Čestmír Vitner

Кривые в пространствах с неособой псевдоевклидовой метрикой произвольного индекса

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 14 (1964), No. 2, 243–253

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100616`

Чехословацкий математический журнал, т. 14 (89) 1964, Прага

КРИВЫЕ В ПРОСТРАНСТВАХ С НЕОСОБОЙ ПСЕВДОЕВКЛИДОВОЙ МЕТРИКОЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ИНДЕКСА

ЧЕСТМИР ВИТНЕР (Čestmír Vitner), Прага

(Поступило в редакцию 29/VI 1962 г.)

Работа посвящается дифференциальной геометрии кривых в псевдоевклидовых и центро-псевдоевклидовых пространствах с произвольным индексом. Помимо иных результатов здесь приводятся выражения в явном виде для сопровождающего n-эдра и для кривизн как в общих, так и в исключительных точках кривой.

1. КРИВЫЕ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть мы имеем псевдоевклидово n-мерное простpнаство с неособой метрикой произвольного индекса (следовательно, метрика может быть определенной и неопределенной). Скалярное произведение векторов a, b мы обозначим через (a, b).

В этом пространстве рассмотрим кривую $r(t)$ класса n такую, что векторы $r', r'', \ldots, r^{(n)}$ линейно независимы. Предположим кроме того, что соприкасающиеся подпространства $\{r'\}, \{r', r''\}, \ldots, \{r', \ldots, r^{(k)}\}, \ldots, \{r', \ldots, r^{(n)}\}$ не являются изотропными. (В пространствах индекса 1 предположения о неизотропности в случае $(r', r') < 0$ выполняются автоматически – см. [2] – и следовательно, достаточно допустить, помимо $(r', r') < 0$, линейную независимость векторов $r', \ldots, r^{(n)}$. Известно [1], что с точки зрения теории относительности нас интересуют лишь кривые с $(r', r') < 0$.)

Пользуясь ортогональным процессом Э. Шмидта (см. [2]), построим из векторов $r', \ldots, r^{(n)}$ ортонормальный n-эдр ${}^t e_0, {}^t e_1, \ldots, {}^t e_{n-1}$, относительно которого справедлива следующая теорема.

Теорема 1,1. *Имеет место*

$$(1,1) \qquad {}^t e_{k-1} = \frac{{}^t\varepsilon_{k-1}{}^t U_k}{|{}^t D_{k-1}{}^t D_k|^{1/2}}\,, \quad k = 1, \ldots, n\,,$$

где

$$(1,2)\qquad {}^tD_k = \begin{vmatrix} (r', r'), & \dots, (r', r^{(k)}) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ (r^{(k)}, r'), & \dots, (r^{(k)}, r^{(k)}) \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n, \ {}^tD_0 = 1,$$

$$(1,3)\qquad {}^tU_k = \begin{vmatrix} (r', r'), & \dots, (r', r^{(k-1)}), r' \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ (r^{(k)}, r'), & \dots, (r^{(k)}, r^{(k-1)}), r^{(k)} \end{vmatrix}, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$(1,4)\qquad \varepsilon_k = \operatorname{sgn} {}^tD_k .$$

Доказательство непосредственно следует из соотношений, приведенных в [2].

Для производных от векторов ${}^te_0, {}^te_1, \dots, {}^te_{k-1}$ справедливы формулы

$$(1,5)\qquad \begin{aligned} {}^te_0' &= {}^t\kappa_1 {}^te_1 , \\ {}^te_1' &= - {}^t\alpha_0 {}^t\alpha_1 {}^t\kappa_1 {}^te_0 + {}^t\kappa_2 {}^te_2 , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ {}^te_{k-1}' &= - {}^t\alpha_{k-2} {}^t\alpha_{k-1} {}^t\kappa_{k-1} {}^te_{k-2} + {}^t\kappa_k {}^te_k , \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ {}^te_{n-1}' &= - {}^t\alpha_{n-2} {}^t\alpha_{n-1} {}^t\kappa_{n-1} {}^te_{n-2} . \end{aligned}$$

Притом ${}^t\alpha_k = ({}^te_k, {}^te_k)$, т.е. 1 или -1, смотря по тому, имеет ли единичный вектор k-ой нормали ${}^te_k$ действительную или мнимую длину. (См. [1], где формулы (1,5) были выведены для специального параметра; они справедливы, и в общем случае.)

Согласно [2] имеем

$$(1,6)\qquad {}^t\alpha_k = {}^t\varepsilon_k {}^t\varepsilon_{k+1} .$$

Для величин ${}^t\kappa_1, \dots, {}^t\kappa_{n-1}$ мы выведем в следующей теореме формулы в явном виде.

Теорема 1,2. *Для* ${}^t\kappa_k$ *имеют место соотношения*

$$(1,7)\qquad {}^t\kappa_k = \frac{|{}^tD_{k-1} {}^tD_{k+1}|^{1/2}}{|{}^tD_k|}, \quad k = 1, \dots, n-1 .$$

Доказательство аналогично доказательству подобной теоремы для евклидовых, соответственно центроевклидовых пространств (см. [4]), нужно только обратить внимание на знаки. Проведем это доказательство.

Согласно (1,5) имеет, очевидно, место ${}^t\kappa_k = ({}^te_{k-1}', {}^te_k)\, {}^t\alpha_k$. Для ${}^te_{k-1}'$ нетрудно получить

$${}^te_{k-1}' = {}^t\varepsilon_{k-1} \left\{ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{|{}^tD_{k-1} {}^tD_k|^{1/2}} \cdot {}^tU_k + \frac{1}{|{}^tD_{k-1} {}^tD_k|^{1/2}} \left(\dots + {}^tD_{k-1} r^{(k+1)} \right) \right\},$$

где члены с производными $r', \ldots, r^{(k)}$ опущены, так как они для нас в дальнейшем не имеют значения. Ввиду того, что ${}^te_k$ ортогонально к $r', \ldots, r^{(k)}$, мы получим

$$\begin{aligned}{}^t\kappa_k &= {}^t\alpha_k({}^te'_{k-1}, {}^te_k) = {}^t\alpha_k{}^t\varepsilon_{k-1}\frac{1}{|{}^tD_{k-1}{}^tD_k|^{1/2}} \cdot {}^tD_{k-1} \cdot r^{(k+1)} \cdot {}^te_k = \\ &= {}^t\alpha_k{}^t\varepsilon_{k-1}\frac{1}{|{}^tD_{k-1}{}^tD_k|^{1/2}} \cdot {}^tD_{k-1}\frac{{}^t\varepsilon_k{}^tD_{k+1}}{|{}^tD_k{}^tD_{k+1}|^{1/2}} = \\ &= {}^t\alpha_k{}^t\varepsilon_{k-1}{}^t\varepsilon_k{}^t\varepsilon_{k-1}{}^t\varepsilon_{k+1}\frac{|{}^tD_{k-1}{}^tD_{k+1}|^{1/2}}{|{}^tD_k|} .\end{aligned}$$

Отсюда ввиду (1,6) следует окончательно ${}^t\kappa_k = |{}^tD_{k-1}{}^tD_{k+1}|^{1/2}/|{}^tD_k|$, что и требовалось доказать.

Теоремы 1,1 и 1,2 справедливы, очевидно, и в том случае, когда индекс пространства равен нулю, т. е. в случае евклидова пространства, представляя тогда более или менее известные результаты. (См. например В. Бляшке, Math. Zeitsch. 6, 1920, стр. 94—99, где рассматриваются кривые в римановом пространстве с положительно определенной метрикой; в качестве специального параметра там используется дуга.)

Покажем теперь, как величины ${}^te_k$ и ${}^t\kappa_k$ зависят от выбора параметра на кривой. Справедлива

Теорема 1,3. *При преобразовании параметра* $t = t(\tau)$ ($\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$ *отлично от нуля*) *имеет место*

(1,8) $$ {}^te_{k-1} = \left(\operatorname{sgn}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^k {}^\tau e_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n, $$

(1,9) $$ {}^t\kappa_k = {}^\tau\kappa_k\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right|, \quad k = 1, \ldots, n-1 . $$

Доказательство. Подобно тому, как в [3], соотв. [4] можно вывести формулы

$$ {}^tU_k = {}^\tau U_k\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^{2[1+\ldots+(k-1)]+k}, \quad {}^tD_k = {}^\tau D_k\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^{2(1+\ldots+k)} . $$

Подставляя эти выражения в (1,1) и (1,7), мы получим формулы (1,8) и (1,9), если учесть, что ${}^t\varepsilon_k = {}^\tau\varepsilon_k$.

Из формулы (1,8) видно, что у ориентированных кривых векторы ${}^te_k$ не зависят от параметризации. Тогда мы говорим о *сопровождающем ортонормальном n-эдре* $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ ориентированной кривой. Далее из (1,8) следует, что при изменении ориентации кривой четные нормали e_k изменяют свою ориентацию, а нечетные ее не меняют.

Если бы мы как-либо изменили ориентацию векторов e_k, мы получили бы снова ортонормальный n-эдр. Наш подход имел ту выгоду, что для нахождения сопровождающего n-эдра можно использовать однозначно определенный метод (т. е. процесс ортогонализации Э. Шмидта), причем величины ${}^t\kappa_k$ положительны.

На ориентированной кривой можно ввести специальный параметр s — так наз. *псевдпеьклидову дугу* — требованием, чтобы

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s} = e_0 .$$

Если кривая была первоначально задана при помощи какого-либо параметра t, имеем $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t \,.\, \mathrm{d}t/\mathrm{d}s = e_0$ и, следовательно, $(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t, \mathrm{d}r/\mathrm{d}t)(\mathrm{d}t/\mathrm{d}s)^2 = \alpha_0$. Отсюда получаем $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = |(\mathrm{d}r/\mathrm{d}t, \mathrm{d}r/\mathrm{d}t)|^{1/2}$ и окончательно

$$s = s_0 + \int_{t_0}^{t}\left|\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}, \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)\right|^{1/2}\mathrm{d}\tau . \tag{1,11}$$

Итак, дуга s на ориентированной кривой определяется условием (1,10) с точностью до начального положения. Дуге можно дать подобно тому, как и в евклидовой геометрии, простое геометрическое истолкование при помощи псевдоевклидовой длины кривой.

Как видно из формул (1,9), величины ${}^t\kappa_k$ не являются независимыми от выбора параметра и не имеют, следовательно, непосредственного геометрического смысла. Однако, используя в качестве параметра псевдоевклидову дугу, мы получим инварианты ${}^s\kappa_k$, короче κ_k, которые не зависят от ориентации кривой и называются *псевдоевклидовыми кривизнами*. Формулы (1,5) тогда называются формулами Френе. Теорема 1,2 дает явные выражения для этих кривизн (если в ней взять в качестве параметра дугу).

Далее, справедлива

Теорема 1,4. *Для псевдоевклидовых кривизн κ_k имеют место при общем параметре t формулы*

$$\kappa_k = \frac{|{}^tD_{k-1}\,{}^tD_{k+1}|^{1/2}}{|{}^tD_k|\;|{}^tD_1|^{1/2}} . \tag{1,12}$$

Доказательство легко следует из формул (1,7), (1,9) и (1,11).

Подобно тому, как в евклидовых пространствах, кривая определяется и в псевдоевклидовых пространствах своими кривизнами с точностью до псевдоевклидовых движений. Притом нужно, однако, сказать, какие из нормалей имеют действительную и какие — мнимую длину, конечно в соответствии с индексом пространства. Точнее говоря, справедлива следующая

Теорема 1,5. *Пусть даны функции $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 > 0, \ldots, \kappa_{n-1} > 0$ переменного s; пусть притом κ_k обладает непрерывной производной проядка $n - k - 1$. Тогда* *существует единственная ориентированная кривая, для которой s является псевдоевклидовой дугой, $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ — псевдоевклидовыми кривизнами, которая проходит через наперед заданную точку и имеет в ней наперед заданный ортонормальный n-эдр в качестве сопровождающего n-эдра.*

Доказательство этой теоремы приводится в цитированной работе [1]. Однако, оно неполно; неполной является там и формулировка этой теоремы. В ней требуется только непрерывность функций $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$. Этой непрерывности достаточно для доказательства того, что система дифференциальных уравнений (1,5) имеет при предписанных начальных условиях одно единственное решение $e_0, \ldots, e_{n-1}$, которое образует для каждого s ортонормальный n-эдр. Для кривой $x(s) = x(s_0) + \int_{s_0}^{s} e_0(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$ параметр s является, очевидно, дугой. Теперь нужно еще показать, что для определенной таким образом кривой функции κ_k являются кривизнами. С этой целью нужно прежде всего построить сопровождающий n-эдр и кривизны той кривой, для чего как раз и необходимо существование упомянутых производных от фунций κ_k. Используя явные формулы (1,1) и (1,7), можно доказательство теоремы закончить аналогично тому, как это было сделано в работе [4] для случая центроевклидовых пространств.

Замечание 1,1. Результаты этого параграфа, содержащиеся в теоремах 1,1—1,5 можно шаг за шагом перенести на римановы пространства с неособой метрикой, которая может быть неопределенной. Вместо обычной производной нужно притом, конечно, пользоваться абсолютными производными.

2. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ НА АНАЛИТИЧЕСКИХ КРИВЫХ В ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В первом параграфе мы предполагали, между прочим, что векторы $r', \ldots, r^{(n)}$ линейно независимы. Рассмотрим теперь такие *аналитические ориентированные* кривые, на которых указанное предположение нарушается в одной изолированной *исключительной точке* (при какой-либо аналитической параметризации $r(t)$). Определим нормали и кривизны в этой точке $r(0)$ при помощи предельного перехода:

$$e_k(0) = \lim_{t \to 0+} e_k(t)\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,, \tag{2,1}$$

$$\kappa_k(0) = \lim_{t \to 0+} \kappa(t)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{2,2}$$

Если эти векторы $e_k(0)$ существуют и являются ортонормальными, мы будем говорить об *ортонормальном сопровождающем n-эдре в исключительной точке*.

Как было показано в работе [2], существуют натуральные числа $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ такие, что имеет место: $r_0^{(\alpha_1)}$ — есть первая не обращающаяся в нуль производная, $r_0^{(\alpha_i)}$ — первая по порядку производная, линейно независимая от производных $r_0^{(\alpha_1)}, \ldots, r_0^{(\alpha_{i-1})}$. Можно убедиться (учитывая напр. результаты работы [3]), что существует предельное положение (для $t \to 0$) соприкасающегося пространства $\{r'(t)), \ldots, r^{(k)}(t)\}$, являющееся пространством $\{r_0^{(\alpha_1)}, \ldots, r_0^{(\alpha_k)}\}$. Мы будем его называть *соприкасающимся подпространством размерности k в исключительной точке.*

В первом параграфе мы помимо линейной независимости векторов $r', \ldots, r^{(n)}$ еще предполагали, что подпространства $\{r'\}, \ldots, \{r', \ldots, r^{(k)}\}, \ldots, \{r', \ldots, r^{(n)}\}$ не являются изотропными. Поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь таких исключительных точек, вблизи которых эти условия выполняются. Нетрудно видеть, что некоторые соприкасающиеся подпространства в этой исключительной точке могут быть и в этом случае изотропными. В такой точке не имеет смысла говорить о ортонормальном n-эдре, поэтому мы и оставим такие точки в стороне. (Имеет, конечнс, смысл ворпос, как в таком случае дело обстоит с пределами (2,1) и (2,2); здесь мы этим, однако, заниматься не будем.) Остальные исключнтельные точки, которыми мы будем в дальнейшем заниматься, мы можем назвать *исключительными неизотропными точками.*

Введем прежде всего следующие обозначения:

$$(2,3) \qquad S_k = \begin{vmatrix} \left(r_0^{(\alpha_1)}, r_0^{(\alpha_1)}\right), \ldots, \left(r_0^{(\alpha_1)}, r_0^{(\alpha_k)}\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(r_0^{(\alpha_k)}, r_0^{(\alpha_1)}\right), \ldots, \left(r_0^{(\alpha_k)}, r_0^{(\alpha_k)}\right) \end{vmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n, \ s_0 = 1,$$

$$(2,4) \qquad T_k = \begin{vmatrix} \left(r_0^{(\alpha_1)}, r_0^{(\alpha_1)}\right), \ldots, \left(r_0^{(\alpha_1)}, r_0^{(\alpha_{k-1})}\right), r_0^{(\alpha_1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(r_0^{(\alpha_k)}, r_0^{(\alpha_1)}\right), \ldots, \left(r_0^{(\alpha_k)}, r_0^{(\alpha_{k-1})}\right), r_0^{(\alpha_k)} \end{vmatrix}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$(2,5) \qquad \varepsilon_k = \operatorname{sgn} S_k .$$

Теперь имеет место

Теорема 2,1. *В исключительной неизотропной точке $r(0)$ на аналитической ориентированной кривой $r(t)$ в псевдоевклидовом пространстве существует сопровождающий ортонормальный n-эдр $e_0(0), \ldots, e_{n-1}(0)$, для которого*

$$(2,6) \qquad e_{k-1}(0) = \frac{\varepsilon_{k-1} T_k}{|S_{k-1} S_k|}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где S_k дано формулой (2,3), T_k – формулой (2,4) и ε_k – формулой (2,5). Следовательно векторы $e_0(0), \ldots, e_{n-1}(0)$ мы получим из векторов $r_0^{(\alpha_1)}, \ldots, r_0^{(\alpha_n)}$ с помощью процесса ортогонализации Э. Шмидта.

Теорема 2,2. *Кривизны $\kappa_1(0), \ldots, \kappa_{n-1}(0)$ в исключительной неизотропной точке $r(0)$ на аналитической кривой $r(t)$ в псевдоевклидовом пространстве определяются формулами*

(2,7)

$$\kappa_k(0) = \frac{|S_{k-1} S_{k+1}|^{1/2} (\alpha_1 - 1)! (\alpha_k - 1)! (\alpha_{k+1} - \alpha_1) \ldots (\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{|S_k| \, |S_1|^{1/2} (\alpha_{k+1} - 1)! (\alpha_k - \alpha_1) \ldots (\alpha_k - \alpha_{k-1})} \cdot \lim_{t \to 0+} t^{\alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1} .$$

$k = 1, \ldots, n-1$, где S_k дано формулой (2,3). *Кривизна $\kappa_k(0)$ будет таким образом в случае $\alpha_{k+1} - \alpha_k = \alpha_1$ положительна, в случае $\alpha_{k+1} - \alpha_k > \alpha_1$ нулевая, а в случае $\alpha_{k+1} - \alpha_k < \alpha_1$ равна $+\infty$.*

Доказательство теорем 2,1 и 2,2 формально почти шаг за шагом такое же, как доказательство аналогичных утверждений в работе [3]. Нужно только исходить из теорем 1,1 и 1,4 и учесть, что $\operatorname{sgn} {}^tD_k(t) = \operatorname{sgn} S_k$.

Замечание 2,1. В пространствах индекса 1 нас с точки зрения специальной теории относительности интересуют лишь кривые с $(r'(t), r'(t)) < 0$. Если в исключительной точке $t = 0$ такой кривой $(r_0^{(\alpha_1)}, r^{(\alpha_1)}) < 0$, то эта точка уже неизотропна и для нее можно использовать теоремы 2,1 и 2,2.

Замечание 2,2. Результаты теорем 2,1 и 2,2 можно было бы непосредственно перенести на пространства Римана с неособой неопределенной метрикой так, как это сделано в работе [3], где исследуются аналогичные вопросы прямо для пространств Римана с положительно определенной метрикой. Точно так же можно было бы дополнить теоремы 2,1 и 2,2 некоторыми их следствиями и дальнейшими частичными результатами, как это было сделано в случае евклидовых пространств и пространств Римана с положительно определенной метрикой в упомянутой уже работе [3].

3. КРИВЫЕ В ЦЕНТРО-ПСЕВДОЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Подобно тому, как в работе [4], можно исследовать кривые в центро-псевдоевклидовых пространствах, т. е. в псевдоевклидовых пространствах с неподвижным центром, или, что практически то же самое, в векторных пространствах с псевдоевклидовой метрикой.

В отличие от первого параграфа мы будем здесь исходить из векторов $r, r', \ldots, r^{(n-1)}$. Притом мы будем предполагать, что соприкасающиеся подпространства $\{r\}, \ldots, \{r, r', \ldots, r^{(k)}\}, \ldots, \{r, r', \ldots, r^{(n-1)}\}$ не являются изотропными. При помощи процесса ортогонализации (см. [2]) мы построим из векторов $r, r', \ldots, r^{(n-1)}$ ортонормальный n-эдр $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, для которого справедлива следующая.

Теорема 3,1. *Имеет место соотношение*

$$(3,1) \qquad {}^ta_k = \frac{\varepsilon_{k-1}{}^tA_k}{|{}^tB_{k-1}{}^tB_k|^{1/2}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где

$$(3,2) \qquad {}^tA_k = \begin{vmatrix} (r, r), & (r, r'), & \ldots, (r, r^{(k-1)}), & r \\ (r', r), & (r', r'), & \ldots, (r', r^{(k-1)}), & r' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (r^{(k)}, r), & (r^{(k)}, r'), & \ldots, (r^{(k)}, r^{(k-1)}), & r^{(k)} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

$$(3,3)\qquad {}^tB_k = \begin{vmatrix} (r, r), & (r, r'), & \dots, (r, r^{(k)}) \\ (r', r), & (r', r'), & \dots, (r', r^{(k)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ (r^{(k)}, r), & (r^{(k)}, r'), & \dots, (r^{(k)}, r^{(k)}) \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \ B_{-1} = 1 ,$$

$$(3,4)\qquad \varepsilon_k = \operatorname{sgn} {}^tB_k .$$

Для производных от векторов ${}^ta_0, \dots, {}^ta_{n-1}$ можно вывести формулы, аналогичные формулам (1,5) (см. [4]).

$$(3,5)\qquad \begin{aligned} {}^ta_0' &= {}^t\omega_1 {}^ta_1 , \\ {}^ta_1' &= - {}^t\alpha_0 {}^t\alpha_1 {}^t\omega_1 {}^ta_0 + {}^t\omega_2 {}^ta_2 , \\ &\dots\dots\dots\dots \\ {}^ta_{k-1}' &= - {}^t\alpha_{k-2} {}^t\alpha_{k-1} {}^t\omega_{k-1} {}^ta_{k-2} + {}^t\omega_k {}^ta_k , \\ &\dots\dots\dots\dots \\ {}^ta_{n-1}' &= - {}^t\alpha_{n-2} {}^t\alpha_{n-1} {}^t\omega_{n-1} {}^ta_{n-2} . \end{aligned}$$

Притом ${}^t\alpha_k = ({}^ta_k, {}^ta_k)$, т. е. 1 или -1. Согласно [2] можно написать

$$(3,6)\qquad {}^t\alpha_k = {}^t\varepsilon_k {}^t\varepsilon_{k-1} .$$

Для величин ${}^t\omega_1, \dots, {}^t\omega_{n-1}$ можно вывести, как и в первом параграфе, формулы, аналогичные формулам в [4]:

Теорема 3,2. *Для ${}^t\omega_k$ имеет место*

$$(3,7)\qquad {}^t\omega_k = \frac{|{}^tB_{k-2} {}^tB_k|}{|{}^tB_{k-1}|}, \quad k = 1, \dots, n-1 .$$

В случае, когда индекс пространства равен нулю, теоремы 3,1, 3,2 и формулы (3,5) совпадают с результатами, выведенными для центроевклидовых пространств в работе [4].

При изменении параметризации кривой справедлива

Теорема 3,3. *При преобразовании параметра $t = t(\tau)$ $(\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau \neq 0)$ имеют место соотношения*

$$(3,8)\qquad {}^ta_k = \left(\operatorname{sgn} \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^k a_k , \quad k = 0, 1, \dots, n ,$$

$$(3,9)\qquad {}^t\omega_k = {}^\tau\omega_k \left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right|, \quad k = 1, \dots, n .$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1,3.

Итак, мы видим, что векторы ${}^ta_k$ определяются кривой, не зависят существенно от параметризации, а только от ориентации кривой.

По сравнению с псевдоевклидовой теорией в центро-псевдоевклидовой теории имеет место еще следующая теорема.

Теорема 3,4. *Пусть $f(t)$ — положительная (скалярная) функция, обладающая производными до $(n-1)$-го порядка. Тогда кривая $f(t)\,r(t)$ и кривая $r(t)$ имеют один и тот же сопровождающий n-эдр ${}^t a_0, \ldots, {}^t a_{n-1}$ и те же величины ${}^t\omega_1, \ldots, \ldots, {}^t\omega_{n-1}$.*

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 3,3 подстановкой в формулы (3,1) и (3,7). Нетрудно убедиться, что совпадают и знаки ε_{k-1}.

На ориентированной кривой мы введем специальную *центро-псевдоевклидову дугу* требованием

$$(3,10) \qquad \frac{\mathrm{d}a_0}{\mathrm{d}\varphi} = e_1\,, \quad \text{т. е.} \quad {}^\varphi\omega_1 = 1\,,$$

как вытекает из первого уравнения (3,5).

Если ориентированная кривая задана сначала при помощи общего параметра t, имеем согласно (3,9) ${}^t\omega_1 = \mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t$ и, следовательно,

$$(3,11) \qquad \varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} {}^\tau\omega_1\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Итак, центро-псевдоевклидова дуга φ ориентированной кривой определяется условием (3,10) с точностью до начального положения. Из условия (3,10) следует, что *центро-псевдоевклидова дуга является псевдоевклидовой дугой кривой $a_0(t)$, т. е. проекции кривой $r(t)$ на „индикатрису" $\varrho = 1$.* (ϱ означает абсолютную величину расстояния точки от начала координат, значит, индикатриса состоит в основном из двух квадратических гиперповерхностей $(x, x) = \pm 1$ — поскольку, конечно, сигнатура пространства больше единицы и меньше n; в последних случаях мы имеем гиперсферу $(x, x) = 1$ или $(x, x) = -1$.)

Если в качестве параметра на кривой взять центро-псевдоевклидову дугу, то получим инварианты ${}^\varphi\omega_k$, короче ω_k, которые не зависят от ориентации кривой и которые мы назовем центро-псевдоевклидовыми кривизнами. Формулы (3,5) дают т. наз. формулы Френе. (Нужно, конечно, положить $t = \varphi$, ${}^\varphi\omega_1 = 1$.) Формулы теоремы 3,2 определяют эти кривизны в явном виде (конечно, если в них взять φ как параметр на кривой).

При общем партметре справедлива следующая теорема.

Теорема 3,5. *Центро-псевдоевклидовы кривизны определяются при общем параметре t формулами*

$$(3,12) \qquad \omega_k = \frac{|{}^tB_0|\;|{}^tB_{k-2}{}^tB_k|^{1/2}}{|{}^tB_{k-1}|\;|{}^tB_1|^{1/2}}\,, \quad k = 2, \ldots, n-1\,.$$

Доказательство легко следует из формул (3,7) и (3,9).

Для построения кривой по ее кривизнам и по расстоянию от начала координат справедлива следующая основная теорема:

Теорема 3,6. *Пусть даны функции* $\varrho > 0$, $\omega_2 > 0, \ldots, \omega_{n-1} > 0$ *переменного* φ, *причем функция* ϱ *обладает непрерывной производной* $(n-1)$*-го порядка,* ω_k — *— непрерывной производной порядка* $n - k - 1$. *Тогда существует одна единственная ориентированная кривая, для которой* φ *является центро-псевдоевклидовой дугой,* $\omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ — *центро-псевдоевклидовыми кривизнами,* ϱ — *абсолютной величиной расстояния от начала, которая проходит через наперед заданную точку и имеет в ней наперед заданный ортонормальный n-эдр в качестве сопровождающего n-эдра.* (Должно быть, конечно, $r(\varphi_0) = \varrho(\varphi_0)\, a_0(\varphi_0)$.)

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1,5 и доказательству подобной теоремы в [4]. Найдем решение системы дифференциальных уравнений (3,5) (в которых берем φ в качестве параметра и положим $\omega_1 = 1$) при начальных „ортонормальных" условиях. Покажем, что это решение $a_0, \ldots, a_{n-1}$ образует ортонормальный n-эдр и, наконец, покажем, что кривая $r = \varrho a_0$ имеет указанные свойства.

Замечание 3,1. Из теоремы 3,4 следует, что *„одинаково ориентированные" кривые, лежащие на конусе с вершиной в начале пространства, имеют в точках на тех же образующих тождественные сопровождающие n-эдры и тождественные центро-псевдоевклидовы кривизны.* Итак, при построении кривой по *„естественным уравнениям"* $\varrho = \varrho(\varphi)$, $\omega_2 = \omega_2(\varphi), \ldots, \omega_{n-1} = \omega_{n-1}(\varphi)$ достаточно прежде всего построить кривую на индикатрисе $\varrho = 1$ по кривизнам $\omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ (решив уравнения Френе); проектируя эту кривую из начала (с помощью соотношения $r = \varrho a_0$), мы получим искомую кривую.

Изложенные до сих пор в этом параграфе результаты образуют основание центро-псевдоевклидовой теории кривых. Далее было бы можно перенести дальнейшие результаты центроевклидовой теории, полученные в работе [4], на центро-псевдоевклидов случай. Ограничимся здесь лишь несколькими указаниями:

А) Прежде всего можно было бы исследовать исключительные точки на аналитических кривых. Мы получили бы результаты, аналогичные результатам из пятого параграфа работы [4]. Пришлось бы, однако, снова исключить „изотропные" точки.

Б) Можно опять доказать, что кривые с постоянными инвариантами ϱ, $\omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ обладают и постоянными кривизнами $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ и в пространствах нечетной размерности лежат в гиперплоскости. Это позволяет нам легко найти кривые с постоянными ϱ и ω_2 в трехмерном пространстве как пересечения плоскостей (не проходящих через начало) с квадратическими поверхностями $(x, x) = \pm 1$.

Литература

[1] *П. К. Рашевский:* Риманова геометрия и тензорный анализ. Москва 1953.

[2] *Č. Vitner:* Das Orthogonalisationsprozess in pseudoeukleidischen Räumen. Čas. pro pěst. mat. *89*, 1964, 31–35.

[3] *Č. Vitner:* Výjimečné body na křivkách v Riemannových prostorech. Čas. pro pěst. mat. *84*, 1959, 433–453.

[4] *Ч. Витнер:* Дифференциальная геометрия кривых в центроевклидовых пространствах. Чех. мат. жур. *12* (*87*), 1962 119—143.

Zusammenfassung

DIE KURVEN IN RÄUMEN MIT EINER NICHTSINGULÄREN PSEUDOEUKLEIDISCHEN METRIK EINES BELIEBIGEN INDEXES

ČESTMÍR VITNER, Praha

Die Arbeit ist der Diferentialgeometrie der Kurven in pseudoeukleidischen und zentro-pseudoeukleidischen Räumen mit einem beliebigen Index gewidmet. Unter anderem sind hier explizite Formeln für die begleitende n-Kante und für die Krümmungen in gewöhnlichen sowie in aussergewöhnlichen Punkten einer Kurve abgeleitet. Den Ausgangspunkt bilden hier explizite Formeln für den Schmidtschen Orthgonalisationsprozess, welche von dem Autor in seiner Arbeit [2] abgeleitet wurden. Sie ermöglichen die bekannten Ergebnisse der eukleidischen und der vom Autor aufgebauten zentroeukleidischen Theorie der Kurven auf den pseudoeukleidischen Fall überzutragen. (Sätze 1,1 – 1,5 und 3,1 – 3,6. Vergleiche mit [4].) Ebenso war es möglich die Ergebnisse des Autors, welche die aussergewöhnlichen Punkten in Riemannschen Räumen betreffen, auf den pseudoeukleidischen Fall überzutragen. (Sätze 2,1 und 2,2. Vergleiche mit [3].)