}(\Omega) \quad \text{für} \quad \alpha < 0\,. \tag{2.2}$$

Aus dem oben erwähnten Beispiel folgt, dass man die Inklusion (2.1) für $\alpha > 0$ nicht umkehren kann. Es gilt aber

Satz 2.1. *Es sei Ω ein beschränktes Gebiet in E_N, $P \in S$, $p > 1$, $0 < \alpha < N(p-1)$, $1 \leqq q < Np/(N+\alpha)$. Dann ist*

$$W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) \subset W_q^{(k)}(\Omega) \tag{2.3}$$

und es existiert eine positive Konstante c so, dass für alle $u \in W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{W_q^{(k)}(\Omega)} \leqq c \|u\|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} \tag{2.4}$$

gilt.

Beweis. Das Integral $\int_\Omega r^\tau(X)\,\mathrm{d}X$ konvergiert bestimmt für $\tau > -N$. Wenn wir nun voraussetzen, dass $v \in L_{p,\alpha}(\Omega)$ ist, und das Integral

$$I = \int_\Omega |v(X)|^q\,\mathrm{d}X \quad (1 \leqq q < p)$$

---

*) Mit c_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ bezeichnen wir im weiteren positive Konstanten, deren Wert wir nicht präzisieren werden; diese Konstanten können im Allgemeinen von der Dimension N, von den Potenzen p, α, von k, von Ω usw. abhängen, aber nie von den Funktionen aus den Räumen, die untersucht werden.

mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung mit $p_1 = p/q$ und $q_1 = p/(p - q)$ abschätzen, bekommen wir sogleich

$$(2.5) \qquad I = \int_\Omega |v(X)|^q\, r^{\alpha q/p}(X)\, r^{-\alpha q/p}(X)\, \mathrm{d}X \leqq$$

$$\leqq \left[\int_\Omega |v(X)|^p\, r^\alpha(X)\, \mathrm{d}X\right]^{q/p} \cdot \left[\int_\Omega r^{-\alpha q/(p-q)}(X)\, \mathrm{d}X\right]^{(p-q)/p}.$$

Das letzte Integral ist endlich für $-\alpha q/(p - q) > -N$, d.h. für $q < Np/(N + \alpha) = q^*$; dabei ist $q^* > 1$, denn $\alpha < N(p - 1)$. Aus (2.5) folgt also die Ungleichung $\|v\|_{L_q(\Omega)} \leqq \leqq c\|v\|_{L_{p,\alpha}(\Omega)}$. Wenn wir hier $v = D^i u$ setzen ($|i| \leqq k$), bekommen wir (2.4) und daraus auch (2.3).

Ganz ähnlich kann man zeigen, dass für ein beschränktes Gebiet Ω und für $1 \leqq q < p$, $(\alpha + N)(\beta + N) > 0$ und $q/(\beta + N) < p/(\alpha + N)$ die Inklusion

$$W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset W^{(k)}_{q,\beta}(\Omega)$$

gilt.

Es sei $\mathscr{E}(\Omega)$ der Raum aller in Ω unendlich differenzierbaren Funktionen, die mit allen Ableitungen in $\bar{\Omega}$ stetig sind. Dann gilt:

Satz 2.2. *Es sei* $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, $p \geqq 1$, $\alpha > 0$. *Dann ist die Menge* $\mathscr{E}(\Omega)$ *dicht in* $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$, *d.h. es gilt* $\overline{\mathscr{E}(\Omega)} = W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ (*wir haben die Abschliessung in der Norm* (1.2) *im Sinne*).

Beweis. Es existieren Funktionen φ_i $(i = 1, 2, \ldots, m + 1)$, die folgende Eigenschaften haben: 1) sie sind unendlich differenzierbar in E_N; 2) es ist $0 \leqq \varphi_i \leqq 1$ und φ_i verschwindet ausserhalb eines Kompaktes $M \subset U_i$ (d.h. die Funktion φ_i hat einen kompakten Träger in U_i; die Bereiche U_i sind in (1.1) definiert); 3) für $X \in \Omega$ ist $\sum_{i=1}^{m+1} \varphi_i(X) = 1$.

Zu einer Funktion $u \in W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ werden wir nun eine Funktion $v \in \mathscr{E}(\Omega)$ konstruieren, die die Funktion u mit gewünschter Genauigkeit approximiert. Es sei also $u \in \in W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$; wenn wir nun $u_i = u\, \varphi_i$ nehmen, ist offensichtlich auch $u_i \in W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$.

A) Zuerst sei $i = 1$. Für $X = [X_1, x_{1N}]$, $H = [0, 0, \ldots, 0, 1]$ und $\lambda > 0$ genügend klein führen wir die Funktion $u_{1\lambda}$ folgenderweise ein:

$$u_{1\lambda}(X) = u_1(X_1, x_{1N} - \lambda) = u_1(X - \lambda H).$$

Wir werden zeigen, dass $\lim_{\lambda \to 0} u_{1\lambda} = u_1$ in $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ ist. Es sei also $j = (j_1, j_2, \ldots, j_N)$ ein Vektor mit ganzzahligen nichtnegativen Komponenten, $0 \leqq |j| \leqq k$; wir bezeichnen mit g die partielle Ableitung

$$\frac{\partial^{|j|} u_1}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_N^{j_N}}.$$

Aus $u_1 \in W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ folgt $g \in L_{p,\alpha}(\Omega)$. Für das Integral

$$I(\lambda) = \left(\int_{V_1} |g(X) - g(X - \lambda H)|^p \, r^\alpha(X) \, \mathrm{d}X\right)^{1/p}$$

gilt nach der Ungleichung von Minkowski

$$I(\lambda) \leqq I_1^{1/p}(\lambda) + I_2^{1/p}(\lambda)\,, \tag{2.6}$$

wo

$$I_1(\lambda) = \int_{V_1} |g(X)\, r^{\alpha/p}(X) - g(X - \lambda H)\, r^{\alpha/p}(X - \lambda H)|^p \, \mathrm{d}X$$

und

$$I_2(\lambda) = \int_{V_1} |g(X - \lambda H)|^p \, |r^{\alpha/p}(X) - r^{\alpha/p}(X - \lambda H)|^p \, \mathrm{d}X =$$
$$= \int_{V_1} |g(X - \lambda H)|^p \, r^\alpha(X - \lambda H) \left|\left[\frac{r(X)}{r(X - \lambda H)}\right]^{\alpha/p} - 1\right|^p \mathrm{d}X$$

ist (in allen diesen Integralen kann man über Ω integrieren, denn die Funktion g verschwindet ausserhalb V_1).

Die Funktion $g(X)\, r^{\alpha/p}(X)$ ist ein Element des Raumes $L_p(V_1)$ und es existiert also eine solche Zahl $\lambda_0 > 0$, dass für $\lambda \leqq \lambda_0$ die Ungleichung

$$I_1(\lambda) \leqq \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \tag{2.7}$$

gilt (vgl. [9], S. 16). Es sei weiter K_ϱ der Durchschnitt des Gebietes Ω und einer Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius ϱ und es sei $K_{\varrho\lambda}$ die Menge aller $X = [X_1, x_{1N}]$, für die $X + \lambda H \in K_\varrho$ gilt. Nach der Ungleichung (1.3) des Hilfssatzes 1 ist

$$\left|1 - \left[\frac{r(X)}{r(X - \lambda H)}\right]^{\alpha/p}\right|^p \leqq c_1$$

und daraus folgt (mit Hilfe der Substitution $X - \lambda H = Z$)

$$I_{21}(\lambda) = \int_{K_\varrho} |g(X - \lambda H)|^p \, r^\alpha(X - \lambda H) \left|1 - \left[\frac{r(X)}{r(X - \lambda H)}\right]^{\alpha/p}\right|^p \mathrm{d}X \leqq$$
$$\leqq c_1 \int_{K_{\varrho\lambda}} |g(Z)|^p \, r^\alpha(Z) \, \mathrm{d}Z\,.$$

Es existiert also eine solche Zahl $\varrho_0 > 0$, dass für $\varrho \leqq \varrho_0$

$$I_{21}(\lambda) \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \tag{2.8}$$

ist. Weiter ist

$$I_{22}(\lambda) = \int_{V_1 - K_\varrho} |g(X - \lambda H)|^p \, r^\alpha(X - \lambda H) \left| 1 - \left[\frac{r(X)}{r(X - \lambda H)} \right]^{\alpha/p} \right|^p \mathrm{d}X \leqq$$

$$\leqq \operatorname*{Max}_{x \in V_1 - K_\varrho} \left| 1 - \left[\frac{r(X)}{r(X - \lambda H)} \right]^{\alpha/p} \right|^p \cdot \|g\|^p_{L_{p,\alpha}(V_1)} \, .$$

Es sei ϱ eine feste Zahl, für die (2.8) gilt; dann gilt

$$\operatorname*{Max}_{X \in V_1 - K_\varrho} \left| 1 - \left[\frac{r(X)}{r(X - \lambda H)} \right]^{\alpha/p} \right|^p \to 0 \quad \text{für} \quad \lambda \to 0$$

und wir können λ so klein wählen, dass die Ungleichung

$$I_{22}(\lambda) < \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \tag{2.9}$$

gilt. Aus (2.9) und (2.8) bekommen wir die Ungleichung $I_2(\lambda) = I_{21}(\lambda) + I_{22}(\lambda) < < (\varepsilon/2)^p$, die zusammen mit (2.7) dieses Resultat gibt:

$$I(\lambda) = \|g - g_\lambda\|_{L_{p,\alpha}(V_1)} < \varepsilon \, . \tag{2.10}$$

Da g eine beliebige Ableitung (der Ordnung $|j| \leqq k$) der Funktion u_1 ist, haben wir

$$\lim_{\lambda \to 0} u_{1\lambda} = u_1 \quad \text{in} \quad W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega) \, . \tag{2.11}$$

Die Funktion $u_{1\lambda}$ ist auch ausserhalb Ω definiert, und zwar im Bereich $W_\lambda = = E\{[X_1, x_{1N}];\ X_1 \in \Delta_1,\ a_1(X_1) \leqq x_{1N} < a_1(X_1) + \lambda\}$. Es gilt sogar für $|j| \leqq k$

$$\int_{V_1 + W_\lambda} |D^j u_{1\lambda}|^p \, \varrho^\alpha(X) \, \mathrm{d}X < \infty \, ,$$

wo $\varrho(X)$ die Entfernung vom Punkte $P + \lambda H = [0, 0, \ldots, 0, \lambda]$ ist. Es ist also $u_{1\lambda} \in W^{(k)}_{p,\alpha}(V_1 + W_\lambda)$, wo die Gewichtsfunktion natürlich nicht $r^\alpha(X)$, sondern $\varrho^\alpha(X)$ ist. Das Gebiet $V_1 + W_\mu$ hat für $0 < \mu < \lambda$ von dem Punkte $P + \lambda H$ eine positive Entfernung. Es ist also – wie schon am Anfang dieses Abschnittes erwähnt wurde – auch $u_{1\lambda} \in W^{(k)}_p(V_1 + W_\mu)$. Wir können nun die Funktion $u_{1\lambda}$ regularisieren, d.h. wir werden für $X \in V_1$ und für genügend kleine $h > 0$ die Funktion

$$u_{1\lambda h}(X) = \frac{1}{\kappa h^N} \int_{|X - Y| < h} K(X - Y; h) \, u_{1\lambda}(Y) \, \mathrm{d}Y$$

konstruieren, wobei

$$K(Z; h) = \exp \left\{ \frac{|Z|^2}{|Z|^2 - h^2} \right\} \quad \text{für} \quad |Z| < h$$

und

$$\kappa = \int_{|Z|<1} K(Z; 1)\, dZ$$

ist. Die Funktion $u_{1\lambda h}$ verschwindet auf $\Omega - V_1$ und ist ein Element des Raumes $\mathscr{E}(\Omega)$; weiter gilt (vgl. [9]) $\lim_{h\to 0} u_{1\lambda h} = u_{1\lambda}$ in $W_p^{(k)}(V_1)$, da aber $\alpha \geqq 0$ ist, gilt diese Beziehung laut (2.1) auch in $W_{p,\alpha}^{(k)}(V_1)$, was endlich mit (2.11) dieses Resultat ergibt: Zu einem beliebigen positiven ε existiert eine Funktion $u_{1\lambda h} \in \mathscr{E}(\Omega)$ so, dass

$$\|u_{1\lambda h} - u_1\|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} \leqq \frac{\varepsilon}{m+1} \tag{2.12}$$

ist.

B) Es sei nun $i \geqq 2$. Die Funktion $u_i = u\varphi_i$ verschwindet ausserhalb U_i und die Bereiche U_i haben von dem Punkte P eine positive Entfernung; es gilt also

$$\|u_i\|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} \leqq c_2 \|u_i\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} \leqq c_3 \|u_i\|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} . \tag{2.13}$$

Demnach sind die Funktionen u_i auch Elemente des Raumes $W_p^{(k)}(\Omega)$; da der Satz 2.2 für $\alpha = 0$ gilt (vgl. [2]), existieren Funktionen $v_i \in \mathscr{E}(\Omega)$ so, dass

$$\|u_i - v_i\|_{W_p^{(k)}(\Omega)} \leqq \frac{\varepsilon}{(m+1)\, c_2}$$

ist, und aus (2.13) folgt

$$\|u_i - v_i\|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} \leqq \frac{\varepsilon}{m+1} . \tag{2.14}$$

Die Funktion $v = u_{1\lambda h} + \sum_{i=2}^{m+1} v_i$ ist aus $\mathscr{E}(\Omega)$; weiter ist $\sum_{i=1}^{m+1} u_i = u \sum_{i=1}^{m+1} \varphi_i = u$ und aus (2.12) und (2.14) folgt

$$\|u - v\|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} < \varepsilon ,$$

womit der Satz bewiesen ist.

Mit $L_{p,loc}(\Omega)$ bezeichnen wir den Raum der komplexwertigen, fast überall auf Ω definierten Funktionen, die auf jeder kompakten Menge $M \subset \Omega$ mit der Potenz p integrierbar sind.

Satz 2.3. *Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, $p > 1$, $\alpha \geqq 0$, $u \in L_{p,loc}(\Omega)$, $\partial u/\partial x_i \in L_{p,\alpha}(\Omega)$ (die Ableitungen im Sinne der Distributionen). Dann ist $u \in L_{p,\alpha}(\Omega)$ und also $u \in W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$.*

Beweis. Nach den Resultaten von Deny und Lions [1] kann man die Funktion u auf einer Menge vom Mass Null so ändern, dass sie auf fast allen mit der Achse x_{iN} parallelen Geraden absolut stetig ist; dann sind die Ableitungen $\partial u/\partial x_{iN}$ im normalen

Sinn und im Sinne der Distributionen identisch. Für fast alle $X_i \in \Delta_i$ und für $a_i(X_i) - \beta < s < t < a_i(X_i)$ ist dann

$$u(X_i, t) = u(X_i, s) + \int_s^t \frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(X_i, y)\,\mathrm{d}y\,. \tag{2.15}$$

Da nun mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung

$$\left|\int_s^t \frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(X_i, y)\,\mathrm{d}y\right|^p \leqq \left[\int_s^t \left|\frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(X_i, y)\right| r^{\alpha/p}(X_i, y)\,.\,r^{-\alpha/p}(X_i, y)\,\mathrm{d}y\right]^p \leqq$$

$$\leqq \int_{a_i-\beta}^{a_i} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(X_i, y)\right|^p r^\alpha(X_i, y)\,\mathrm{d}y\,.\left[\int_{a_i-\beta}^{t} r^{-\alpha/(p-1)}(X_i, y)\,\mathrm{d}y\right]^{p-1}$$

ist, folgt aus (2.15)

$$|u(X_i, t)|^p \leqq c_1 \left\{|u(X_i, s)|^p + \right.$$

$$\left. + \int_{a_i-\beta}^{a_i} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(X_i, y)\right|^p r^\alpha(X_i, y)\,\mathrm{d}y\,.\left[\int_{a_i-\beta}^{t} r^{-\alpha/(p-1)}(X_i, y)\,\mathrm{d}y\right]^{p-1}\right\}.$$

Wenn wir diese Ungleichung nach der Variablen s von $a_i(X_i) - \beta$ bis $a_i(X_i) - \beta/2$ integrieren, das Resultat mit $r^\alpha(X_i, t)$ multiplizieren und dann nochmals nach der Veränderlichen t von $a_i(X_i) - \beta$ bis $a_i(X_i)$ integrieren, bekommen wir endlich die Ungleichung

$$\int_{a_i-\beta}^{a_i} |u(X_i, t)|^p r^\alpha(X_i, t)\,\mathrm{d}t \leqq c_2 \left\{\int_{a_i-\beta}^{a_i-\beta/2} |u(X_i, s)|^p\,\mathrm{d}s\,.\int_{a_i-\beta}^{a_i} r^\alpha(X_i, t)\,\mathrm{d}t + \right. \tag{2.16}$$

$$\left. + \int_{a_i-\beta}^{a_i} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(X_i, s)\right|^p r^\alpha(X_i, s)\,\mathrm{d}s\,.\int_{a_i-\beta}^{a_i}\left[r^\alpha(X_i, t)\left(\int_{a_i-\beta}^{t} r^{-\alpha/(p-1)}(X_i, s)\,\mathrm{d}s\right)^{p-1}\right]\mathrm{d}t\right\}.$$

Das Integral

$$I_1 = \int_{a_i-\beta}^{a_i} r^\alpha(X_i, t)\,\mathrm{d}t$$

ist endlich, denn $r(X)$ ist eine beschränkte Funktion und α ist positiv. Das Integral

$$I_2 = \int_{a_i-\beta}^{a_i} r^\alpha(X_i, t)\left[\int_{a_i-\beta}^{t} r^{-\alpha/(p-1)}(X_i, s)\,\mathrm{d}s\right]^{p-1}\mathrm{d}t$$

ist offensichtlich endlich für $i = 2, 3, \ldots, m$, denn dann liegen die Punkte $[X_i, t]$ und $[X_i, s]$ in V_i und dort ist die Funktion $r(X)$ von unten und oben durch positive

Konstanten beschränkt, so dass $I_2 \leqq c_3(1/p)\,\beta^p$ ist. Für $i = 1$ schreiben wir das Integral I_2 in der Form

$$I_2 = \int_{a_1-\beta}^{a_1} \left\{ \int_{a_1-\beta}^{t} \left[\frac{r(X_1, t)}{r(X_1, s)} \right]^{\alpha/(p-1)} \mathrm{d}s \right\}^{p-1} \mathrm{d}t\,.$$

Da $X_1 \in \Delta_1$ und $s \leqq t$ ist, gilt nach der Ungleichung (1.3) des Hilfssatzes 1 $r(X_1, t)/r(X_1, s) \leqq c_4$ und daraus folgt $I_2 \leqq c_4^\alpha(1/p)\,\beta^p$. Auch das Integral I_2 ist also endlich und aus (2.16) folgt

$$\int_{a_i-\beta}^{a_i} |u(X_i, t)|^p\, r^\alpha(X_i, t)\,\mathrm{d}t \leqq$$
$$\leqq c_5 \left\{ \int_{a_i-\beta}^{a_i-\beta/2} |u(X_i, t)|^p\,\mathrm{d}t + \int_{a_i-\beta}^{a_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(X_i, t) \right|^p r^\alpha(X_i, t)\,\mathrm{d}t \right\}.$$

Wenn wir diese Ungleichung über den Bereich Δ_i integrieren, bekommen wir

$$\int_{V_i} |u(X)|^p\, r^\alpha(X)\,\mathrm{d}X \leqq c_5 \left[\int_{V_{i^*}} |u(X)|^p\,\mathrm{d}X + \int_{V_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_{iN}} \right|^p r^\alpha(X)\,\mathrm{d}X \right]$$

mit

$$V_i^* = E\left\{ [X_i, t]\,;\ X_i \in \Delta_i,\ a_i(X_i) - \beta < t < a_i(X_i) - \frac{\beta}{2} \right\}.$$

Es ist $u \in L_{p,loc}(\Omega)$ und $\overline{V}_i^* \subset \Omega$; darum ist das erste Integral auf der rechten Seite endlich. Auch das zweite Integral ist endlich, denn $\partial u/\partial x_{iN} \in L_{p,\alpha}(\Omega)$, und wir haben also

$$\int_{V_i} |u(X)|^p\, r^\alpha(X)\,\mathrm{d}X < \infty \tag{2.17}$$

für $i = 1, 2, \ldots, m$. Da $\overline{U}_{m+1} \subset \Omega$ ist, gilt auch

$$\int_{U_{m+1}} |u(X)|^p\, r^\alpha(X)\,\mathrm{d}X < \infty\,. \tag{2.18}$$

Es ist $\Omega = \sum_{i=1}^{m} V_i + U_{m+1}$ und aus (2.17) und (2.18) folgt $u \in L_{p,\alpha}(\Omega)$, was mit der Voraussetzung $\partial u/\partial x_i \in L_{p,\alpha}(\Omega)$ das Endergebnis $u \in W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ gibt.

Wir werden jetzt einen Einbettungssatz vom Typus

$$W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) \subset W_{p,\alpha-p}^{(k-1)}(\Omega)$$

beweisen.

Satz 2.4. *Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, $p \geqq 1$, $u \in W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$; weiter sei ε eine beliebige positive Zahl. Es sei $\alpha^* = \alpha - p$ für $\alpha > p - 1$ und $\alpha^* = -1 + \varepsilon$ für $0 \leqq \alpha \leqq p - 1$. Dann* *ist* $u \in L_{p,\alpha^*}(\Omega)$ *und es existiert eine solche positive Konstante* c, *dass für alle* $u \in W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)$ *die Ungleichung*

$$\|u\|_{L_{p,\alpha^*}(\Omega)} \leqq c\|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} \tag{2.19}$$

gilt.

Beweis. I) Es sei $\alpha > p - 1$ und $u \in W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)$. Da $\alpha \geqq 0$ ist, können wir den Satz 2.2 benützen und alle weiteren Schritte nur für $u \in \mathscr{E}(\Omega)$ durchführen. Es seien φ_i $(i = 1, 2, \ldots, m + 1)$ die Funktionen aus dem Beweis des Satzes 2.2.

A) Zuerst sei $i = 1$. Wir werden das Integral

$$I = \int_{V_1} |u_1(X)|^p \, r^{\alpha-p}(X) \, \mathrm{d}X$$

abschätzen. Aus der Ungleichung (1.4) des Hilfssatzes 1 folgen die Ungleichungen

$$r^{\alpha-p}(X) \leqq c_1[r_1(X_1) + a_1(X_1) - t]^{\alpha-p} \, ; \quad [r_1(X_1) + a_1(X_1) - t]^\alpha \leqq c_2 \, r^\alpha(X) \tag{2.20}$$

$(X = [X_1, t], \, r_1(X_1) = r(\dot{X}), \, \dot{X} = [X_1, a_1(X_1)])$. Es ist also

$$I \leqq c_1 \int_{\Delta_1} dX_1 \int_{a_1-\beta}^{a_1} |u_1(X_1, t)|^p \, [r_1(X_1) + a_1(X_1) - t]^{\alpha-p} \, \mathrm{d}t \, .$$

Wir bezeichnen mit J das innere Integral auf der rechten Seite der letzten Ungleichung. Nach der Substitution $a_1(X_1) - t = s$ haben wir

$$J = \int_0^\beta |u_1(X_1, a_1(X_1) - s)|^p \, (r_1(X_1) + s)^{\alpha-p} \, \mathrm{d}s \, .$$

Die Funktion $u(s) = u_1(X_1, a_1(X_1) - s)$ verschwindet in der Nähe des Punktes $s = \beta$, denn die Funktion u_1 hat einen kompakten Träger in U_1. Wir können also im letzten Ausdruck für das Integral J von 0 bis ∞ integrieren und das Integral J mit Hilfe der Hardyschen Ungleichung (1.6) aus dem Hilfssatz 2 abschätzen (wir schreiben in (1.6) $r_1(X_1)$ statt c und benützen die Alternative II des Hilfssatzes 2):

$$\int_0^\beta |u_1(X_1, a_1(X_1) - s)|^p \, (r_1(X_1) + s)^{\alpha-p} \, \mathrm{d}s \leqq$$
$$\leqq \left(\frac{p}{\alpha - p + 1}\right)^p \int_0^\beta \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_{1N}} (X_1, a_1(X_1) - s)\right|^p (r_1(X_1) + s)^p \, \mathrm{d}s \, .$$

Die Substitution $t = a_1(X_1) - s$ und die zweite Ungleichung aus (2.20) ergibt

$$J \leqq c_3 \int_{a_1-\beta}^{a_1} \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_{1N}} (X_1, t)\right|^p r^\alpha(X_1, t) \, \mathrm{d}t$$

und nach der Integration über Δ_1 haben wir endlich

$$\int_{V_1} |u_1(X)|^p \, r^{\alpha-p}(X) \, dX \leqq c_4 \int_{V_1} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x_{1N}}(X) \right|^p r^{\alpha}(X) \, dX ,$$

d.h.

$$\|u_1\|_{L_{p,\alpha-p}(\Omega)} \leqq c_5 \|u_1\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} \leqq c_6 \|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} . \tag{2.21}$$

B) Es sei nun $i = 2, 3, \ldots, m + 1$. Es ist $u \in W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ und also auch $u_i = u\varphi_i \in L_{p,\alpha}(\Omega)$. Da die Bereiche U_i für $i \geqq 2$ eine positive Entfernung von dem Punkte P haben, ist für $X \in U_i$ $r^{\alpha-p}(X) \leqq c_7 \, r^{\alpha}(X)$ und also

$$\|u_i\|_{L_{p,\alpha-p}(\Omega)} \leqq c_8 \|u_i\|_{L_{p,\alpha}(\Omega)} \leqq c_8 \|u_i\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} \leqq c_9 \|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} . \tag{2.22}$$

Aus (2.21) und (2.22) folgt $\|u\|_{L_{p,\alpha-p}(\Omega)} = \| \sum_{i=1}^{m+1} u_i \|_{L_{p,\alpha-p}(\Omega)} \leqq c_{10} \|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)}$, d.h. es gilt (2.19) und folglich ist $W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega) \subset L_{p,\alpha-p}(\Omega)$ für $\alpha > p - 1$.

II) Es sei $0 \leqq \alpha \leqq p - 1$ und $\tilde{\alpha} = p - 1 + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ ist, ist auch $\tilde{\alpha} > \alpha$ und für $X \in \Omega$ gilt $r^{\tilde{\alpha}}(X) \leqq c_{11} \, r^{\alpha}(X)$ und folglich ist

$$\|u\|_{W_{p,\tilde{\alpha}}^{(1)}(\Omega)} \leqq c_{12} \|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} , \tag{2.23}$$

d.h. $W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega) \subset W_{p,\tilde{\alpha}}^{(1)}(\Omega)$. Es ist $\varepsilon > 0$ und also $\tilde{\alpha} > p - 1$; im Teil I dieses Satzes haben wir bewiesen, dass dann $W_{p,\tilde{\alpha}}^{(1)}(\Omega) \subset L_{p,\tilde{\alpha}-p}(\Omega)$ ist und dass die Ungleichung

$$\|u\|_{L_{p,\tilde{\alpha}-p}(\Omega)} \leqq c \|u\|_{W_{p,\tilde{\alpha}}^{(1)}(\Omega)} \tag{2.24}$$

gilt. Da $\tilde{\alpha} - p = -1 + \varepsilon$ ist, folgt die Ungleichung (2.19) aus (2.23) und (2.24) und es ist also $W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega) \subset L_{p,-1+\varepsilon}(\Omega)$.

Der erste Teil des Satzes 2.4 gilt nicht nur für $\alpha > p - 1$, sondern auch für $\alpha > p - N$, wenn wir allerdings noch einige weitere Voraussetzungen über das Gebiet Ω machen.

Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$; wir werden voraussetzen, dass die Funktion a_1, die die Grenze S in der Umgebung des Punktes P beschreibt, nicht nur stetig ist, sondern auch die Lipschitz-Bedingung erfüllt (vgl. die Bedingung C* aus dem Abschnitt 1 für $k = 1$).

Wir definieren eine Abbildung $T(Y) = X$ durch die Gleichungen

$$X_1 = Y_1 \, ; \quad x_{1N} = y_{1N} + a_1(Y_1) . \tag{2.25}$$

Es handelt sich also um eine Abbildung des Zylinders

$$C = E\{[Y_1, y_{1N}]; \; Y_1 \in \Delta_1, \; -\beta < y_{1N} < 0\}$$

auf den „Zylinder“ V_1. Die Transformation T erfüllt zusammen mit der Umkehrabbildung T^{-1} die Lipschitz-Bedingung; der Punkt $P = [0, 0, \ldots, 0]$ entspricht wieder dem Koordinatenursprung in den Variablen $[Y_1, y_{1N}]$ und der Entfernung $r(X) = |X|$ entspricht die Funktion $\varrho(Y) = r(T(Y))$. Da aber die Transformationen T und T^{-1} die Lipschitz-Bedingung erfüllen, gilt

$$c_1\, r(Y) \leqq \varrho(Y) \leqq c_2\, r(Y)\,, \tag{2.26}$$

d.h. die Funktion $\varrho(Y)$ und die Entfernung $r(Y) = |Y|$ sind äquivalent.

Aus (2.26) und aus der Lipschitz-Stetigkeit der Abbildungen T und T^{-1} folgt nun, dass für $u \in L_{p,\alpha}(V_1)$ bzw. $u \in W^{(1)}_{p,\alpha}(V_1)$ auch die Funktion $v(Y) = u(T(Y))$ ein Element des Raumes $L_{p,\alpha}(C)$ bzw. $W^{(1)}_{p,\alpha}(C)$ ist und dass die Ungleichungen

$$c_3\|v\|_{L_{p,\alpha}(C)} \leqq \|u\|_{L_{p,\alpha}(V_1)} \leqq c_4\|v\|_{L_{p,\alpha}(C)} \tag{2.27}$$

und

$$c_5\|v\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(C)} \leqq \|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(V_1)} \leqq c_6\|v\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(C)} \tag{2.28}$$

gelten ($L_{p,\alpha}(C)$ und $W^{(1)}_{p,\alpha}(C)$ sind die Räume mit der Belegungsfunktion $r^\alpha(Y)$!).

Satz 2.5. *Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$ und die Funktion a_1 erfülle die Lipschitz-Bedingung. Weiter sei $\alpha > p - N$. Dann ist*

$$W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset L_{p,\alpha-p}(\Omega)$$

und es existiert eine solche positive Zahl c, dass für alle $u \in W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{L_{p,\alpha-p}(\Omega)} \leqq c\|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} \tag{2.29}$$

gilt.

Beweis. Es seien φ_i die Funktionen aus dem Beweis des Satzes 2.2.

A) Zuerst sei $i = 1$ und $u_1 = u\varphi_1$; weiter sei $X = T(Y)$ die Abbildung (2.25) und $v(Y) = u_1(T(Y))$. Wir werden das Integral

$$I = \int_C |v(Y)|^p\, r^{\alpha-p}(Y)\,\mathrm{d}Y$$

abschätzen ($C = T^{-1}(V_1)$). Da die Funktion u_1 einen kompakten Träger im Bereich U_1 hat, verschwindet die Funktion $v(Y) = v(Y_1, y_{1N})$ für Y_1 ausserhalb Δ_1 und für $y_{1N} \leqq -\beta$; wir können also im Integral I über den Halbraum $y_{1N} < 0$ integrieren und nach dem Übergang zu den sphärischen Koordinaten $[\Theta, r]$, wo Θ ein Punkt auf der Einheitskugel und r die Entfernung vom Koordinatenursprung ist, bekommen wir

$$I = \int_\sigma \mathrm{d}\Theta \int_0^\infty |v(\Theta, r)|^p\, r^{\alpha-p} r^{N-1}\,\mathrm{d}r\,.$$

Nach der Ungleichung (1.5) des Hilfssatzes 2 ist für $\alpha + N - 1 > p - 1$ und also für $\alpha > p - N$

$$\int_0^\infty \left|v(\Theta, r)\right|^p r^{\alpha-p+N-1} \, \mathrm{d}r \leqq \left(\frac{p}{\alpha - p + N}\right)^p \int_0^\infty \left|\frac{\partial v}{\partial r}(\Theta, r)\right|^p r^{\alpha+N-1} \, \mathrm{d}r.$$

Wenn wir diese Ungleichung nach der Variablen Θ über die Halbkugelfläche σ integrieren und dann zu den kartesischen Koordinaten $[Y_1, y_{1N}]$ zurückkehren, bekommen wir

$$\int_C \left|v(Y)\right|^p r^{\alpha-p}(Y) \, \mathrm{d}Y \leqq c_1 \int_C \left|\frac{\partial v}{\partial r}\right|^p r^\alpha(Y) \, \mathrm{d}Y \leqq c_2 \sum_{i=1}^N \int_C \left|\frac{\partial v}{\partial y_i}\right|^p r^\alpha(Y) \, \mathrm{d}Y,$$

d.h. $\|v\|_{L_{p,\alpha-p}(C)} \leqq c_3 \|v\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(C)}$. Aus dieser Ungleichung folgt mit Hilfe der Ungleichungen (2.27) (mit $\alpha - p$ statt α) und (2.28):

$$\|u_1\|_{L_{p,\alpha-p}(\Omega)} \leqq c_4 \|u_1\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} \leqq c_5 \|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} \, . \tag{2.30}$$

B) Es sei nun $i = 2, 3, \ldots, m + 1$. In gleicher Weise wie im Teil B des Beweises des Satzes 2.4 kann man zeigen, dass auch für $\alpha > p - N$ die Ungleichung (2.22) gilt.

Aus (2.30) und (2.22) folgt dann (2.29) und der Satz 2.5 ist bewiesen.

Wir werden jetzt voraussetzen, dass $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ ist, und bezeichnen mit $L_{p,\delta}(S)$ den Raum der fast überall auf der Grenze S des Gebietes Ω definierten Funktionen, für die das Flächenintegral

$$I = \int_S |u|^p r^\delta \, \mathrm{d}S$$

endlich ist; r ist wieder die Entfernung von dem festen Punkte $P \in S$. In dem Raum $L_{p,\delta}(S)$ führen wir die Norm folgendermassen ein:

$$\|u\|_{L_{p,\delta}(S)} = [I]^{1/p} \, . \tag{2.31}$$

Wenn die Funktion u fast überall auf S definiert ist, sind die Funktionen $v_i(X_i) = u(X_i, a_i(X_i))$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ fast überall auf Δ_i definiert und man kann die Norm in $L_{p,\delta}(S)$ auch folgenderweise einführen:

$$\|u\|_{L_{p,\delta}(S)} = \left[\sum_{i=1}^m \int_{\Delta_i} |u(X_i, a_i(X_i))|^p r^\delta(X_i, a_i(X_i)) \, \mathrm{d}X_i\right]^{1/p}; \tag{2.32}$$

die Normen (2.31) und (2.32) sind äquivalent.

Für $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ hat es Sinn von der Spur einer Funktion $u \in W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ auf der Grenze S zu sprechen; es gilt

Satz. 2.6. *Es sei* $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$, $\alpha \geqq 0$, $\alpha > p - N$. *Dann existiert genau eine stetige lineare Abbildung* Z *des Raumes* $W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ *in den Raum* $L_{p,\alpha-p+1}(S)$ *so, dass für* $u \in \mathscr{E}(\Omega)$ $Z(u) = u$ *ist, und es existiert eine solche positive Zahl* c, *dass für alle* $u \in W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ *die Ungleichung*

$$\|Z(u)\|_{L_{p,\alpha-p+1}(S)} \leqq c\|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} \tag{2.33}$$

gilt.

Beweis (in dieser Form stammt der Beweis von J. Nečas). Es sei $u \in \mathscr{E}(\Omega)$, $X_i \in \Delta_i$ und $a_i(X_i) - \beta < s < a_i(X_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Dann ist

$$u(X_i, a_i(X_i)) = u(X_i, s) + \int_s^{a_i(X_i)} \frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(X_i, t)\, dt\,. \tag{2.34}$$

A) Zuerst sei $i = 1$. Wir bezeichnen $r_1(X_1) = r(X_1, a_1(X_1))$ und wählen $s \in (a_1(X_1) - r_1(X_1), a_1(X_1))$, d.h. $0 < a_1(X_1) - s < r_1(X_1)$. Nach der Hölderschen Ungleichung ist

$$\left|\int_s^{a_1} \frac{\partial u}{\partial x_{1N}}(X_1, t)\, dt\right|^p \leqq (a_1 - s)^{p-1} \int_s^{a_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{1N}}(X_1, t)\right|^p dt \leqq$$
$$\leqq r_1^{p-1}(X_1) \int_{a_1 - r_1}^{a_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{1N}}(X_1, t)\right|^p dt$$

(dies gilt auch für $p = 1$). Aus dieser Ungleichung und aus (2.34) folgt

$$|u(X_1, a_1(X_1))|^p \leqq c_1 \left\{|u_1(X_1, s)|^p + r_1^{p-1}(X_1) \int_{a_1 - r_1}^{a_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{1N}}(X_1, t)\right|^p dt\,.\right.$$

Wenn wir diese Ungleichung nach der Variablen s von $a_1(X_1) - r_1(X_1)$ bis $a_1(X_1)$ integrieren, bekommen wir

$$|u(X_1, a_1(X_1))|^p\, r_1(X_1) \leqq c_1 \left\{\int_{a_1 - r_1}^{a_1} |u(X_1, s)|^p\, ds + \right.$$
$$\left. + r_1^p(X_1) \int_{a_1 - r_1}^{a_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{1N}}(X_1, s)\right|^p ds\right\}. \tag{2.35}$$

Da $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ ist, erfüllt die Funktion a_1 die Lipschitz-Bedingung und die Grenze S hat also im Punkte P die Kegeleigenschaft (vgl. die Bedingung A im Abschnitt 1). Wir können also den Hilfssatz 1 benützen; aus der Ungleichung (1.3) und aus der Dreiecksungleichung für das Dreieck $X = [X_1, s]$, $\dot{X} = [X_1, a_1(X_1)]$ und P folgt nun

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{r_1(X_1)}{r(X_1, s)} \leqq c_2$$

und aus dieser Ungleichung bekommen wir:

$$(2.36)\qquad r_1^{\alpha-p}(X_1)\int_{a_1-r_1}^{a_1}|u(X_1,s)|^p\,\mathrm{d}s \leqq c_3\int_{a_1-\beta}^{a_1}|u(X_1,s)|^p\,r^{\alpha-p}(X_1,s)\,\mathrm{d}s\,;$$

$$r_1^{\alpha}(X_1)\int_{a_1-r_1}^{a_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_{1N}}(X_1,s)\right|^p\mathrm{d}s \leqq c_4\int_{a_1-\beta}^{a_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_{1N}}(X_1,s)\right|^p r^{\alpha}(X_1,s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Wenn wir (2.35) mit $r_1^{\alpha-p}(X_1)$ multiplizieren und dann die Ungleichungen (2.36) benützen, bekommen wir

$$|u(X_1,a_1(X_1))|^p\,r_1^{\alpha-p+1}(X_1)\leqq$$
$$\leqq c_5\left\{\int_{a_1-\beta}^{a_1}|u(X_1,s)|^p\,r^{\alpha-p}(X_1,s)\,\mathrm{d}s+\int_{a_1-\beta}^{a_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_{1N}}(X_1,s)\right|^p r^{\alpha}(X_1,s)\,\mathrm{d}s\right\}.$$

Nach einer weiteren Integration über Δ_1 ist

$$(2.37)\qquad \int_{\Delta_1}|u(X_1,a_1(X_1))|^p\,r^{\alpha-p+1}(X_1,a_1(X_1))\,\mathrm{d}X_1\leqq$$
$$\leqq c_5\left\{\int_{V_1}|u(X)|^p\,r^{\alpha-p}(X)\,\mathrm{d}X+\int_{V_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_{1N}}\right|^p r^{\alpha}(X)\,\mathrm{d}X\right\}.$$

Beide Integrale auf der rechten Seite dieser Ungleichung können wir durch den Ausdruck $\|u\|^p_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)}$ abschätzen: bei dem ersten Integral folgt dies aus der Ungleichung (2.29) des Satzes 2.5, bei dem zweiten ist es offensichtlich. Es gilt also

$$(2.38)\qquad \int_{\Delta_1}|u(X_1,a_1(X_1))|^p\,r^{\alpha-p+1}(X_1,a_1(X_1))\,\mathrm{d}X_1\leqq c_6\|u\|^p_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)}\,.$$

B) Es sei nun $i=2,3,\ldots,m$. Aus (2.34) folgt wieder

$$|u(X_i,a_i(X_i))|^p\leqq c_1\left\{|u(X_i,s)|^p+\beta^{p-1}\int_{a_i-\beta}^{a_i}\left|\frac{\partial u}{\partial x_{iN}}(X_i,t)\right|^p\mathrm{d}t\right\}.$$

Wenn wir diese Ungleichung erst nach s von $a_i-\beta$ bis a_i und dann nach X_i über Δ_i integrieren und die Tatsache ausnützen, dass für $[X_i,s]\in V_i$ $(i\geqq 2)$ die Ausdrücke $r(X_i,a_i(X_i))$ und $r(X_i,s)$ von unten und oben durch positive Konstanten beschränkt sind, bekommen wir eine Ungleichung vom Typ (2.37), wo wir allerdings statt X_1, a_1 und V_1 X_i, a_i und V_i schreiben; aus dieser Ungleichung folgt dann

$$(2.39)\qquad \int_{\Delta_i}|u(X_i,a_i(X_i))|^p\,r^{\alpha-p+1}(X_i,a_i(X_i))\,\mathrm{d}X_i\leqq c_7\|u\|^p_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)}\,.$$

Aus (2.38), (2.39) und (2.32) folgt also

$$(2.40)\qquad \|u\|_{L_{p,\alpha-p+1}(S)}\leqq c_8\|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)}$$

für $u \in \mathscr{E}(\Omega)$. Es sei nun $u \in W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$. Aus dem Satz 2.2 folgt, dass eine Folge von Funktionen $u_n \in \mathscr{E}(\Omega)$ existiert, die in $W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ zu u konvergieren. Es existiert auch $v = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ in der Norm des Raumes $L_{p,\alpha-p+1}(S)$. Die Abbildung Z ist so definiert: $Z(u) = v$; offensichtlich ist für $u \in \mathscr{E}(\Omega)$ $Z(u) = u$ und die Ungleichung (2.33) folgt aus (2.40).

Bemerkung. In den Sätzen 2.4, 2.5 und 2.6 können wir die Voraussetzung $u \in W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ durch die schwächere Voraussetzung $u \in L_{p,loc}(\Omega)$, $\partial u/\partial x_i \in L_{p,\alpha}(\Omega)$ ersetzen, denn aus dem Satz 2.3 folgt dann schon $u \in W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$.

3. DIE RÄUME $\mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}$

Es sei $\mathscr{D}(\Omega)$ die Menge aller Funktionen aus $\mathscr{E}(E_N)$, die einen kompakten Träger in Ω haben, d.h. u liegt in $\mathscr{D}(\Omega)$, wenn eine solche kompakte Menge $M \subset \Omega$ existiert, dass die Funktion u ausserhalb M verschwindet.

Wir bezeichnen mit $\mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ die Abschliessung der Menge $\mathscr{D}(\Omega)$ in der Norm (1.2): $\mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) = \overline{\mathscr{D}(\Omega)}$; in $\mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ führen wir folgenderweise eine Pseudonorm ein:

$$\|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} = \left[\sum_{|i|=k} \int_\Omega |D^i u|^p \, r^\alpha(X) \, \mathrm{d}X\right]^{1/p} \tag{3.1}$$

(zum Unterschied von der Norm (1.2) wird hier also nur über Vektoren i der Länge k summiert). Offensichtlich gilt die Ungleichung

$$\|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} \leqq \|u\|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)} . \tag{3.2}$$

Ähnlich wie bei den Räumen $W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ können wir für $k = 0$ $\mathring{L}_{p,\alpha}(\Omega)$ statt $\mathring{W}_{p,\alpha}^{(0)}(\Omega)$ schreiben; es ist aber $\|u\|_{\mathring{L}_{p,\alpha}} = \|u\|_{L_{p,\alpha}}$ und bekanntlich ist die Menge $\mathscr{D}(\Omega)$ dicht in dem Raume $L_p(\Omega)$ und also auch in $L_{p,\alpha}(\Omega)$ und darum ist

$$\mathring{L}_{p,\alpha}(\Omega) = L_{p,\alpha}(\Omega) .$$

Wir werden jetzt einen wichtigen Einbettungssatz beweisen:

Satz 3.1.. *Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, $p \geqq 1$, $\alpha \neq p - 1$. Dann ist*

$$\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega) \subset L_{p,\alpha-p}(\Omega)$$

und es existiert eine positive Zahl c so, dass für alle Funktionen $u \in \mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{L_{p,\alpha-p}(\Omega)} \leqq c\|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} \tag{3.3}$$

gilt.

Der Ausdruck $\|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)}$ *ist eine Norm in* $\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$, *die für* $u \in \mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ *der Norm* $\|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)}$ *äquivalent ist.*

Beweis. Da die Menge $\mathscr{D}(\Omega)$ in $\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ dicht ist, können wir alle Schritte nur für $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ durchführen.

A) Zuerst sei $X \in V_1$. Ähnlich wie bei dem Beweis des Satzes 2.4 kann man zeigen, dass aus dem Hilfssatz 1 die Ungleichung

$$I = \int_{V_1} |u(X)|^p \, r^{\alpha-p}(X) \, dX \leqq$$
$$\leqq c_1 \int_{\Delta_1} dX_1 \int_{a_1-\beta}^{a_1} |u(X_1, t)|^p \, [r_1(X_1) + a_1(X_1) - t]^{\alpha-p} \, dt$$

mit $r_1(X_1) = r(X_1, a_1(X_1))$ folgt. Das innere Integral J können wir wieder mit Hilfe der Hardyschen Ungleichung (1.6) abschätzen: da die Funktion u aus $\mathscr{D}(\Omega)$ ist, verschwindet die Funktion $u(s) = u(X_1, a_1(X_1) - s)$ in der Nähe des Punktes $s = 0$ und auch für genügend grosse s. Darum können wir beide Möglichkeiten des Hilfssatzes 2 benützen und bekommen dann für $\alpha \neq p - 1$ die Ungleichung

$$J = \int_{a_1-\beta}^{a_1} |u(X_1, t)|^p \, [r_1(X_1) + a_1(X_1) - t]^{\alpha-p} \, dt \leqq$$
$$\leqq \int_0^{\infty} |u(X_1, a_1(X_1) - s)|^p \, (r_1(X_1) + s)^{\alpha-p} \, ds \leqq$$
$$\leqq \left(\frac{p}{|\alpha - p + 1|}\right)^p \int_0^{\infty} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{1N}} (X_1, a_1(X_1) - s)\right|^p (r_1(X_1) + s)^{\alpha} \, ds \, .$$

Wenn wir nun nochmals die Ungleichung (1.4) des Hilfssatzes 1 benutzen (nach vorhergehender Substitution $s = a_1(X_1) - t$) und dann über Δ_1 integrieren, bekommen wir endlich:

$$I \leqq c_2 \int_{\Delta_1} dX_1 \int_{-\infty}^{a_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{1N}} (X_1, t)\right|^p r^{\alpha}(X_1, t) \, dt \leqq$$
$$\leqq c_2 \int_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_{1N}} (X)\right|^p r^{\alpha}(X) \, dX \leqq c_3 \|u\|^p_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} \, .$$

Da $I = \|u\|^p_{L_{p,\alpha-p}(V_1)}$ ist, gilt also

$$\|u\|_{L_{p,\alpha-p}(V_1)} \leqq c_4 \|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} \, . \tag{3.4}$$

B) Es sei nun $X \in V_i$, $i = 2, 3, \ldots, m$. Das Gebiet Ω ist beschränkt und die Bereiche V_i haben eine positive Entfernung von dem Punkte P; darum ist für $X \in V_i$ $(i \geqq 2)$

$$0 < c_5 \leqq r(X) \leqq c_6 \, . \tag{3.5}$$

Für $a_i(X_i) - \beta < x_{iN} < a_i(X_i)$ ist

$$u(X_i, x_{iN}) = - \int_{x_{iN}}^{a_i(X_i)} \frac{\partial u}{\partial x_{iN}} (X_i, t)\, \mathrm{d}t\,,$$

denn u ist aus $\mathscr{D}(\Omega)$ und darum ist $u(X_i, a_i(X_i)) = 0$. Mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung bekommen wir

$$|u(X_i, x_{iN})|^p \leqq \beta^{p-1} \int_{a_i - \beta}^{a_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_{iN}} (X_i, t) \right|^p \mathrm{d}t$$

(dies gilt auch für $p = 1$). Wenn wir diese Ungleichung erst nach x_{iN} von $a_i - \beta$ bis a_i und dann nach X_i über Δ_i integrieren und die Ungleichungen $r^{\alpha-p}(X_i, x_{iN}) \leqq c_7$ und $r^{\alpha}(X_i, t) \geqq c_8$ benützen, die aus (3.5) folgen, bekommen wir endlich

$$\int_{V_i} |u(X)|^p\, r^{\alpha-p}(X)\, \mathrm{d}X \leqq c_9 \int_{V_i} \left| \frac{\partial u}{\partial x_{iN}} \right|^p r^{\alpha}(X)\, \mathrm{d}X\,,$$

d.h.

$$\|u\|_{L_{p,\alpha-p}(V_i)} \leqq c_{10} \|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}{}^{(1)}(\Omega)} \quad (i \geqq 2)\,. \tag{3.6}$$

C) Es sei endlich $X \in U_{m+1}$. Wir können voraussetzen, dass die Grenze des Bereiches U_{m+1} genügend glatt ist, z.B. dass $U_{m+1} \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ gilt. Dann ist

$$\|u\|_{W_p{}^{(1)}(U_{m+1})} \leqq c_{11} \Big[\|u\|_{\mathring{W}_p{}^{(1)}(U_{m+1})} + \sum_{i=1}^{m} \|u\|_{L_p(U_{m+1} . V_i)} \Big] \tag{3.7}$$

(vgl. J. Nečas [7]). Die Ungleichungen (3.5) gelten auch für $X \in U_{m+1}$ und mit ihrer Hilfe bekommen wir aus (3.7) die Ungleichung

$$\|u\|_{L_{p,\alpha-p}(U_{m+1})} \leqq c_{12} \Big[\|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}{}^{(1)}(U_{m+1})} + \sum_{i=1}^{m} \|u\|_{L_{p,\alpha-p}(U_{m+1} . V_i)} \Big]\,. \tag{3.8}$$

Es ist $U_{m+1} . V_i \subset V_i$; aus den Ungleichungen (3.4) und (3.6) folgt

$$\|u\|_{L_{p,\alpha-p}(U_{m+1} . V_i)} \leqq \|u\|_{L_{p,\alpha-p}(V_i)} \leqq c_{13} \|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}{}^{(1)}(\Omega)}\,.$$

Mit dieser Ungleichung bekommen wir aus (3.8)

$$\|u\|_{L_{p,\alpha-p}(U_{m+1})} \leqq c_{12}(1 + m \,.\, c_{13})\, \|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}{}^{(1)}(\Omega)}\,. \tag{3.9}$$

Da $\Omega = U_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} V_i$ ist, folgt aus (3.4), (3.6) und (3.9) die Ungleichung

$$\|u\|_{L_{p,\alpha-p}(\Omega)} \leqq c_{14} \|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}{}^{(1)}(\Omega)}\,, \tag{3.10}$$

womit die Ungleichung (3.3) bewiesen ist.

Weiter ist für alle $X \in \Omega$ $r^{\alpha}(X) \leqq c_{15}\, r^{\alpha-p}(X)$ und daraus folgt $\|u\|_{L_{p,\alpha}(\Omega)} \leqq$ $\leqq c_{16} \|u\|_{L_{p,\alpha-p}(\Omega)}$. Diese Ungleichung ergibt zusammen mit (3.10)

$$\|u\|_{L_{p,\alpha}(\Omega)} \leqq c_{17} \|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} . \tag{3.11}$$

Da aber $\|u\|^p_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} = \|u\|^p_{L_{p,\alpha}(\Omega)} + \|u\|^p_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)}$ ist, folgt aus (3.11) die Ungleichung

$$\|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} \leqq (1 + c_{17}^p)^{1/p} \|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} .$$

Aus dieser Ungleichung und aus (3.2) folgt, dass die Normen $\|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)}$ und $\|u\|_{W_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)}$ auf dem Raum $\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ äquivalent sind, und der Satz 3.1 ist damit bewiesen.

In dem Satz 3.1 mussten wir $\alpha \neq p - 1$ voraussetzen, um die Hardysche Ungleichung (1.6) benützen zu können. Wir können den Satz 3.1 für $\alpha \neq p - N$ beweisen, wenn wir die sphärischen Koordinaten benützen, und da $N \geqq 2$ ist, gilt dann der Satz 3.1 für alle Werte des Parameters α.

Satz 3.2. *Der Satz* 3.1 *gilt für alle* α.

Beweis. A) Es sei $X \in V_1$ und $u \in \mathscr{D}(\Omega)$. Wenn wir im Integral

$$I = \int_{V_1} |u(X)|^p\, r^{\alpha-p}(X)\, \mathrm{d}X$$

zu den sphärischen Koordinaten $[\Theta, r]$ übergehen, bekommen wir

$$I \leqq \int_\sigma \mathrm{d}\Theta \int_0^\infty |u(\Theta, r)|^p\, r^{\alpha-p+N-1}\, \mathrm{d}r .$$

Da $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ ist, verschwindet die Funktion $g(r) = u(\Theta, r)$ in der Nähe des Punktes $r = 0$ und für genügend grosse r. Wir können also die Ungleichung (1.5) des Hilfssatzes 2 benützen und bekommen für $\alpha \neq p - N$ die Ungleichung

$$\int_0^\infty |u(\Theta, r)|^p\, r^{\alpha-p+N-1}\, \mathrm{d}r \leqq \left(\frac{p}{|\alpha + N - p|}\right)^p \int_0^\infty \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p r^{\alpha+N-1}\, \mathrm{d}r .$$

Wenn wir hier über den Teil σ der Einheitskugelfläche integrieren und wieder zu den kartesischen Koordinaten zurückkehren, haben wir

$$I \leqq c_1 \int_\sigma \mathrm{d}\Theta \int_0^\infty \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^p r^{\alpha+N-1}\, \mathrm{d}r \leqq c_1 \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial r}(X)\right|^p r^{\alpha}(X)\, \mathrm{d}X \leqq$$
$$\leqq c_2 \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p r^{\alpha}(X)\, \mathrm{d}X = c_2 \|u\|^p_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} ,$$

d.h.

$$\|u\|_{L_{p,\alpha-p}(V_1)} \leqq c_3 \|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)} .$$

Das ist wieder die Ungleichung (3.4), die diesmal für $\alpha \neq p - N$ gilt. Der Rest des Beweises gleicht wörtlich den Teilen B) und C) des Beweises des Satzes 3.1. Damit sind alle Behauptungen des Satzes 3.1 auch für $\alpha = p - 1$ bewiesen und gelten also für alle α.

Im Grenzfall, wenn der Kegel K aus der Kegeleigenschaft A (vgl. Abschnitt 1) in ein Intervall $\langle 0, c \rangle$ auf der Koordinatenachse x_{1N} übergeht, können wir den Teil A) des Beweises des Satzes 3.1 nicht benützen, denn dort brauchten wir wesentlich die Ungleichung (1.4) und deren linker Teil gilt in diesem Grenzfall nicht (es ist $\omega = 0$ und also $c_2 = \sin \omega/2 = 0$). Wir können nur die sphärischen Koordinaten benützen und können also sagen, dass alle Behauptungen des Satzes 3.1 in diesem Fall nur für $\alpha \neq p - N$ gelten. Man kann nun fragen, ob sie auch für $\alpha = p - N$ gelten. V. A. KONDRAT'EV zeigte in der interessanten Arbeit [4], dass gerade in diesem Grenzfall die Einbettung

$$\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega) \subset L_{2,-2}(\Omega) \tag{3.12}$$

gilt, was ein Spezialfall der Einbettung $\mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega) \subset L_{p,\alpha-p}(\Omega)$ für $p = 2$ und $\alpha = 0$ ist; dabei machte er diese Betrachtungen auf ebenen Gebieten, d.h. für $N = 2$, und es ist also $\alpha = p - N$. Die Einbettung (3.12) kann man ziemlich leicht ableiten, wenn man die Polarkoordinaten benützt.

Es sei nun $u \in \mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ und $v = D^i u$ mit $|i| = k - 1$. Dann ist $v \in \mathring{W}_{p,\alpha}^{(1)}(\Omega)$ und aus dem Satz 3.2 folgt, dass $v \in L_{p,\alpha-p}(\Omega)$ und also $u \in \mathring{W}_{p,\alpha-p}^{(k-1)}(\Omega)$ ist. Aus dem Satz 3.2 folgt also, dass

$$\mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) \subset \mathring{W}_{p,\alpha-p}^{(k-1)}(\Omega)$$

ist und dass man auch alle weitere Behauptungen des Satzes 3.2 analogisch erweitern kann. Aus dem Satz 3.2 folgt also augenblicklich dieser wichtige Satz:

Satz 3.3. *Es sei $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$, $p \geqq 1$, α eine beliebige reelle Zahl. Weiter seien k und s nichtnegative ganze Zahlen, $s \leqq k$. Dann ist.*

$$\mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega) \subset \mathring{W}_{p,\alpha-sp}^{(k-s)}(\Omega)$$

und es existiert eine solche positive Zahl c, dass für alle Funktionen $u \in \mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha-sp}^{(k-s)}(\Omega)} \leqq c \|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)}$$

gilt. Die Normen $\|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)}$ und $\|u\|_{W_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)}$ sind für $u \in \mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)$ äquivalent.

Schlussbemerkung. In allen vorhergehenden Betrachtungen wurde die Belegungsfunktion wesentlich nur in einer Umgebung des Punktes P ausgenützt, und zwar für $X \in V_1$. In den Bereichen U_{m+1} und V_i für $i \geqq 2$ spielte die Belegungsfunktion keine Rolle. Hieraus folgt die Möglichkeit einer Verallgemeinerung der hier erwähnten

Ergebnisse auch auf Räume $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ mit einer anderen Belegungsfunktion als gerade $r^\alpha(X)$. Wenn man z.B. voraussetzt, dass in den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_j$ auf der Grenze S das Gebiet Ω die Kegeleigenschaft von aussen besitzt, gelten die hier erwähnten Sätze auch für die Räume $W^{(k)}_{p,\sigma^\alpha}(\Omega)$ aller Funktionen, für die

$$\|u\|_{W_{p,\sigma^\alpha}{}^{(k)}(\Omega)} = \left[\sum_{|i|=0}^{k} \int_\Omega |D^i u|^p \, \sigma^\alpha(X) \, \mathrm{d}X\right]^{1/p} < \infty$$

ist, wobei

$$\sigma^\alpha(X) = \min_{1 \leq i \leq j} |X - P_i| \tag{3.13}$$

oder

$$\sigma^\alpha(X) = |X - P_1|^{\alpha_1} \, . \, |X - P_2|^{\alpha_2} \, . \ldots . \, |X - P_j|^{\alpha_j} \tag{3.14}$$

ist.

Literaturverzeichnis

[1] *J. Deny, J. L. Lions:* Les espaces du type de Beppo-Levi, Ann. Inst. Fourier *5*, 1953—1954 (1955), 305—370.

[2] *E. Gagliardo:* Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili, Ricerche mat., *7*, 1 (1958), 102—137.

[3] *G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya:* Inequalities, Cambridge 1934.

[4] *В. А. Кондратьев:* Оценки производных решений эллиптических уравнений вблизи границы, Доклады АН СССР *146*, 1 (1962), 22—25.

[5] *Л. Д. Кудрявцев:* Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений, Труды мат. инст. им. В. А. Стеклова *55* (1959).

[6] *A. Kufner:* Über Sobolevsche Räume mit Belegungsfunktion und das Dirichletsche Problem, Comm. Math. Univ. Carolinae *6,1* (1965), 105—110.

[7] *J. Nečas:* Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationelle, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, ser. 3, *16*, 4 (1962), 305—326.

[8] *И. Нечас:* Об областях типа $\mathfrak{N}$, Чех. мат. журнал *12* (*87*), (1962), 274—287.

[9] *С. Л. Соболев:* Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Ленинград 1950.

Резюме

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА С ВЕСОМ

АЛОИС КУФНЕР (Alois Kufner), Прага

В работе исследованы пространства $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ функций определенных почти всюду в ограниченной области Ω N-мерного Евклидова пространства E_N, частные производные которых до порядка k включительно интегрируемы на Ω со

степенью $p \geqq 1$ и с весом $r^\alpha(X)$, где $r(X)$ расстояние точки $X \in \Omega$ до фиксированной точки P, лежащей на границе S области Ω.

В пространстве $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$ определена обыкновенным образом норма формулой (1.2). О области предполагается, что она типа $\mathfrak{K}^{(0)}$, т.е. — грубо говоря — что границу S можно локально записать с помощью непрерывных функций и что в точке $P \in S$ обладает Ω свойством конуса извне.

В п. 1 работы приведены две леммы, касающиеся функции $r(X)$ (неравенства (1.3) и (1.4)) и неравенства Харди (неравенства (1.5) и (1.6)).

В п. 2 исследованы свойства весовых пространств $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$. Показана связь между весовыми пространствами и обыкновенными пространствами С. Л. Соболева (которые являются частным случаем весовых пространств для $\alpha = 0$) — включение (2.1) и (2.2) и теорема 2.1. В теореме 2.2 доказано, что для $\alpha \geqq 0$ пространство $\mathscr{E}(\Omega)$ функций бесконечно дифференцируемых в Ω и непрерывных со всеми производными вплоть до границы является плотным в $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$. В теореме 2.4 показано, что имеет место вложение

$$(*) \qquad W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset L_{p,\alpha^*}(\Omega)\,,$$

где $\alpha^* = \alpha - p$ для $\alpha > p - 1$ и $\alpha^* = -1 + \varepsilon$ с произвольным $\varepsilon > 0$ для $0 \leqq \alpha \leqq p - 1$.

Если дополнительно предположить, что граница S удовлетворяет в окрестности точки P условию Липшица, то вложение $(*)$ с $\alpha^* = \alpha - p$ имеет место и для $\alpha > p - N$.

Для $\Omega \in \mathfrak{N}^{(0),1}$ (т. е. в случае, что границу S можно локально записать с помощью функций, удовлетворяющих условию Липшица) имеет смысл говорить о следах функций из $W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega)$ на границе S и для $\alpha \geqq 0$, $\alpha > p - N$ имеет место вложение $W^{(1)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset L_{p,\alpha-p+1}(S)$ (теорема 2.6).

В п.3 исследованы пространства $\mathring{W}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$, являющиеся замыканием финитных в Ω функций по норме пространства $W^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$. Здесь показано, что выражение $\|u\|_{\mathring{W}_{p,\alpha}^{(k)}(\Omega)}$, определенное формулой (3.1), является нормой пространства $\mathring{W}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega)$, равносильной норме (1.2), и что при $\Omega \in \mathfrak{K}^{(0)}$ имеет для всех вещественных α место вложение

$$\mathring{W}^{(k)}_{p,\alpha}(\Omega) \subset \mathring{W}^{(k-s)}_{p,\alpha-sp}(\Omega)$$

($0 \leqq s \leqq k$ целое).

В конце указывается, что результаты работы можно соответствующим образом распространить и на случай весовых пространств с весами (3.13) и (3.14).