Ladislav Procházka

Заметка о квази-изоморфизме групп без кручения конечного ранга

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 15 (1965), No. 1, 1–8

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100648

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Математический институт Чехословацкой Академии наук

Т. *15* (*90*) ПРАГА 19. III. 1965 г., No 1

ЗАМЕТКА О КВАЗИ-ИЗОМОРФИЗМЕ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ КОНЕЧНОГО РАНГА

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

(Поступило в редакцию 11/V 1962 г.)

В этой заметке решается положительно один вопрос, поставленный в статье [1].

В конце статьи [1] сформулирован следующий вопрос: Пусть A — абелева группа без кручения конечного ранга n, содержащая такую свободную подгруппу F ранга n, что максимальная полная подгруппа p-примарного слагаемого периодической группы A/F обладает для каждого простого числа p рангом не меньшим чем $n - 1$. Можно тогда утверждать, что каждая квази-изоморфная с A группа уже изоморфна A? В этой заметке покажем, что ответ на этот вопрос положителен.

В следующих рассуждениях мы будем пользоваться результатами из [3] и [4], следовательно, понятия как p-число, p-матрица, p-примитивная подгруппа, p-матрица некоторой p-примитивной подгруппы, каноническая p-матрица и т. д., которые определены в [3] (см. также [4], § 1), будем считать известными; притом будем пользоваться обозначениями из [4], которые не отличаются по существу от обозначений из [3]. Кроме того, условимся под словом группа всюду понимать аддитивно записанную абелеву группу.

Определение. Пусть G — группа без кручения конечного ранга r. Группу G будем называть BP-группой, если она содержит такую свободную подгруппу U ранга r, что для каждого простого числа p имеет место неравенство

$$(1) \qquad r_p^*(G/U) \geqq r - 1 ;$$

здесь символом $r_p^*(G/U)$ обозначаем ранг максимальной полной подгруппы p-примарного слагаемого периодической группы G/U.

Если символ $r_p(G)$ представляет p-ранг группы без кручения конечного ранга G (см. [4], определение 3), то из предшествующего определения в силу теоремы 4 из [4] следует

Лемма 1. *Группа без кручения G конечного ранга r является BP-группой в точности тогда, когда для каждого простого числа p будет $r_p(G) \geqq r - 1$, или, если неравенство* (1) *имеет место для каждого p и для каждой свободной подгруппы U ранга r.*

Ещё напомним, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 2. *Если группа без кручения конечного ранга G является BP-группой, то BP-группой будет и всякая подгруппа H конечного индекса в G.*

Доказательство. Так как H — подгруппа конечного индекса в G, то по теореме 5 из [4] для каждого простого числа p будет $r_p(H) = r_p(G)$. Теперь достаточно применить лемму 1.

Если G — группа без кручения, то под базисом группы G будем понимать произвольное максимальное в G семейство линейно независимых элементов.

Теорема 1. *Пусть G — группа без кручения конечного ранга r, являющаяся BP-группой, и пусть H — такая подгруппа в G, что $G/H \cong \mathscr{C}(p_1)$, где p_1 — простое число. Тогда $G \cong H$.*

Доказательство. При доказательстве теоремы воспользуемся результатами из [3]. Именно, найдем базис группы G, базис её подгруппы H и систему p-матриц (в [3] говорится о системе p_i-матриц) такую, что она будет системой p-матриц группы G относительно базиса, выбранного в G, и одновременно системой p-матриц группы H относительно базиса, выбранного в H. Этим будет доказано, что группы G и H изоморфны (см. [3], теорема 6).

Пусть $B = (x_1, x_2, \ldots, x_r)$ — произвольный базис группы H, пусть $p_1, p_2, \ldots$ — последовательность всех (положительных) простых чисел, и пусть

$$[\mathfrak{M}^{(p_1)}, \mathfrak{M}^{(p_2)}, \ldots, \mathfrak{M}^{(p_i)}, \ldots] \tag{2}$$

— некоторая система p-матриц группы H относительно базиса B. Притом будем предполагать, что p_1-матрица $\mathfrak{M}^{(p_1)}$ представлена в каноническом виде (см. формулу (1,8) из [4]); такое предположение допустимо, как показывает теорема 5 из [3]. Очевидно, B служит одновременно базисом для группы G, и нашей ближайшей целью будет определение некоторой системы p-матриц всей группы G относительно базиса B.

Положим $\{B\} = \{x_1\} \dotplus \{x_2\} \dotplus \ldots \dotplus \{x_r\} = U$ и для каждого простого числа p символом $\Gamma^{(p)}(G; B)$ (соотв. $\Gamma^{(p)}(H; B)$) обозначим множество всех элементов $g \in G$ (соотв. $g \in H$) таких, что для удобного неотрицательного числа k будет $p^k g \in U$; ясно, что только-что определенные множества являются подгруппами. Притом подгруппа $\Gamma^{(p)}(G; B)$ (соотв. $\Gamma^{(p)}(H; B)$) служит в точности p-примитивной подгруппой группы G (соотв. H) относительно базиса B.

Если положим $\tilde{G} = G/U$ и $\tilde{H} = H/U$ и если символом $\tilde{G}^{(p)}$ (соотв. $\tilde{H}^{(p)}$)

обозначим p-примарное слагаемое периодической группы $\tilde{G}$ (соотв. $\tilde{H}$), то из изоморфизма

$$\mathscr{C}(p_1) \cong G/H \cong (G/U)/(H/U) = \tilde{G}/\tilde{H}$$

следуют равенства

$$\tilde{G}^{(p_i)} = \tilde{H}^{(p_i)} \quad (i = 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

и соотношение

$$\mathscr{C}(p_1) \cong \tilde{G}^{(p_1)}/\tilde{H}^{(p_1)} . \tag{4}$$

Так как для каждого простого числа p имеем

$$\tilde{G}^{(p)} = \Gamma^{(p)}(G; B)/U , \quad \tilde{H}^{(p)} = \Gamma^{(p)}(H; B)/U ,$$

то из (3) получим

$$\Gamma^{(p_i)}(G; B) = \Gamma^{(p_i)}(H; B) \quad (i = 2, 3, \ldots) , \tag{5}$$

и из (4) по второй теореме об изоморфизме вытекает

$$\mathscr{C}(p_1) \cong \Gamma^{(p_1)}(G; B)/\Gamma^{(p_1)}(H; B) . \tag{6}$$

Так как G является по предположению BP-группой, то в силу леммы 1 будет $r_{p_1}(G) \geqq r - 1$, значит, либо $r_{p_1}(G) = r - 1$, либо $r_{p_1}(G) = r$. Но если бы было $r_{p_1}(G) = r$, то по теоремам 4 и 1 из [4] группа $\tilde{G}^{(p_1)}$ должна была бы быть полной; это невозможно, так как полная группа $\tilde{G}^{(p_1)}$ не содержала бы подгруппы $\tilde{H}^{(p_1)}$ удовлетворяющей соотношению (4). Итак, $r_{p_1}(G) = r - 1$ и одновременно $r_{p_1}(H) = r - 1$ (см. лемму 2 и её доказательство). Отсюда в силу теоремы 3 из [4] следует, что каноническая p_1-матрица $\mathfrak{M}^{(p_1)}$ имеет вид

$$\mathfrak{M}^{(p_1)} = \begin{vmatrix} \mathfrak{p}_\infty(p_1), & 0, & \ldots, & 0, & \mathfrak{a}_1(p_1) \\ 0, & \mathfrak{p}_\infty(p_1), & \ldots, & 0, & \mathfrak{a}_2(p_1) \\ \hdotsfor{5} \\ 0, & 0, & \ldots, & \mathfrak{p}_\infty(p_1), & \mathfrak{a}_{r-1}(p_1) \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \mathfrak{p}_n(p_1) \end{vmatrix} , \tag{7}$$

где n — целое неотрицательное число и $\mathfrak{a}_i(p_1)$ $(i = 1, 2, \ldots, r - 1)$ — удобные целые p_1-адические числа, представленные в виде последовательностей целых рациональных чисел: $\mathfrak{a}_i(p_1) = (a_i^{(j)})_{j=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, r - 1)$. По предположению, (2) служит системой p-матриц группы H относительно базиса B, следовательно, в H существуют элементы

$$g_i^{(j)} = \frac{1}{p_1^j}(x_i + a_i^{(j)} x_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, r - 1;\ j = 1, 2, \ldots) \tag{8}$$

и элемент $(1/p_1^n)\,x_r$ такие, что имеет место формула (см. [3], § 2 и § 3, замечание 1, или, см. [4], § 1)

$$\Gamma^{(p_1)}(H; B) = \{g_i^{(j)}\,(i = 1, \ldots, r-1;\; j = 1, 2, \ldots),\, g_n\}\,, \tag{9}$$

где $g_n = (1/p_1^n)\,x_r$.

Если $\tilde{D}^{(p_1)}$ – максимальная полная подгруппа группы $\tilde{H}^{(p_1)}$, то из изоморфизма (4) следует, что $\tilde{D}^{(p_1)}$ служит одновременно максимальной полной подгруппой для всей группы $\tilde{G}^{(p_1)}$. Тогда в силу теоремы 1 из [4] должно быть

$$\Gamma^{(p_1)}(G; B)/U = \tilde{G}^{(p_1)} = \tilde{D}^{(p_1)} \dotplus \{\tilde{y}\}\,, \tag{10}$$

где $p_1 \leqq 0(\tilde{y}) = p_1^h$. Можно убедиться в том, что в точности выполнено (см. [4], доказательство теоремы 2)

$$\begin{aligned}\tilde{D}^{(p_1)} &= \{g_i^{(j)}\,(i = 1, \ldots, r-1;\; j = 1, 2, \ldots),\, U\}/U = \\ &= \{g_i^{(j)}\,(i = 1, \ldots, r-1;\; j = 1, 2, \ldots),\, x_r\}/U\,.\end{aligned} \tag{11}$$

Итак, если $y \in \Gamma^{(p_1)}(G; B)$ – такой элемент, что $\tilde{y} = y + U$, то из (11) и (10) уже следует равенство

$$\Gamma^{(p_1)}(G; B)/U = \{g_i^{(j)}\,(i = 1, \ldots, r-1;\; j = 1, 2, \ldots),\, x_r,\, y\}/U\,,$$

или, также равенство

$$\Gamma^{(p_1)}(G; B) = \{g_i^{(j)}\,(i = 1, \ldots, r-1;\; j = 1, 2, \ldots),\, x_r,\, y\}\,. \tag{12}$$

Так как $0(\tilde{y}) = p_1^h$, то $p_1^h y \in U$, или,

$$y = \frac{1}{p_1^h}\,(b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_rx_r), \tag{13}$$

где b_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ – целые рациональные числа. Если положим

$$b = b_r - \sum_{i=1}^{r-1} b_i a_i^{(h)}\,,$$

то из (13) и (8) следует соотношение

$$y - \sum_{i=1}^{r-1} b_i g_i^{(h)} = \frac{b}{p_1^h}\,x_r \in \Gamma^{(p_1)}(G; B)\,;$$

следовательно, в силу (12) можно писать

$$\Gamma^{(p_1)}(G; B) = \left\{g_i^{(j)}\,(i = 1, \ldots, r-1;\; j = 1, 2, \ldots),\, \frac{b}{p_1^h}\,x_r,\, x_r\right\}. \tag{14}$$

Пусть $b = p_1^k b'$, где $k \geqq 0$ и $(b', p_1) = 1$. Тогда должно быть $k < h$, так как в противном случае можно было бы писать вместо (14)

$$\Gamma^{(p_1)}(G; B) = \{g_i^{(j)}\,(i = 1, \ldots, r-1; j = 1, 2, \ldots), x_r\},$$

или, по (11), $\tilde{G}^{(p_1} = \tilde{D}^{(p_1)}$, и это противоречит соотношению (10), где $\{\tilde{y}\} \neq (0)$. Итак, если положим $m = h - k$, то по (14) имеем

$$\Gamma^{(p_1)}(G; B) = \left\{g_i^{(j)}\,(i = 1, \ldots, r-1; j = 1, 2, \ldots), \frac{1}{p_1^m} x_r\right\}. \tag{15}$$

Из формул (15) и (8) можно легко вывести, что в качестве p_1-матрицы p_1-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p_1)}(G; B)$ можно взять матрицу $\mathfrak{M}_1^{(p_1)}$ вида

$$\mathfrak{M}_1^{(p_1)} = \begin{bmatrix} \mathfrak{p}_\infty(p_1), & 0, & \ldots, & 0, & \mathfrak{a}_1(p_1) \\ 0, & \mathfrak{p}_\infty(p_1), & \ldots, & 0, & \mathfrak{a}_2(p_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & \mathfrak{p}_\infty(p_1), & \mathfrak{a}_{r-1}(p_1) \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \mathfrak{p}_m(p_1) \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Необходимо будет $m > n$, так как в другом случае из формул (15) и (9) следовало бы соотношение $\Gamma^{(p_1)}(G; B) \subseteqq \Gamma^{(p_1)}(H; B)$, или, равенство $\Gamma^{(p_1)}(G; B) = \Gamma^{(p_1)}(H; B)$, и это противоречит формуле (6).

Из равенств (5) и из того факта, что (2) служит системой p-матриц группы H относительно базиса B, следует, что для каждого $p_i\,(i = 2, 3, \ldots)$ p_i-матрица $\mathfrak{M}^{(p_i)}$ является p_i-матрицей подгруппы $\Gamma^{(p_i)}(G; B)$. Итак, если положим $\mathfrak{M}_1^{(p_i)} = \mathfrak{M}^{(p_i)}\,(i = 2, 3, \ldots)$ и если $\mathfrak{M}_1^{(p_1)}$ — матрица (16), то система матриц

$$[\mathfrak{M}_1^{(p_1)}, \mathfrak{M}_1^{(p_2)}, \ldots, \mathfrak{M}_1^{(p_i)}, \ldots] \tag{17}$$

служит системой p-матриц для группы G относительно базиса B.

Теперь положим $t = m - n$ и напомним, что для каждого i $(i = 2, 3, \ldots)$ числа p_1^t и p_1^{-t} являются целыми p_i-адическими числами, значит, p_1^t является регулярным целым p_i-адическим числом. Далее, обозначим

$$B' = (p_1^t x_1, p_1^t x_2, \ldots, p_1^t x_{r-1}, x_r)$$

и кроме того

$$B^* = (p_1^t x_1, p_1^t x_2, \ldots, p_1^t x_{r-1}, p_1^t x_r).$$

Как было доказано в [3] (см. [3], § 8, преобразование типа 3)), если $\mathfrak{M}^{(p_1)}$ — p_1-матрица p_1-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p_1)}(H; B)$, то p_1-матрица

$$\overline{\mathfrak{M}}^{(p_1)} = \begin{bmatrix} \mathfrak{p}_\infty(p_1), & 0, & \ldots, & 0, & p_1^t\,\mathfrak{a}_1(p_1) \\ 0, & \mathfrak{p}_\infty(p), & \ldots, & 0, & p_1^t\,\mathfrak{a}_2(p_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & \mathfrak{p}_\infty(p_1), & p_1^t\,\mathfrak{a}_{r-1}(p_1) \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \mathfrak{p}_n(p_1) \end{bmatrix}$$

является p_1-матрицей подгруппы $\Gamma^{(p_1)}(H; B')$, и по тем же причинам (применяем формулы для преобразований из [3] к базисам B' и B^* и к p_1-матрице $\overline{\mathfrak{M}^{(p_1)}}$) служит матрица

$$\mathfrak{M}_*^{(p_1)} = \begin{bmatrix} \mathfrak{p}_\infty(p_1), & 0, & \ldots, & 0, & \mathfrak{a}_1(p_1) \\ 0, & \mathfrak{p}_\infty(p_1), & \ldots, & 0, & \mathfrak{a}_2(p_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & \mathfrak{p}_\infty(p_1), & \mathfrak{a}_{r-1}(p_1) \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & \mathfrak{p}_{n+t}(p_1) \end{bmatrix}$$

p_1-матрицей для p_1-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p_1)}(H; B^*)$ группы H. Так как $n + t = m$, то $\mathfrak{M}_*^{(p_1)} = \mathfrak{M}_1^{(p_1)}$ (см. 16), значит, мы этим доказали, что $\mathfrak{M}_1^{(p_1)}$ является p_1-матрицей подгруппы $\Gamma^{(p_1)}(H; B^*)$.

Пусть теперь i – некоторое из чисел $2, 3, \ldots$. Так как $\mathfrak{M}^{(p_i)}$ является по предположению p_i-матрицей p_i-примитивной подгруппы $\Gamma^{(p_i)}(H; B)$, то по [3] (см. [3], § 8, преобразование типа 3)) p_i-матрица $\mathfrak{M}_*^{(p_i)}$, которая возникла из $\mathfrak{M}^{(p_i)}$ умножением всех столбцов на регулярное целое p_i-адическое число p_1^{-t}, служит p_i-матрицей подгруппы $\Gamma^{(p_i)}(H; B^*)$. Но если умножим все строки матрицы $\mathfrak{M}_*^{(p_i)}$ на регулярное целое p_i-адическое число p_1^t, то получим опять p_i-матрицу $\mathfrak{M}^{(p_i)}$, которая должна быть по [3] (см. [3], § 6, преобразование α) p_i-матрицей подгруппы $\Gamma^{(p_i)}(H; B^*)$. Так как $\mathfrak{M}^{(p_i)} = \mathfrak{M}_1^{(p_i)}$ $(i = 2, 3, \ldots)$, то этим полностью доказано, что (17) является системой p-матриц для группы H относительно базиса B^*.

Система (17) служит системой p-матриц для группы G относительно базиса B и одновременно для группы H относительно базиса B^*, значит, группы G и H изоморфны.

Замечание. В доказательстве предществующей теоремы можно было не пользоваться теоремой 6 из [3], так как если (17) служит системой p-матриц для группы G (относительно некоторого её базиса) и одновременно для группы H (относительно некоторого базиса), то эти группы обладают системами образующих, удовлетворяющих тем же соотношениям.

Теорема 2. *Пусть G – группа без кручения конечного ранга, являющаяся BP-группой, и пусть H – подгруппа конечного индекса в G. Тогда $G \cong H$.*

Доказательство. Теорему докажем полной индукцией по длине композиционного ряда конечной группы G/H, пользуясь теоремой 1.

Определение. Если G и H – группы без кручения конечного ранга, то они называются квази-изоморфными, если в G существует подгруппа G' конечного индекса такая, что $G' \cong H$ (см. [1]).

Замечание. Из теоремы 2.4 из [2] следует, что для групп без кручения конечного ранга совпадает только-что определенное понятие квази-изоморфизма с понятием почти-изоморфизма, введенным Б. Йонссоном в [2].

Теорема 3. *Пусть G и H — группы без кручения конечного ранга. Если одна из этих групп является BP-группой, то эти группы квази-изоморфны в точности тогда, когда они изоморфны.*

Доказательство. Теорема является простым следствием теоремы 2 и определения квази-изоморфизма.

Группа без кручения конечного ранга называется слабо разложимой, если она квази-изоморфна некоторой группе, разложимой в прямую сумму; если такая группа не является слабо разложимой, то она называется строго неразложимой.

Следствие. *Пусть G — группа без кручения конечного ранга, являющаяся BP-группой. Группа G строго неразложима в точности тогда, когда она неразложима в прямую сумму.*

Так как существуют в прямую сумму неразложимые BP-группы произвольного конечного ранга (см. [4], теорема 10), то существуют строго неразложимые группы без кручения произвольного конечного ранга.

Замечание. Если ослабим условия, накладываемые на BP-группу, чтобы для каждого простого числа p имело место неравенство $r_p(G) \geqq r - 1$ (см. лемму 1), то теорема 3 не будет больше справедливой, как показывает пример:

Пусть $p_1, p_2, p_3, \ldots$ — последовательность всех простых чисел, пусть $\chi_1 = (0, 0, \infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$, $\chi_2 = (0, \infty, 0, \infty, \infty, \ldots, \infty, \ldots)$ — две характеристики, и пусть J_1, J_2 — такие группы без кручения ранга 1, что существуют элементы $x_i \in J_i$, обладающие в J_i характеристикой χ_i $(i = 1, 2)$. Если положим $H = J_1 \dotplus J_2$ и $G = \{H, y\}$, где $p_1 y = x_1 + x_2$, то можно доказать, что группа G неразложима в прямую сумму. Это значит, что группы G, H неизоморфны, но квази-изоморфны, так как $G/H \cong \mathscr{C}(p_1)$. Притом $r_{p_i}(H) \geqq 1 = r - 1$ $(i = 2, 3, \ldots)$ и $r_{p_1}(H) = 0 = r - 2$.

Литература

[1] *R. A. Beaumont* and *R. S. Pierce:* Torsion free groups of rank two, Memoirs Amer. Math. Soc., 1961.

[2] *B. Jónsson:* On direct decomposition of torsion free abelian groups, Math. Scand., *7*, 1959, 361—371.

[3] *А. Мальцев:* Абелевы группы конечного ранга без кручения, Мат. сб. *4* (46), 1938, 45—68.

[4] *Л. Прохазка:* О p-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга, Чехослов. мат. ж., *12* (*87*), 1962, 3—43.

Summary

A NOTE ON QUASI-ISOMORPHISM OF TORSION FREE ABELIAN GROUPS OF FINITE RANK

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

By a group we understand always a torsion free abelian group of finite rank. If G is such a group, then $r_p(G)$ denotes the p-rank of G (see [4], definition 3), p being a prime. A group G of rank r is said to be a BP-group if $r_p(G) \geqq r - 1$ for every prime p. According to [1] two groups G and H are called quasi-isomorphic if there exists a subgroup $G' \subseteq G$ such that $G' \cong H$ and G' is of finite index in G. Using these concepts the following theorem is proved:

Theorem 3. *Let G, H be two groups, G a BP-group. Then G and H are quasi-isomorphic if and only if they are isomorphic.*