Czechoslovak Mathematical Journal

Tibor Šalát

Über die Hausdorffsche Dimension der Menge der Zahlen mit beschränkten Folgen von Ziffern in Cantorschen Entwicklungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 4, 540–553

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100693`

ÜBER DIE HAUSDORFFSCHE DIMENSION DER MENGE DER ZAHLEN MIT BESCHRÄNKTEN FOLGEN VON ZIFFERN IN CANTORSCHEN ENTWICKLUNGEN

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Eingegangen am 14. September 1964)

Zu den gewöhnlichsten Typen der Entwicklungen von reellen Zahlen gehören die Kettenbrüche und die Cantorschen Reihen.

Wie behannt ist (siehe [1] S. 97–104), kann jede reelle Zahl $x \in (0, 1)$ eindeutig in der Form eines Kettenbruches

$$x = [0; n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots] = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_k + \ddots}}}$$

ausgedrückt werden. Dabei sind $n_i = n_i(x)$ natürliche Zahlen (die so genannten Elemente der Zahl x). Wenn der Kettenbruch endlich ist, d.h. wenn

$$(1) \qquad x = [0; n_1, n_2, \ldots n_k] = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_k}}}$$

ist, dann ist $n_k > 1$.

Auch das ist bekannt, dass wenn $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge natürlicher Zahlen grösser als 1 ist, dann kann jede reelle Zahl $x \in (0, 1)$ eindeutig in der Form

$$(2) \qquad x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 q_2 \ldots q_k}$$

ausgedrückt werden, wo $\varepsilon_k(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ganze Zahlen sind (die sogenannten Ziffern der Zahl x), $0 \leqq \varepsilon_k(x) \leqq q_k - 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ und für unendlich viele k

$\varepsilon_k(x) < q_k - 1$ ist. Wenn wir $q_k = g > 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ setzen, dann bekommen wir die g-adischen Entwicklungen der reellen Zahlen (siehe [1], S. 111–116).

Aus der metrischen Theorie der Kettenbrüche ist dieses Ergebnis von fundamentaler Bedeutung bekannt (siehe [2] S. 76–78):

Es bedeute M_∞ die Menge aller $x \in (0, 1)$ mit beschränkten Elementen (in den Kettenbrüchen), d.h. M_∞ ist die Menge aller derjenigen $x \in (0, 1)$, die die folgende Eigenschaft haben: zur Zahl x existiert eine Konstante $K_x > 0$ so, dass $n_k = n_k(x) \leqq K_x$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ist. Dann ist $|M_\infty| = 0$ ($|A|$ bedeutet im folgenden das Lebesguesche Mass der Menge A).

Zu den ersten Anwendungen der Theorie des Hausdorffschen Masses in der Arithmetik des Kontinuums gehört das Ergebnis von V. Jarník aus dem Jahre 1929, nach dem $\dim M_\infty = 1$ ist (siehe [3]). Es sei bemerkt dass es sich in dieser ganzen Arbeit um die Hausdorffsche Dimension mit Rücksicht auf das System von Massfunktionen $\mu^{(\alpha)}(t) = t^\alpha$, $t \in \langle 0, +\infty)$, $\alpha \in (0, 1)$ handelt (siehe [5]).

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit einer zur erwähnten Jarníkschen Anwendung des Hausdorffschen Masses in der Arithmetik des Kontinuums analogischen Problematik in der Theorie der Cantorschen Reihen. Genau gesagt handelt es sich hier um die Lösung dieser Frage: Wie gross ist die Hausdorffsche Dimension der Menge M_∞ aller derjenigen $x \in (0, 1)$, für die die Folgen der Ziffern $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^\infty$ beschränkt sind? Wenn die Folge $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ nach oben beschränkt ist, dann ist ersichtlich $M_\infty = (0, 1)$ und die Frage ist uninteressant ($\dim M_\infty = 1$). Darum wird im weiteren bei der Untersuchung $\dim M_\infty$ über die Folge $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ vorausgesetzt, dass $\limsup_{k\to\infty} q_k = +\infty$. Es sei bemerkt, dass die Struktur der Menge M_∞ von $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ abhängt, deshalb werden wir genauer schreiben

$$M_\infty = M_\infty(q_1, q_2, \ldots q_n, \ldots)$$

Damit die formulierte Frage interessant sei, ist es nötig zu bemerken, dass $|M_\infty(q_1, q_2, \ldots q_n, \ldots)| = 0$ ist. Das zeigen wir tatsächlich (siehe Satz 1) mit Hilfe des folgenden grundlegenden Ergebnisses von A. Rényi in der metrischen Theorie der Cantorschen Reihen (siehe [4]). $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ bedeutet im weiteren eine Folge natürlicher Zahlen, $q_k > 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$.

Satz 1. (A. Rényi). *Es sei $\sum_{k=1}^\infty 1/q_k = +\infty$. Dann ist für fast alle $x \in (0, 1)$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(r, x)}{\sum\limits_{k \leqq n, r < q_k} 1/q_k} = 1 \quad (r = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo $N_n(r, x)$ die Anzahl der Zahlen r in der (endlichen) Folge $\varepsilon_1(x), \varepsilon_2(x), \ldots \varepsilon_n(x)$ bedeutet (siehe (2)).

2. *Es sei $\sum_{k=1}^\infty 1/q_k < +\infty$. Dann gilt für fast alle $x \in (0, 1)$, dass zu jeder ganzen Zahl $r \geqq 0$ nur eine endliche Anzahl solcher Zahlen n existiert, dass $\varepsilon_n(x) = r$ ist.*

In allen weiteren Sätzen bedeutet $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge natürlicher Zahlen, $q_k > 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ und $\limsup\limits_{k\to\infty} q_k = +\infty$.

Satz 1. $M_\infty = M_\infty(q_1, q_2, \ldots q_n, \ldots)$ *bedeute die Menge aller jener* $x \in (0, 1)$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1 \cdot q_2 \cdots q_k}$$

(Cantorsche Entwicklung), deren Ziffernfolgen beschränkt sind. Dann

$$|M_\infty| = |M_\infty(q_1, q_2, \ldots q_n, \ldots)| = 0\,.$$

Beweis. s sei eine natürliche Zahl; wir bezeichnen mit M_s die Menge aller derjenigen $x \in (0, 1)$, für welche gilt: $\varepsilon_k(x) \leqq s$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Dann ist ersichtlich

$$M_\infty = \bigcup_{s=1}^{\infty} M_s\,. \tag{3}$$

Für die Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ sind diese zwei Möglichkeiten denkbar:

(a$_1$) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty\,,$

(a$_2$) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 1/q_k < +\infty\,.$

Im Falle (a$_1$) bedeute $N_n(s + 1, x)$ wie vorher die Anzahl aller jener $j \leqq n$, für welche $\varepsilon_j(x) = s + 1$. Dann ist dem zitierten Satz von A. Rényi gemäss für fast alle $x \in (0, 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(s+1, x)}{\sum\limits_{k \leqq n, s+1 < q_k} \frac{1}{q_k}} = 1$$

Mit Rücksicht darauf, dass $\limsup\limits_{k\to\infty} q_k = +\infty$ ist, ist für alle hinreichend grosse n $(n > n_1)$ $\sum\limits_{k \leqq n, s+1 < q_k} 1/q_k > 0$ und für fast alle $x \in (0, 1)$ gilt also; in der Folge $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ tritt die Ziffer $s + 1$ auf. Deshalb ist $|M_s| = 0$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ und aus (3) erhalten wir $|M_\infty| = 0$.

Im Falle (a$_2$) verwenden wir jenes Ergebnis von A. Rényi (siehe den 2. Teil des Satzes von A. Rényi), nach welchem für fast alle $x \in (0, 1)$ gilt, dass in der Folge $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ jede ganze Zahl $r \geqq 0$ nur in endlicher Anzahl auftritt. Wenn also $x \in M_s$ ist, dann existiert notwendig ein ganzes r, $0 \leqq r \leqq s$, welches in $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ unendlich vielmals auftritt, also $|M_s| = 0$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ und aus (3) erhalten wir $|M_\infty| = 0$.

Nach dem gerade bewiesenen Satz ist $|M_\infty(q_1, q_2, \ldots q_n, \ldots)| = 0$ für jede Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $q_k > 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, $\limsup\limits_{k\to\infty} q_k = +\infty$. Die schon erwähnte Abhängigkeit der Menge $M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots)$ von der Folge $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ zeigt sich deutlich erst bei der Untersuchung der Hausdorffschen Dimension dieser Menge. Wir werden zeigen, dass die Hausdoffsche Dimension der Menge $M_\infty(q_1, q_2, \dots, q_n \dots)$ bei einer gewissen ergänzenden Voraussetzung über die Folge $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ wesentlich von der Beschränktheit der Folge $\{\sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)}\}_{n=1}^\infty$ abhängt.

Die Beweise mehrerer folgender Ergebnisse stützen sich auf dieses Ergebnis der Arbeit [6] (Satz 1 aus der Arbeit [6]):

Es sei $x_0 \in (0, 1)$, $\{q_k\}_1^\infty$ sei eine Folge natürlicher Zahlen grösser als 1. Es sei

$$x_0 = \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon_k(x_0)}{q_1 q_2 \dots q_k}$$

die Cantorsche Entwicklung der Zahl x_0. Für jedes $\varepsilon > 0$ sei

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{q_n}{(q_1 q_2 \dots q_n)^\varepsilon} < +\infty$$

Bezeichnen wir mit $\langle x_0 \rangle$ die Menge aller jener $x \in (0, 1)$, für welche $\varepsilon_k(x) \leqq \varepsilon_k(x_0)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ gilt, dann ist $\dim \langle x_0 \rangle = \liminf_{n \to \infty} \sigma_n$, *wo*

$$\sigma_n = \frac{\log \prod_{k=1}^n (\varepsilon_k(x_0) + 1)}{\log \prod_{k=1}^n q_k}.$$

Der Kürze halber werden wir im weiteren sagen, dass die Folge $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ die Eigenschaft $V(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ hat, wenn

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{q_n}{(q_1 q_2 \dots q_n)^\varepsilon} < +\infty$$

Satz 2. *Die Folge $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ (von oben unbeschränkt) habe die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Dann ist* $\dim M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots) = 0$ *dann und nur dann, wenn*

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)} = +\infty \tag{4}$$

Beweis. 1) Es gelte (4). Aus der Beziehung (3) und aus den bekannten Eigenschaften der Hausdorffschen Dimension folgt (siehe [5], Lemma 4), dass

$$\dim M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots) \leqq \sup_{s=1,2,3,\dots} \dim M_s .$$

Es genügt also zu zeigen, dass für jedes $s = 1, 2, 3, \dots$ $\dim M_s = 0$ ist.

s sei eine natürliche Zahl; wir setzen $\varepsilon_k = \min(s, q_k - 1)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ und

$$x_0 = \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k} .$$

Dann ist ersichtlich $M_s = \langle x_0 \rangle$ und für jedes n ist

$$\sigma_n \leqq \frac{n \log (s+1)}{\log \prod_{k=1}^{n} q_k}.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Wählen wir $L > 0$ so, dass $L^\varepsilon > s + 1$. Auf Grund von (4) existiert eine unendliche Menge H natürlicher Zahlen derart, dass für $n \in H$ $\sqrt[n]{(q_1 q_2 \ldots q_n)} > L$ ist. Dann ist für $n \in H$

$$\sigma_n < \frac{\log (s+1)}{\log L} < \varepsilon.$$

Daraus erhalten wir dem zitierten Ergebnis der Arbeit [5] gemäss $\dim M_\infty \leqq \varepsilon$ und weil $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt wurde, haben wir $\dim M_\infty = 0$.

2) Es gelte nicht (4), d.h. es sei

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \ldots q_n)} < +\infty. \tag{5}$$

Wir zeigen, dass in diesem Falle schon $\dim M_1 > 0$ ist.

Setzen wir $\varepsilon_k = 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$,

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \ldots q_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_k},$$

dann ist auf Grund des Satzes 1 der Arbeit [6]

$$\dim M_1 = \dim \langle x_0 \rangle = \liminf_{n\to\infty} \sigma_n,$$

$$\sigma_n = \frac{\log 2^n}{\log \prod_{k=1}^{n} q_k}.$$

Nach der voraussetzung (5) existiert $K > 0$ derart, dass für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\sqrt[n]{(q_1 q_2 \ldots q_n)} \leqq K$ ist (ersichtlich muss $K \geqq 2$ sein). Daraus folgt $\log \prod_{k=1}^{n} q_k \leqq n \log K$ und so ist

$$\dim M_1 \geqq \frac{\log 2}{\log K} > 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

B e i s p i e l 1. Es ist leicht festzustellen, dass die Folge

$$\{q_k\}_{k=1}^{\infty}, \quad q_k = k + 1 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

unbeschränkt ist, dass sie die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$ hat und dass für sie (4) gilt. Deshalb hat die Nullmenge aller jener

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(x)}{(k+1)!} \in (0, 1),$$

für welche $\{\varepsilon_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ beschränkt sind, die Hausdorffsche Dimension 0.

Im weiteren werden wir uns mit der Untersuchung dim $M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots)$ bei unbeschränkten Folgen $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ befassen und es wird

$$l = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)} < +\infty \tag{6}$$

vorausgesetzt. Ersichtlich ist $l \geqq 2$. Wir setzen bei natürlichem $s \geqq [l] + 1$ ($[l]$ bedeutet den ganzen Teil der Zahl l) $T_s = \{n;\, q_n \leqq s\}$, $U_s = \{n;\, q_n > s\}$. Auf Grund der Voraussetzung der Unbeschränktheit der Folge $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ ist U_s eine unendliche Menge bei jedem natürlichem $s \geqq [l] + 1$. Erwägen wir, dass auch T_s unendlich ist. Wenn nämlich T_s endlich wäre, dann wäre q_n für alle n, die grösser sind als irgendein natürliches n_1, grösser als s und es wäre also

$$l = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)} \geqq s \geqq [l] + 1\,,$$

was mit der Definition der Zahl $[l]$ im Widerspruch ist. Also ist bei jedem natürlichen $s \geqq [l] + 1$ jede der Mengen T_s, U_s unendlich und $T_s \cup U_s = N$ (N bedeutet überall in dieser Arbeit die Menge aller natürlichen Zahlen).

Es ist zu erwarten, dass die Voraussetzung (6) die "Häufigkeit" der Menge U_s negativ beeinflussen wird. Dies wollen wir tatsächlich zeigen. Zuerst wollen wir diese in der Zahlentheorie gebräuchliche Bezeichnung einführen: Wenn $A \subset N$, dann setzen wir $A(n) \leqq \sum_{k\leqq n, k\in A} 1$,

$$\delta_1(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} \text{ (untere asymptotische Dichte der Menge } A)\,,$$

$$\delta_2(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} \text{ (obere asymptotische Dichte der Menge } A)\,,$$

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} \text{ (asymptotische Dichte der Menge } A)\,.$$

Wir definieren $\delta(A)$ allerdings nur in dem Falle, wenn der Limes rechts existiert. Ersichtlich ist $\delta_1(A)$, $\delta_2(A)$, $\delta(A) \in \langle 0, 1\rangle$ und nach der Größe dieser Zahlen schließen wir auf die „Häufigkeit" der Menge A.

Satz 3. *Für die Folge $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ gelte (6). Dann ist für jedes $s \geqq [l] + 1$*

$$\delta_2(U_s) \leqq \frac{\log l}{\log(s+1)}\,.$$

Folgerung. $\lim_{s\to\infty} \delta_2(U_s) = 0$, $\lim_{s\to\infty} \delta_1(T_s) = 1$.

Beweis des Satzes. Für $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ gelte (6), s sei natürlich, $s \geqq [l] + 1$. Die Richtigkeit der Behauptung ist ersichtlich, wenn $\delta_2(U_s) = 0$ ist. Es sei also $\delta_2(U_s) > 0$. Dann existiert auf Grund von (6) zur Zahl $\eta > 0$ eine natürliche Zahl $n_0(\eta)$ derart, dass für jedes $n > n_0(\eta)$ $l + \eta > \sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)}$ ist. Wenn weiter $0 < \varepsilon < \delta_2(U_s)$ ist, dann ist auf Grund der Definition der Zahl $\delta_2(U_s)$ für unendlich viele $n > n_0(\eta)$ (diese n sollen die Menge H bilden)

$$\frac{U_s(n)}{n} > \delta_2(U_s) - \varepsilon$$

und also ist für $n \in H$

$$l + \eta > \sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)} \geqq \sqrt[n]{[(s+1)^{n\delta_2(U_s) - \varepsilon n}]} = (s+1)^{\delta_2(U_s) - \varepsilon},$$

daher

$$\delta_2(U_s) - \varepsilon \leqq \frac{\log(l + \eta)}{\log(s + 1)}.$$

Da die letzte Ungleichheit für jedes $\eta > 0$ und jedes ε, $0 < \varepsilon < \delta_2(U_s)$ gilt, ist $\delta_2(U_s) \leqq$ $\leqq (\log l)/(\log(s + 1))$.

Eine einfache Folgerung des gerade bewiesenen Satzes ist das folgende Ergebnis, welches wir im weiteren benützen werden.

Satz 4. *Für $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ gelte (6). Es sei*

$$A = \{k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots\} \subset N, \tag{7}$$

$$\lim_{n \to \infty} q_{k_n} = +\infty$$

Dann ist $\delta(A) = 0$.

Beweis. Die Voraussetzungen des Satzes seien erfüllt. Es sei $s \geqq [l] + 1$. Dann existiert in Hinsicht auf (7) $i = i(s)$ derart, dass für $n > i$ $q_{k_n} > s$ ist, also $A \subset U_s \cup$ $\cup \{k_1, k_2, \dots k_i\}$. Daraus erhalten wir $A(n) \leqq U_s(n) + i$ $(n \geqq 1)$ und so auf Grund des vorhergehenden Satzes

$$\delta_2(A) \leqq \delta_2(U_s) \leqq \frac{\log l}{\log(s + 1)}.$$

Da die letzten Ungleichheiten für jedes $s \geqq [l] + 1$ gelten, erhalten wir bei $s \to \infty$ $\delta_2(A) = 0$, also $\delta(A) = 0$.

Wählen wir bei der Definition der Mengen T_s, U_s speziell $s = [l] + 1$, dann bekommen wir im folgenden Satz eine nichttriviale untere Abschätzung für $\dim M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots)$.

Satz 5. *Die (unbeschränkte) Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ habe die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Es gelte (6). Dann ist*

$$\dim M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots) \geqq 1 - \delta_2(T_{[l]+1}) \frac{\log l - \log 2}{\log l}.$$

Folgerung. Wenn $l = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)} = 2$ ist, dann ist $\dim M_\infty(q_1, q_2, \dots$ $\dots, q_n, \dots) = 1$.

Beweis des Satzes. Die Voraussetzungen des Satzes seien erfüllt. Definieren wir $\varepsilon_k = 1$ für $k \in T_{[l]+1}$ und $\varepsilon_k = [l]$ für $k \in U_{[l]+1}$, dann ist ersichtlich $M_\infty(q_1, q_2, \dots$ $\dots q_n, \dots) \supset \langle x_0 \rangle$, wo

$$x_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k},$$

und also $\dim M_\infty \geqq \dim \langle x_0 \rangle = \liminf_{n\to\infty} \sigma_n$,

$$\sigma_n = \frac{\log \prod_{k=1}^{n} (\varepsilon_k + 1)}{\log \prod_{k=1}^{n} q_k}.$$

Es sei $\varepsilon > 0$. Auf Grund der Definition der Zahl l existiert n_0 derart, dass für $n > n_0$ $\sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)} < l + \varepsilon$ ist, und eine einfache Abschätzung ergibt

$$\sigma_n \geqq \frac{\log \{ \prod_{k \leqq n, k \in T_{[l]+1}} (\varepsilon_k + 1) \prod_{k \leqq n, k \in U_{[l]+1}} (\varepsilon_k + 1) \}}{n \log (l + \varepsilon)} \geqq$$

$$\geqq \frac{\log (2^{T_{[l]+1}(n)} \cdot l^{U_{[l]+1}(n)})}{n \log (l + \varepsilon)} = \frac{\log ((2/l)^{T_{[l]+1}(n)} \cdot l^n)}{n \log (l + \varepsilon)} =$$

$$= \frac{\log l}{\log (l + \varepsilon)} - \frac{T_{[l]+1}(n)}{n} \frac{\log l - \log 2}{\log (l + \varepsilon)},$$

daraus

$$\dim M_\infty \geqq \frac{\log l}{\log (l + \varepsilon)} - \delta_2(T_{[l]+1}) \frac{\log l - \log 2}{\log (l + \varepsilon)}$$

und in Hinsicht auf die Beliebigkeit von $\varepsilon > 0$ erhalten wir die Richtigkeit der Behauptung des Satzes.

Beispiel 2. Wir setzen $q_{10^k} = \max(k, 2)$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ und für $n \neq 10^k$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ setzen wir $q_n = 2$. Die derart definierte Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist unbeschränkt und hat die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$. Weiter ist ersichtlich für jedes n

$$\sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)} \geqq 2 \tag{8}$$

Auf der anderen Seite in der endlichen Folge $1, 2, \dots n$ $(n > e^2)$ befindet sich $[(\log n)/(\log 10)] \leqq \log n$ der Zahlen der Form 10^k und für jedes solche $10^k \leqq n$

ist $q_{10^k} \leqq \log n$. Daraus erhalten wir auf Grund der bekannten Beziehung zwischen dem arithmetischen und dem geometrischen Mittel der positiven Zahlen

$$\sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)} \leqq \frac{q_1 + q_2 + \dots + q_n}{n} \leqq \frac{2n + \log^2 n}{n}.$$

Daraus erhalten wir mit Rücksicht auf (8)

$$l = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \dots q_n)} = 2\,,$$

so dass der Folgerung des Satzes 5 gemäss $\dim M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots) = 1$ ist.

Der folgende Satz gibt im Falle, dass die Bedingung (6) erfüllt ist, eine untere und obere Abschätzung für

$$\dim M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots)\,.$$

Satz 6. *Die (unbeschränkte) Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ habe für jedes $\varepsilon > 0$ die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ und es gelte (6). Setzen wir bei natürlichem $s \geqq [l] + 1$*

$$R(n, s) = \frac{\log \prod\limits_{k \leqq n, k \in T_s} q_k}{\log \prod\limits_{k \leqq n} q_k}\,,$$

dann gilt

$$\sup_{s \geqq [l]+1} S_1(s) \leqq \dim M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots) \leqq \sup_{s \geqq [l]+1} S_2(s)\,,$$

wo

$$S_1(s) = \delta_1(U_s) \frac{\log (s + 1)}{\log l} + R_1(s)\,,$$

$$S_2(s) = \delta_2(U_s) \frac{\log (s + 1)}{\log l} + R_2(s)\,,$$

$$R_1(s) = \liminf_{n \to \infty} R(n, s)\,, \quad R_2(s) = \limsup_{n \to \infty} R(n, s)$$

Beweis. Die Voraussetzungen des Satzes seien erfüllt und es sei $s \geqq [l] + 1$ Wir definieren $\varepsilon_k = q_k - 1$ für $k \in T_s$ und $\varepsilon_k = s$ für $k \in U_s$. Wenn wir dann

$$x_s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{q_1 q_2 \dots q_k}$$

setzen, erhalten wir $M_s = \langle x_s \rangle$ und ersichtlich ist $M_\infty = \bigcup\limits_{s=[l]+1}^{\infty} M_s$. Daraus ist für jedes $s \geqq [l] + 1$ $\dim M_\infty \geqq \dim M_s = \dim \langle x_s \rangle$ und zugleich auf Grund des Lemma 4 der Arbeit [5] ist

$$\dim M_\infty \leqq \sup_{s \geqq [l]+1} \dim \langle x_s \rangle\,.$$

Auf Grund des Satzes 1 der Arbeit [6] ist dim $\langle x_s \rangle = \liminf_{n\to\infty} \sigma_n$,

$$\sigma_n = \frac{\log \prod_{k=1}^{n} (\varepsilon_k + 1)}{\log \prod_{k=1}^{n} q_k} =$$

$$= \frac{\log \prod_{k\leqq n, k\in T_s} q_k + \log \prod_{k\leqq n, k\in U_s} (s + 1)}{\log \prod_{k=1}^{n} q_k} = \frac{U_s(n) \log (s + 1)}{\log \prod_{k=1}^{n} q_k} + R(n, s) .$$

Deshalb ist

$$R_1(s) + \liminf_{n\to\infty} \frac{U_s(n) \log (s + 1)}{\log \prod_{k=1}^{n} q_k} \leqq \liminf \sigma_n \leqq \tag{9}$$

$$\leqq R_2(s) + \liminf_{n\to\infty} \frac{U_s(n) \log (s + 1)}{\log \prod_{k=1}^{n} q_k} .$$

Wenn jetzt $\varepsilon > 0$ ist, dann existiert auf Grund der Bedingung (6) $n_0(\varepsilon)$ derart, dass für jedes $n > n_0$ $\log \prod_{k=1}^{n} q_k < n \log (l + \varepsilon)$ ist, daraus folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \sigma_n \geqq R_1(s) + \liminf_{n\to\infty} \frac{U_s(n)}{n} \frac{\log (s + 1)}{\log (l + \varepsilon)} =$$

$$= R_1(s) + \delta_1(U_s) \frac{\log (s + 1)}{\log (l + \varepsilon)}$$

und da diese Ungleichheit für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, erhalten wir für jedes $s \geqq [l] + 1$

$$\dim M_\infty \geqq \delta_1(U_s) \frac{\log (s + 1)}{\log l} + R_1(s) = S_1(s) ,$$

deshalb

$$\dim M_\infty \geqq \sup_{s\geqq[l]+1} S_1(s) \tag{10}$$

Andererseits existieren auf Grund der Voraussetzung (6) zu jedem $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < l$ unendlich viele n derart, dass für diese n $\log \prod_{k=1}^{n} q_k > n \log (l - \varepsilon)$ ist. Dann ist für diese n

$$\frac{U_s(n) \log (s + 1)}{\log \prod_{k=1}^{n} q_k} \leqq \frac{U_s(n)}{n} \frac{\log (s + 1)}{\log (l - \varepsilon)}$$

und daraus

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{U_s(n)\log(s+1)}{\log\prod_{k=1}^{n} q_k} \leqq \limsup_{n\to\infty} \frac{U_s(n)}{n}\,\frac{\log(s+1)}{\log(l-\varepsilon)} = \delta_2(U_s)\,\frac{\log(s+1)}{\log(l-\varepsilon)}$$

und so, mit Rücksicht auf (9) und mit Rücksicht auf die Beliebigkeit von ε, $0 < \varepsilon < l$, erhalten wir ($s \geqq [l] + 1$):

$$\liminf_{n\to\infty} \sigma_n \leqq \delta_2(U_s)\,\frac{\log(s+1)}{\log l} + R_2(s) = S_2(s)\,,$$

also $\dim M_\infty \leqq \sup\limits_{s\geqq[l]+1} S_2(s)$ und dies ergibt zusammen mit (10)

$$\sup_{s\geqq[l]+1} S_1(s) \leqq \dim M_\infty \leqq \sup_{s\geqq[l]+1} S_2(s)\,.$$

Mit Hilfe der gerade bewiesenen Abschätzungen für $\dim M_\infty$ kann man eine gewisse Klasse von Folgen $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ angeben, für welche $0 < \dim M_\infty(q_1, q_2, \ldots \ldots q_n, \ldots) < 1$ ist (siehe die Folgerung nach dem Satz 7 und das Beispiel 3).

Satz 7. *Die (unbeschränkte) Folge $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ habe die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ für jedes $\varepsilon > 0$ und es gelte (6). Es sei*

$$P = \{p_1 < p_2 < \ldots < p_n < \ldots\} \subset N\,, \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\infty} q_{p_n} = +\infty$$

und für jedes $k \in Z = N - P$ sei $q_k = a \geqq 2$. Dann gilt

$$\frac{\log a}{\log a + \limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{\vartheta(n)}{n}} \leqq \dim M_\infty \leqq \frac{\log a}{\log a + \liminf\limits_{n\to\infty} \dfrac{\vartheta(n)}{n}}\,,$$

wo $\vartheta(n) = \sum\limits_{p_i\leqq n} \log q_{p_i}$ ist.

Folgerung. Wenn

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{\vartheta(n)}{n} \leqq \limsup_{n\to\infty} \frac{\vartheta(n)}{n} < +\infty\,,$$

dann ist $0 < \dim M_\infty < 1$.

Beweis des Satzes. Die Voraussetzungen des Satzes seien erfüllt. Auf Grund des Satzes 4 ist $\delta(P) = 0$ und also $\delta(Z) = 1$. Es sei $s > l = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \ldots q_n)}\ (\geqq a)$. Dann ist auf Grund der Voraussetzung des Satzes $U_s \subset P$ und also ist $\delta(U_s) = 0$. Deshalb haben wir nach der Folgerung des Satzes 6

$$\sup_{s\geqq[l]+1} R_1(s) \leqq \dim M_\infty \leqq \sup_{s\geqq[l]+1} R_2(s)\,. \tag{12}$$

Es sei weiter erwägen, dass in der Folgerung der Voraussetzung (11) nur eine endliche Anzahl von Elementen der Menge P existiert, welche zu T_s gehören und es ist also

$$\log \prod_{k \leqq n, k \in T_s} q_k \sim Z(n) \log a \,, \quad \text{wenn} \quad n \to \infty \; ^1)$$

Weiter ist ersichtlich $\log \prod_{k=1}^{n} q_k = Z(n) \log a + \vartheta(n)$ und also

$$R(n, s) \sim \frac{Z(n) \log a}{Z(n) \log a + \vartheta(n)} \quad (n \to \infty)$$

Wenn wir (12) berücksichtigen, ist daraus schon die Richtigkeit der Behauptung des Satzes ersichtlich.

Beispiel 3. Wir wählen als Menge P die Menge aller Primzahlen p_n, $n = 1, 2, \ldots$ und setzen $q_{p_n} = p_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $q_k = a \geqq 2$ für $k \neq p_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Die so definierte Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ ist unbeschränkt und wir werden zeigen, dass sie für jedes $\varepsilon > 0$ die Eigenschaft $V(\varepsilon)$ hat. Es sei also $\varepsilon > 0$; ersichtlich genügt es zu zeigen, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k}{(q_1 q_2 \ldots q_{p_k})^{\varepsilon}} \tag{13}$$

konvergiert. Wenn π die Primzahlfunktion bedeutet, dann erhalten wir durch eine einfache Abschätzung

$$\frac{p_k}{(q_1 q_2 \ldots q_{p_k})^{\varepsilon}} \leqq \frac{p_k}{(a^{p_k - \pi(p_k)})^{\varepsilon}} \,.$$

Auf Grund einer aus der Zahlentheorie bekannten Tatsache $(\pi(p_k) = o(p_k))$ existiert k_1 derart, dass für alle $k > k_1$

$$\frac{p_k}{(q_1 q_2 \ldots q_{p_k})^{\varepsilon}} < \frac{p_k}{(a^{\varepsilon/2})^{p_k}} = \frac{p_k}{b^{p_k}}$$

$(b = a^{\varepsilon/2} > 1)$ ist. Daraus ist die Konvergenz der Reihe (13) ersichtlich.

Wir rechnen nun $l = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \ldots q_n)}$. Ersichtlich gilt

$$\sqrt[n]{(q_1 q_2 \ldots q_n)} = \sqrt[n]{a^{n - \pi(n)}} \sqrt[n]{\prod_{p \leqq n, p \in P} p} = a^{1 - \pi(n)/n} \,.\, e^{\vartheta(n)/n}, \quad \vartheta(n) = \sum_{p \leqq n, p \in P} \log p \,.$$

Aus der Primzahltheorie ist bekannt (siehe [7] S. 7 und 67), dass $\pi(n)/n \to 0$, $\vartheta(n)/n \to 1$, wenn $n \to \infty$, also

$$l = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{(q_1 q_2 \ldots q_n)} = ae < +\infty \,.$$

---

^{1}) $a_n \sim b_n$ $(n \to \infty)$ bedeutet $\lim_{n \to \infty} (a_n/b_n) = 1$.

Auf Grund des Satzes 7 erhalten wir den genauen Wert der Dimension von M_∞:

$$\dim M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots) = \frac{\log a}{1 + \log a}.$$

Literatur

[1] *O. Perron:* Irrationalzahlen, Berlin-Leipzig, 1921.

[2] *А. Хинчин:* Ценные дробы, Москва 1961.

[3] *V. Jarník:* Zur metrischen Theorie der diophantischen Approximationen, Prace matematyczno-fizyczne, *XXXVI* (1928—1929), 91—106.

[4] *A. Rényi:* A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle elöállításaiban, Mat. Lap. *7* (1956), 77—100.

[5] *Т. Шалат:* О мере Хаусдорфа линейных множеств, Чех. мат. ж. *11* (*86*), (1961), 24—56.

[6] *T. Šalát:* Cantorsche Entwicklungen der reellen Zahlen und das Hausdorffsche Mass, Publ. of the Math. Inst. of the Hung. Acad. of Sci. *VI*, (1961), 15—41.

[7] *E. Trost:* Primzahlen (russische Übersetzung) Moskau, 1959.

Резюме

О ХАУСДОРФОВСКОЙ РОЗМЕРНОСТИ МНОЖЕСТВА ЧИСЕЛ С ОГРАНИЧЕНЫМИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯМИ ЦИФР В РЯДАХ КАНТОРА

ТИБОР ШАЛАТ (Tibor Šalát), Братислава

Пусть $\{q_k\}_{k=1}^\infty$ последовательность натуральных чисел, причем $q_k > 1$ и пусть $\limsup q_k = +\infty$.

Всякое $x \in (0, 1)$ можно разложить в ряд Кантора

$$x = \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon_k(x)}{q_1, q_2 \dots q_k},$$

где $\varepsilon_k(x)$ принимает целые значения, $0 \leqq \varepsilon_k(x) < q_k$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ и для бесконечно много k верно неравенство $\varepsilon_k(x) < q_k - 1$. Числа $\varepsilon_k(x)$ мы называем цифрами числа x. На основе результантов А. Рени о рядах Кантора можно легко показать (см. теорема 1), что множество M_∞ $(q_1, q_2, \dots q_n, \dots)$ всех тех чисел $x \in (0,1)$, для которых $\limsup_{k\to\infty} \varepsilon_k(x) < +\infty$, имеет меру Лебега равну 0. Автор в настоящей стати рассматривает величину хаусдорфовской размерности множества M_∞ $(q_1, q_2, \dots q_n, \dots)$ при различных последовательностях $\{q_k\}_{k=1}^\infty$. Все результаты выведены при следующих предположениях о последовательности $\{q_k\}_{k=1}^\infty$:

1) $\limsup\limits_{k\to\infty} q_k = +\infty$

2) для всякого $\varepsilon > 0$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{(q_1 q_2 \dots q_n)^{\varepsilon}} < +\infty$

При этих предположениях автор показал, что $\dim M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots) = 0$ тогда и только тогда, если

(A) $\limsup \sqrt[n]{(q_1 \cdot q_2 \dots q_n)} = +\infty$

Если $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ неудоблетворяет условию (A), то автор выводит некоторые оценки для $\dim M_\infty(q_1, q_2, \dots q_n, \dots)$.