Alois Švec

Sur la géométrie différentielle des réseaux conjugués dans E_n

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 4, 539–550

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100585`

SUR LA GÉOMETRIE DIFFÉRENTIELLE DES RÉSEAUX CONJUGUÉS DANS E_n

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 24 juillet 1961)

On définit le réseau pseudoconjugué sur une surface dans l'espace euclidien et l'on montre qu'il existe des surfaces à réseau conjugué, sur lesquelles il y a un réseau pseudoconjugué orthogonal particulier.

1. La surface dans E_n. Dans l'espace euclidien E_n à n dimensions (dans tout le travail, nous supposons $n \geqq 5$) soit donnée une surface décrite par le point $A = A(u, v)$. A tout point $A(u, v)$ de cette surface nous associons un repère orthogonal $\{A; I_1, \ldots, I_n\}$ de telle manière que $\{A; I_1, I_2\}$ soit le repère du plan tangent au point A. Les équations différentielles du mouvement du repère sont alors

$$\mathrm{d}A = \omega^1 I_1 + \omega^2 I_2 \,, \quad \mathrm{d}I_a = \omega_a^b I_b \,, \qquad \omega_a^b + \omega_b^a = 0 \,; \quad a, b = 1, \ldots, n \,; \tag{1}$$

les équations d'intégrabilité bien connues étant satisfaites

$$[\mathrm{d}\omega^a] = [\omega^b \omega_b^a], \; [\mathrm{d}\omega_a^b] = [\omega_a^c \omega_c^b] \,; \quad a, b, c = 1, \ldots, n \,. \tag{2}$$

La surface est donc donnée par les équations différentielles

$$\omega^i = 0 \,; \quad i = 3, \ldots, n \,; \tag{3}$$

avec les conditions d'intégrabilité ($i = 3, \ldots, n$)

$$[\omega^1 \omega_1^i] + [\omega^2 \omega_2^i] = 0 \,. \tag{4}$$

Le lemme de Cartan donne

$$\omega_1^i = a_i \omega^1 + b_i \omega^2 \,, \quad \omega_2^i = b_i \omega^1 + c_i \omega^2 \tag{5}$$

avec les conséquences différentielles

$$\begin{aligned} &[\mathrm{d}a_i - 2b_i\omega_1^2 + \textstyle\sum a_j\omega_j^i, \omega^1] + [\mathrm{d}b_i + (a_i - c_i)\,\omega_1^2 + \textstyle\sum b_j\omega_j^i, \omega^2] = 0 \,, \\ &[\mathrm{d}b_i + (a_i - c_i)\,\omega_1^2 + \textstyle\sum b_j\omega_j^i, \omega^1] + [\mathrm{d}c_i + 2b_i\omega_1^2 + \textstyle\sum c_j\omega_j^i, \omega^2] = 0 \,. \end{aligned} \tag{6}$$

Les équations (5) et (6) sont valables, bien entendu, aussi pour $i = 3, \ldots, n$. Le symbole $\sum$ désigne une summation étendue aux valeurs $j = 3, \ldots, n$; $j \neq i$. Il en découle pour les mêmes i en vertu du lemme de Cartan

$$(7) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{d}a_i - 2b_i\omega_1^2 + \sum a_j\omega_j^i = a_{i1}\omega^1 + a_{i2}\omega^2\,, \\ &\mathrm{d}b_i + (a_i - c_i)\,\omega_1^2 + \sum b_j\omega_j^i = a_{i2}\omega^1 + a_{i3}\omega^2\,, \\ &\mathrm{d}c_i + 2b_i\omega_1^2 + \sum c_j\omega_j^i = a_{i3}\omega^1 + a_{i4}\omega^2\,, \end{aligned}$$

soit encore, dans la notation usuelle,

$$(8) \qquad e^a = 0 \quad \text{pour} \quad a = 1, \ldots, n\,, \qquad e_1^i = e_2^i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 3, \ldots, n\,,$$

$$(9) \qquad \begin{aligned} &\delta a_i = 2b_ie_1^2 - \sum a_je_j^i\,, \\ &\delta b_i = (c_i - a_i)\,e_1^2 - \sum b_je_j^i\,, \\ &\delta c_i = -2b_ie_1^2 - \sum c_je_j^i \quad \text{pour} \quad i = 3, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Ensuite

$$(10) \qquad [\mathrm{d}\omega^1] = -\,[\omega^2\omega_1^2]\,, \quad [\mathrm{d}\omega^2] = [\omega^1\omega_1^2]$$

de sorte que

$$(11) \qquad \delta\omega^1 = e_1^2\omega^2\,, \quad \delta\omega^2 = -\,e_1^2\omega^1\,.$$

Evidemment

$$(12) \qquad \mathrm{d}^2A = (\mathrm{d}\omega^1 - \omega_1^2\omega^2)\,I_1 + (\mathrm{d}\omega^2 + \omega_1^2\omega^1)\,I_2 + \sum_{i=3}^{n} \varphi^i I_i$$

où

$$(13) \qquad \varphi^i = \omega_1^i\omega^1 + \omega_2^i\omega^2 = a_i(\omega^1)^2 + 2b_i\omega^1\omega^2 + c_i(\omega^2)^2$$

sont ce qu'on appelle formes asymptotiques de la surface. Les équations (9) et (11) donnent

$$(14) \qquad \delta\varphi^i = -\sum e_j^i\varphi^j$$

de façon que le système linéaire de formes quadratiques $\{\varphi^i\}$, engendré par les formes $\varphi^3, \ldots, \varphi^n$, correspond à la surface d'une manière invariante.

En tout cas, il est possible de spécialiser le repère de telle façon que l'espace osculateur (qui est à cinq dimensions au moins) est situé dans l'espace, dont le repère est $\{A; I_1, I_2, I_3, I_4, I_5\}$. Alors, on a évidemment $\varphi^6 = \varphi^7 = \ldots = \varphi^n$, et la surface est donnée par les équations linéaires (3), (5) pour $i = 3, 4, 5$ et

$$(15) \qquad \omega_1^\alpha = \omega_2^\alpha = 0$$

pour $\alpha = 6, \ldots, n$, qui se ferment par les équations (6) pour $i = 3, 4, 5$ et par

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\Big[\sum_{i=3}^{5} a_i\omega_i^\alpha,\, \omega^1\Big] + \Big[\sum_{i=3}^{5} b_i\omega_i^\alpha,\, \omega^2\Big] = 0\,, \\ &\Big[\sum_{i=3}^{5} b_i\omega_i^\alpha,\, \omega^1\Big] + \Big[\sum_{i=3}^{5} c_i\omega_i^\alpha,\, \omega^2\Big] = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = 6, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

2. Surfaces à réseau conjugué. Considérons le cas, où la surface possède un réseau conjugué, ce qui signifie que l'espace osculateur en chacun de ses points est à quatre dimensions. Dans ce cas-là, il est possible de choisir le repère de telle manière que l'on ait $\varphi^5 = 0$, la surface étant donnée par les équations (3), (5) pour $i = 3, 4$ et (15) pour $\alpha = 5, \dots, n$ qui se ferment par les équations (6) pour $i = 3, 4$ et par

$$(17) \qquad \begin{aligned} &[a_3\omega_3^\alpha + a_4\omega_4^\alpha, \omega^1] + [b_3\omega_3^\alpha + b_4\omega_4^\alpha, \omega^2] = 0\,, \\ &[b_3\omega_3^\alpha + b_4\omega_4^\alpha, \omega^1] + [c_3\omega_3^\alpha + c_4\omega_4^\alpha, \omega] = 0 \end{aligned}$$

pour $\alpha = 5, \dots, n$. Les formes φ^3 et φ^4 sont linéairement indépendantes de sorte que

$$(18) \qquad \operatorname{rang} \begin{Vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{Vmatrix} = 2\,;$$

cela entraîne l'indépendance linéaire de deux des formes $a_3\omega_3^\alpha + a_4\omega_4^\alpha$, $b_3\omega_3^\alpha + b_4\omega_4^\alpha$, $c_3\omega_3^\alpha + c_4\omega_4^\alpha$, la troisième étant une combinaison linéaire de ces deux-là. Supposons

$$(19) \qquad \lambda_1(a_3\omega_3^\alpha + a_4\omega_4^\alpha) + \lambda_2(b_3\omega_3^\alpha + b_4\omega_4^\alpha) + \lambda_3(c_3\omega_3^\alpha + c_4\omega_4^\alpha) = 0$$

où un λ_i au moins est différent de zéro.

Essayons d'aller plus loin dans la spécialisation du repère. Choisissons les vecteurs I_1, I_2 de telle façon que la droite déterminée par le point A et par le vecteur I_1, ou I_2 soit l'axe de l'angle que font les tangentes du réseau conjugué. Si K_1 et K_2 sont les vecteurs tangents des courbes du réseau conjugué au point A, on a nécessairement

$$(20) \qquad K_1 = \cos\varphi\, I_1 + \sin\varphi\, I_2\,, \quad K_2 = \cos\varphi\, I_1 - \sin\varphi\, I_2$$

en changeant, si besoin est, l'orientation du vecteur K_2; l'angle φ n'étant manifestement égal ni à zéro ni à $\frac{1}{2}\pi$, nous avons $\sin 2\varphi \neq 0$. Pour que K_1 et K_2 soient effectivement les vecteurs des tangentes conjuguées, il faut qu'il existe $t_1 \neq 0$ et k_1 tels que

$$(21) \qquad \{\mathrm{d}(A + t_1K_1)\}_{\omega^1=\cos\varphi,\omega^2=-\sin\varphi} = k_1K_1\,,$$

le point $A_1 = A + t_1K_1$ est alors la transformée de Laplace de la surface considérée. L'équation (21) peut s'écrire comme

$$\begin{aligned} &(\cos\varphi - t_1\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi - t_1\sin\varphi\omega_1^2)\,I_1 + (-\sin\varphi + t_1\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + t_1\cos\varphi\omega_1^2)\,I_2 + \\ &\quad + t_1(a_3\cos^2\varphi - c_3\sin^2\varphi)\,I_3 + t_1(a_4\cos^2\varphi - c_4\sin^2\varphi)\,I_4 = \\ &\quad = (k_1 - \mathrm{d}t_1)(\cos\varphi I_1 + \sin\varphi I_2) \end{aligned}$$

où il faut substituer $\omega^1 = \cos\varphi$, $\omega^2 = -\sin\varphi$ dans $\mathrm{d}\varphi$, ω_1^2 et $\mathrm{d}t_1$. Nous avons donc

$$(22) \qquad a_3\cos^2\varphi - c_3\sin^2\varphi = 0\,, \quad a_4\cos^2\varphi - c_4\sin^2\varphi = 0\,.$$

On détermine alors la valeur correspondante de

$$(23) \qquad t_1(\mathrm{d}\varphi + \omega_1^2) = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

en y substituant de nouveau pour $d\varphi$ et ω_1^2. De (22) découle l'existence des fonctions u_3, u_4 pour lesquelles

$$(24)\qquad \begin{aligned} a_3 &= u_3 \sin^2 \varphi\,, \quad c_3 = u_3 \cos^2 \varphi\,,\\ a_4 &= u_4 \sin^2 \varphi\,, \quad c_4 = u_4 \cos^2 \varphi\,. \end{aligned}$$

Compte tenu de (18), on voit immédiatement que $b_3u_4 - b_4u_3 \neq 0$.

La surface considérée est donnée par les équations

$$(25)\qquad \begin{gathered} \omega^i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 3, \dots, n\,,\\ \omega_1^3 = u_3 \sin^2 \varphi\omega^1 + b_3\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = b_3\omega^1 + u_3 \cos^2 \varphi\omega^2\,,\\ \omega_1^4 = u_4 \sin^2 \varphi\omega^1 + b_4\omega^2\,, \quad \omega_2^4 = b_4\omega^1 + u_4 \cos^2 \varphi\omega^2\,,\\ \omega_1^\alpha = \omega_2^\alpha = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = 5, \dots, n \end{gathered}$$

qui se ferment par les équations

$$(26)\qquad \begin{gathered} [\sin^2 \varphi\, du_3 + u_3 \sin 2\varphi\, d\varphi - 2b_3\omega_1^2 - u_4 \sin^2 \varphi\omega_3^4,\ \omega^1] +\\ + [db_3 - u_3 \cos 2\varphi\omega_1^2 - b_4\omega_3^4,\ \omega^2] = 0\,,\\ [db_3 - u_3 \cos 2\varphi\omega_1^2 - b_4\omega_3^4,\ \omega^1] +\\ + [\cos^2 \varphi\, du_3 - u_3 \sin 2\varphi\, d\varphi + 2b_3\omega_1^2 - u_4 \cos^2 \varphi\omega_3^4,\ \omega^2] = 0\,,\\ [\sin^2 \varphi\, du_4 + u_4 \sin 2\varphi\, d\varphi - 2b_4\omega_1^2 + u_3 \sin^2 \varphi\omega_3^4,\ \omega^1] +\\ + [db_4 - u_4 \cos 2\varphi\omega_1^2 + b_3\omega_3^4,\ \omega^2] = 0\,,\\ [db_4 - u_4 \cos 2\varphi\omega_1^2 + b_3\omega_3^4,\ \omega^1] +\\ + [\cos^2 \varphi\, du_4 - u_4 \sin 2\varphi\, d\varphi + 2b_4\omega_1^2 + u_3 \cos^2 \varphi\omega_3^4,\ \omega^2] = 0\,, \end{gathered}$$

$$(27)\qquad \begin{gathered} \sin^2 \varphi[u_3\omega_3^\alpha + u_4\omega_4^\alpha,\ \omega^1] + [b_3\omega_3^\alpha + b_4\omega_4^\alpha,\ \omega^2] = 0\,,\\ [b_3\omega_3^\alpha + b_4\omega_4^\alpha,\ \omega^1] + \cos^2 \varphi[u_3\omega_3^\alpha + u_4\omega_4^\alpha,\ \omega^2] = 0 \quad \text{pour} \quad \alpha = 5, \dots, n\,. \end{gathered}$$

Ecrivons les équations du système (26) successivement sous la forme

$$(26')\qquad \begin{gathered} [\psi_1\omega^1] + [\psi_2\omega^2] = 0\,, \quad [\psi_2\omega^1] + [\psi_3\omega^2] = 0\,,\\ [\psi_4\omega^1] + [\psi_5\omega^2] = 0\,, \quad [\psi_5\omega^1] + [\psi_6\omega^2] = 0\,. \end{gathered}$$

Les formes

$$\begin{gathered} \sin^2 \varphi \,.\, \psi_3 - \cos^2 \varphi \,.\, \psi_1 = 2b_3\omega_1^2 + u_3 \sin 2\varphi\, d\varphi\,,\\ \sin^2 \varphi \,.\, \psi_6 - \cos^2 \varphi \,.\, \psi_4 = 2b_4\omega_1^2 + u_4 \sin 2\varphi\, d\varphi \end{gathered}$$

sont des combinaisons linéaires des formes ω^1, ω^2 et comme elles sont linéairement indépendantes, nous pouvons écrire

$$(28)\qquad \omega_1^2 = r\omega^1 + s\omega^2\,, \quad d\varphi = \varphi_1\omega^1 + \varphi_2\omega^2\,.$$

La surface est alors donnée par les équations (25) *et* (28), *qui se ferment par les équations*

$$
\begin{aligned}
(29)\qquad & \sin^2\varphi[\mathrm{d}u_3 - u_4\omega_4^3,\ \omega^1] + [\mathrm{d}b_3 - b_4\omega_3^4,\ \omega^2] + (.)\,[\omega^1\omega^2] = 0\,,\\
& [\mathrm{d}b_3 - b_4\omega_3^4,\ \omega^1] + \cos^2\varphi[\mathrm{d}u_3 - u_4\omega_3^4,\ \omega^2] + (.)\,[\omega^1\omega^2] = 0\,,\\
& \sin^2\varphi[\mathrm{d}u_4 + u_3\omega_3^4,\ \omega^1] + [\mathrm{d}b_4 + b_3\omega_3^4,\ \omega^2] + (.)\,[\omega^1\omega^2] = 0\,,\\
& [\mathrm{d}b_4 + b_3\omega_3^4,\ \omega^1] + \cos^2\varphi[\mathrm{d}u_4 + u_3\omega_3^4,\ \omega^2] + (.)\,[\omega^1\omega^2] = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(30)\qquad & [\mathrm{d}r\,\omega^1] + [\mathrm{d}s\,\omega^2] + (.)\,[\omega^1\omega^2] = 0\,,\\
& [\mathrm{d}\varphi_1\omega^1] + [\mathrm{d}\varphi_2\omega^2] + (.)\,[\omega^1\omega^2] = 0
\end{aligned}
$$

et (27).

Si nous fixons les u-courbes et les v-courbes paramétriques de telle façon que les vecteurs I_1 et I_2 soient les vecteurs tangents aux courbes $v = \text{const}$, ou $u = \text{const}$ resp., nous pouvons écrire

$$
(31)\qquad \omega^1 = a\,\mathrm{d}u\,,\quad \omega^2 = b\,\mathrm{d}v\,.
$$

La surface est donnée par les équations (31), (25) *et*

$$
(32)\qquad \omega_1^2 = R\,\mathrm{d}u + S\,\mathrm{d}v\,,\quad \mathrm{d}\varphi = \varphi_u\,\mathrm{d}u + \varphi_v\,\mathrm{d}v
$$

qui se ferment par les équations

$$
\begin{aligned}
(33)\qquad & a\sin^2\varphi[\mathrm{d}u_3 - u_4\omega_3^4,\ \mathrm{d}u] + b[\mathrm{d}b_3 - b_4\omega_3^4,\ \mathrm{d}v] + (.)\,[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0\,,\\
& a[\mathrm{d}b_3 - b_4\omega_3^4,\ \mathrm{d}u] + b\cos^2\varphi[\mathrm{d}u_3 - u_4\omega_3^4,\ \mathrm{d}v] + (.)\,[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0\,,\\
& a\sin^2\varphi[\mathrm{d}u_4 + u_3\omega_3^4,\ \mathrm{d}u] + b[\mathrm{d}b_4 + b_3\omega_3^4,\ \mathrm{d}v] + (.)\,[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0\,,\\
& a[\mathrm{d}b_4 + b_3\omega_3^4,\ \mathrm{d}u] + b\cos^2\varphi[\mathrm{d}u_4 + u_3\omega_3^4,\ \mathrm{d}v] + (.)\,[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0\,,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(34)\qquad & a\sin^2\varphi[u_3\omega_3^\alpha + u_4\omega_4^\alpha,\ \mathrm{d}u] + b[b_3\omega_3^\alpha + b_4\omega_4^\alpha,\ \mathrm{d}v] = 0\,,\\
& a[b_3\omega_3^\alpha + b_4\omega_4^\alpha,\ \mathrm{d}u] + b\cos^2\varphi[u_3\omega_3^\alpha + u_4\omega_4^\alpha,\ \mathrm{d}v] = 0\\
& \text{pour}\quad \alpha = 5, \ldots, n\,,
\end{aligned}
$$

$$
(35)\qquad [\mathrm{d}a\,\mathrm{d}u] - bR[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0\,,\quad [\mathrm{d}b\,\mathrm{d}v] - aS[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0\,,
$$

$$
(36)\qquad [\mathrm{d}R\,\mathrm{d}u] + [\mathrm{d}S\,\mathrm{d}v] + (.)\,[\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v] = 0\,,
$$

$$
(37)\qquad [\mathrm{d}\varphi_u\,\mathrm{d}u] + [\mathrm{d}\varphi_v\,\mathrm{d}v] = 0\,.
$$

L'équation (23) devient

$$
(38)\qquad t_1\{b(\varphi_u + R)\cos\varphi - a(\varphi_v + S)\sin\varphi\} = 2\sin\varphi\cos\varphi
$$

de sorte que la distance entre le point A et la transformée de Laplace A_1 est une certaine fonction des invariants $\varphi, \varphi_u, \varphi_v, a, b, R, S$.

Soit donné un domaine de paramètres (u, v) et deux fonctions indépendantes $F_\varrho(x_1, x_2, x_3, u, v)$, $\varrho = 1, 2$. *Nous demandons s'il existe dans* E_n *une surface* $A(u, v)$ *à réseau conjugué telle que:* 1° *en tout point de la surface, les tangentes aux courbes* $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, *sont axes des angles que font les tangentes conju-*

guées; 2° *pour l'angle* 2φ *et les distances* $\overline{AA}_1$, $\overline{AA}_{-1}$ *entre le point* A *de la surface donnée et les transformées de Laplace correspondantes, on a*

$$F_\varrho(2\varphi, \overline{AA}_1, \overline{AA}_{-1}, u, v) = 0 \, .$$

Les conditions précédentes peuvent être écrites d'une manière plus générale sous la forme

$$G_\varrho(\varphi, \varphi_u, \varphi_v, a, b, R, S, u, v) = 0 \, , \quad \varrho = 1, 2 \, . \tag{39}$$

On en obtient par différentiation (nous désignons par $G_\varrho^{(i)}$ la dérivée partielle de G_ϱ d'après la i-ème variable) pour $\varrho = 1, 2$

$$\begin{aligned} G_\varrho^{(2)} \, \mathrm{d}\varphi_u + G_\varrho^{(3)} \, \mathrm{d}\varphi_v + G_\varrho^{(4)} \, \mathrm{d}a + G_\varrho^{(5)} \, \mathrm{d}b + G_\varrho^{(6)} \, \mathrm{d}R + G_\varrho^{(7)} \, \mathrm{d}S \, + \\ + (G_\varrho^{(1)}\varphi_u + G_\varrho^{(8)}) \, \mathrm{d}u + (G_\varrho^{(1)}\varphi_v + G_\varrho^{(9)}) \, \mathrm{d}v = 0 \, , \end{aligned} \tag{40}$$

par différentiation extérieure nous obtenons une identité. Le problème est donc donné par les équations (31), (25), (32) et (40) qui se ferment par les équations (33)–(37). Ce système est en involution et l'on a (dans la notation usuelle de Cartan) $p = 2$, $q = s_1 = N = 2n$ de sorte que *les surfaces en question existent et dépendent de* $2n$ *fonctions d'une variable.*

3. Réseaux pseudoconjugués. Dans l'espace euclidien E_n soit donné un système biparamétrique de droites (pour simplifier, nous l'appellerons congruence bien qu'il soit indécomposable en deux systèmes de surfaces développables) $p = p(u, v)$, où chaque droite est formée des points $X = A(u, v) + tI(u, v)$, $t \in (-\infty, +\infty)$. A chaque droite $p(u, v)$ il est alors possible d'associer, d'une façon invariante, un espace euclidien à trois dimension $E_3(u, v)$, déterminé par le point $A(u, v)$ et par les vecteurs $I(u, v)$, $I_u(u, v)$, $I_v(u, v)$. A la congruence de droites L, il correspond ainsi une congruence de droites à connexion euclidienne $\mathscr{L}$ dont les espaces locaux sont $E_3(u, v)$; la transformation de l'espace $E_3(u, v)$ dans l'espace $E'_3 = E_3(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v)$ est donnée par la projection de $E_3(u, v)$ dans E'_3 dans la direction de l'espace $E_{n-3}(u, v)$ totalement orthogonal à $E_3(u, v)$. Ce procédé a été décrit d'une façon détaillée dans mon travail [1]. La congruence $\mathscr{L}$ a (dans le cas général) deux systèmes de surfaces développables que j'appelle *surfaces pseudodéveloppables* de la congruence L.

Maintenant, soit donnée dans E_n une surface π et sur elle une couche de courbes V. Les tangentes à cette couche forment une congruence L qu'on peut, en général, décomposer en deux systèmes de surfaces pseudodéveloppables, qui découpent sur π deux couches de courbes. Une de ces deux couches, c'est, bien entendu, notre V; l'autre couche V' sera appelée couche *pseudoconjuguée* à la couche V. Le système de deux couches V_1, V_2 sur la surface π sera appelé *réseau pseudoconjugué*, si V_1 ou V_2 est pseudoconjugué à V_2, ou V_1 respectivement. On ne sait encore rien sur la structure de la correspondance $V \to V'$; on ne sait même pas s'il existe, sur une surface générale, un réseau pseudoconjugué. Commé il découle des résultats du travail [1], toute surface développable d'une congruence L est en même temps sa surface pseudodéveloppable, de sorte qu'un réseau conjugué de la surface considérée est en même temps son réseau pseudoconjugué.

Dans le cas de surfaces à réseau conjugué, je me bornerai à la démonstration de l'existence d'une surface à laquelle j'imposerai une condition très forte: *sur cette surface, il doit y avoir un réseau pseudoconjugué orthogonal* (différent du réseau conjugué), *dont les courbes bisectent en chaque point l'angle que font les courbes du réseau conjugué, passant par ce point.*

Supposons la surface donnée par les équations (25) et (28) qui se ferment par les équations (27), (29), (30). Le repère est alors spécialisé de telle manière que si V_1 et V_2 sont les couches telles que les vecteurs tangents à leurs courbes sont I_1 et I_2 respectivement, alors le réseau (V_1, V_2) est pseudoconjuguée. Cherchons tout d'abord la couche V_1', pseudoconjuguée à la couche V_1. En raison de la spécialisation effectuée, nous avons

$$\mathrm{d}I_1 = \omega^1 J_1 + \omega^2 J_2 \tag{41}$$

où

$$J_2 = rI_2 + u_3 \sin^2 \varphi I_3 + u_4 \sin^2 \varphi I_4 \,, \quad J_3 = sI_2 + b_3 I_3 + b_4 I_4 \,. \tag{42}$$

A chaque droite $A + tI_1$ on a donc associé un espace local E_3, déterminé par le point A et les vecteurs I_1, J_2, J_3 (attention: $\{A; I_1, J_2, J_3\}$ n'est pas une base orthonormale!). Si maintenant $J_4, \ldots, J_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants et orthogonaux à E_3, d'ailleurs quelconques, il est certainement permis d'écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \tau^1 I_1 + \tau^2 J_2 + \tau^3 J_3 + \ldots + \tau^n J_n \,, \\ \mathrm{d}I_1 &= \tau_1^1 I_1 + \tau_1^2 J_2 + \tau_1^3 J_3 + \ldots + \tau_1^n J_n \,, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{d}J_n &= \tau_n^1 I_1 + \tau_n^2 J_2 + \tau_n^3 J_3 + \ldots + \tau_n^n J_n \,; \end{aligned} \tag{43}$$

la congruence $\mathscr{L}$ sera alors donnée par les équations

$$\begin{aligned} \nabla A &= \tau^1 I_1 + \tau^2 J_2 + \tau^3 J_3 \,, \quad & \nabla I_1 &= \tau_1^1 I_1 + \tau_1^2 J_2 + \tau_1^3 J_3 \,, \\ \nabla J_2 &= \tau_2^1 I_1 + \tau_2^2 J_2 + \tau_2^3 J_3 \,, \quad & \nabla J_3 &= \tau_3^1 I_1 + \tau_3^2 J_2 + \tau_3^3 J_3 \,. \end{aligned} \tag{44}$$

Déterminons les surfaces développables de la congruence $\mathscr{L}$. Pour une telle surface, il existe deux fonctions ϱ et k telles que

$$\nabla(A + \varrho I_1) = kI_1 \,, \tag{45}$$

soit encore

$$(\tau^2 + \varrho\tau_1^2)\, J_2 + (\tau^3 + \varrho\tau_1^3)\, J_3 = (k - \tau^1 - \mathrm{d}\varrho - \varrho\tau_1^1)\, I_1 \,,$$

on doit donc avoir $\tau^2 + \varrho\tau_1^2 = 0$, $\tau^3 + \varrho\tau_1^3 = 0$. L'équation des surfaces développables devient enfin (par élimination de ϱ)

$$\tau^2\tau_1^3 - \tau^3\tau_1^2 = 0 \,. \tag{46}$$

Nous voyons de l'équation (46) qu'il nous faut obtenir les décompositions $(43_{1,2})$. Pour dI_1 nous l'avons déjà fait dans (41), de sorte que

(47) $$\tau_1^1 = 0\,, \quad \tau_1^2 = \omega^1\,, \quad \tau_1^3 = \omega^2\,.$$

Posons pour simplifier

(48) $$\alpha_{ij} = (I_i J_j)\,, \quad \beta_{ij} = (J_i J_j)$$

de sorte que

$$\beta_{ij} = \beta_{ji}\,, \quad \alpha_{1j} = \beta_{1j}\,, \quad \alpha_{12} = \alpha_{13} = 0\,,$$
$$\beta_{1k} = \beta_{2k} = \beta_{3k} = 0 \quad \text{pour} \quad k = 4, \dots, n\,.$$

En formant successivement les produits scalaires de l'équation (43_1) par les vecteurs I_1, J_2, J_3, nous obtenons

(49) $$\omega^1 = \tau^1\,, \quad \alpha_{22}\omega^2 = \beta_{22}\tau^2 + \beta_{23}\tau^3\,, \quad \alpha_{23}\omega^2 = \beta_{23}\tau^2 + \beta_{33}\tau^3\,.$$

Nous avons

$$\beta = \begin{vmatrix} \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{23} & \beta_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (J_2J_2) & (J_2J_3) \\ (J_2J_3) & (J_3J_3) \end{vmatrix} = [J_2, J_3] \,.\, [J_2, J_3] \neq 0\,,$$

les vecteurs J_2, J_3 étant linéairement indépendants. L'équation (49) entraîne alors

(50) $$\tau^2 = \beta^{-1}(\alpha_{22}\beta_{33} - \alpha_{23}\beta_{23})\,\omega^2\,, \quad \tau^3 = \beta^{-1}(\alpha_{23}\beta_{22} - \alpha_{22}\beta_{23})\,\omega^2$$

de façon que l'équation (46) se décompose, en vertu de (47) et (50), en $\omega^2 = 0$ (ce qui donne la couche V_1) et l'équation suivante de la couche V_1', pseudoconjuguée à la couche V_1:

(51) $$(\alpha_{23}\beta_{22} - \alpha_{22}\beta_{23})\,\omega^1 - (\alpha_{22}\beta_{33} - \alpha_{23}\beta_{23})\,\omega^2 = 0\,.$$

D'une manière tout à fait analogue, on trouve que la couche V_2', pseudoconjuguée à la couche V_2, a pour équation

(52) $$(\alpha_{13}'\beta_{22}' - \alpha_{12}'\beta_{23}')\,\omega^1 - (\alpha_{12}'\beta_{33}' - \alpha_{13}'\beta_{23}')\,\omega^2 = 0$$

où

(53) $$\alpha_{ij}' = (I_i J_j')\,, \quad \beta_{ij}' = (J_i' J_j')\,,$$
$$J_2' = -\,rI_1 + b_3 I_3 + b_4 I_4\,, \quad J_3' = -\,sI_1 + u_3 \cos^2 \varphi I_3 + u_4 \cos^2 \varphi I_4\,.$$

Si la couche V_1' coïncide avec V_2 et V_2' coïncide avec V_1, on a, bien entendu,

(54) $$\alpha_{22}\beta_{33} - \alpha_{23}\beta_{23} = 0\,, \quad \alpha_{13}'\beta_{22}' - \alpha_{12}'\beta_{23}' = 0$$

ce qui sont les équations originales de notre problème. En modifiant (54), nous obtenons

(55) $$r(b_3^2 + b_4^2) - s(u_3 b_3 + u_4 b_4)\sin^2 \varphi = 0\,,$$
$$s(b_3^2 + b_4^2) - r(u_3 b_3 + u_4 b_4)\cos^2 \varphi = 0\,.$$

Les expressions

$$(56) \qquad i_1 = b_3^2 + b_4^2\,, \quad i_2 = u_3 b_3 + u_4 b_4$$

sont les invariants de la surface considérée, car il découle de (29) que

$$\delta b_3 = b_4 e_3^4\,, \quad \delta b_4 = -\, b_3 e_3^4\,, \quad \delta u_3 = u_4 e_3^4\,, \quad \delta u_4 = -\, u_3 e_3^4$$

donc aussi $\delta i_1 = \delta i_2 = 0$.

Les expressions r et s sont aussi invariants; cela découle de (30_1). Examinons, du moins partiellement, leur signification géométrique. Sur la surface considérée π ayons une couche de courbes V donée par l'équation

$$(57) \qquad \kappa_2\omega^1 - \kappa_1\omega^2 = 0 \quad \text{c'est-à-dire} \quad \omega^1 = \kappa\kappa_1\,, \quad \omega^2 = \kappa\kappa_2$$

et un système de surfaces réglées v_V, tangentes à π suivant les courbes de la couche V, et telles que les droites génératrices aux points particuliers soient déterminées par les vecteurs I_1, c'est-à-dire par les vecteurs tangents aux courbes de la couche V_1 étudiée plus haut. En vertu de

$$\mathrm{d}(A + tI_1) = (\mathrm{d}t + \omega^1)I_1 + (\omega^2 + t\omega_1^2)I_2 + t\omega_1^3 I_3 + t\omega_1^4 I_4$$

le plan tangent à la surface réglée du système v_V au point $A + tI_1$ $(t \neq 0)$ est déterminé par le point A et les vecteurs I_1 et

$$(58) \qquad I_t = (t^{-1}\omega^2 + \omega_1^2)I_2 + \omega_1^3 I_3 + \omega_1^4 I_4$$

où, bien entendu, (57) doit être substitué à ω_i^j. Le plan asymptotique de cette surface est alors donné par le point A et les vecteurs I_1 et

$$I = \lim_{t\to\infty} I_t = \omega_1^2 I_2 + \omega_1^3 I_3 + \omega_1^4 I_4\,.$$

Ce plan est perpendiculaire au vecteur I_2 si et selement si $(I_1 I_2) = (II_2) = 0$, donc $\omega_1^2 = 0$. Nous obtenons ainsi: *La congruence de droites, formée des tangentes aux courbes de la couche V_1 de la surface π, peut être décomposée d'une seule manière en une couche de surfaces réglées V telles que le plan asymptotique de chacune de ces surfaces réglées, correspondant au point A de la surface π, soit orthogonal à la tangente à la courbe de la couche V_2, passant par le point A; la décomposition V est donnée par l'équation*

$$(59) \qquad \omega_1^2 \equiv r\omega^1 + s\omega^2 = 0\,.$$

La proposition reste valable si l'on échange les couches V_1 et V_2. Cela détermine la signification géométrique de l'annulation d'un des invariants r, s. La couche (59) sera appelée *couche asymptotique* de la surface π. Comme $sI_1 - rI_2$ est le vecteur tangent à la courbe de la couche asymptotique et (20) sont les vecteurs tangents aux courbes du réseau conjugué de la surface π, *la couche asymptotique coïncide avec une des couches du réseau conjugué si, et seulement si,* $s\sin\varphi = \pm\, r\cos\varphi$, *c'est-à-dire*

$$(60) \qquad s^2 \sin^2\varphi = r^2\cos^2\varphi\,.$$

Considérons enfin la signification géométrique de l'annulation des invariants (56). La surface réglée développable formée des tangentes à la courbe de la couche V_1 c'est-à-dire $\omega^2 = 0$) a d'après (41) son plan tangent déterminé par le point A et les vecteurs I_1, J_2; son union linéaire avec le plan tangent à la surface π au point A, c'est-à-dire l'espace E_3, est déterminé par le point A, par les vecteurs, perpendiculaires l'un à l'autre, I_1, I_2 et

$$J_2 - rI_2 = u_3 \sin^2 \varphi I_3 + u_4 \sin^2 \varphi I_4 .$$

D'une manière analogue, le plan asymptotique de la surface réglée, formée des tangentes aux courbes de la couche V_1 suivant une certaine courbe de la couche V_2 (c'est-à-dire $\omega^1 = 0$), est déterminé par le point A et les vecteurs I_1 et J_3; son union linéaire avec le plan tangent, c'est l'espace E'_3, déterminé par le point A, les vecteurs I_1, I_2 et

$$J_3 - sI_2 = b_3 I_3 + b_4 I_4 .$$

Les espaces E_3 et E'_3 sont perpendiculaires si, et seulement si, $(J_2 - rI_2, J_3 - sI_2) = 0$, *c'est-à-dire si* $i_2 = 0$. *L'espace E'_3 est perpendiculaire à lui-même, c'est-à-dire le vecteur $J_3 - sI_2$ est isotrope si, et seulement si,* $i_1 = 0$. Il résulte de l'équation $\mathrm{d}I_2 = \omega^1 J'_2 + \omega^2 J'_3$, où J'_2, J'_3 sont donnés par (53), qu'il est possible d'échanger les rôles joués par les couches V_1 et V_2.

Revenons maintenant aux équations (55). Supposons le cas général de $i_1 i_2 \neq 0$; en éliminant i_1 et i_2 nous obtenons l'équation (60), donc, sur la surface considéré, la couche asymptotique coïncide avec une des couches du réseau conjugué. Supposons, pour fixer les idées,

$$s \sin \varphi = r \cos \varphi , \tag{61}$$

la suivante équation étant alors

$$b_3^2 + b_4^2 = (u_3 b_3 + u_4 b_4) \sin \varphi \cos \varphi \tag{62}$$

c'est-à-dire $2i_1 = i_2 \sin 2\varphi$. Les surfaces considérées sont données par les équations (25), (28), (61) et (62). Il résulte de (61) et (28_2)

$$\sin \varphi \, \mathrm{d}s = \cos \varphi \, \mathrm{d}r - (r \sin \varphi + s \cos \varphi)(\varphi_1 \omega^1 + \varphi_2 \omega^2)$$

donc les équations (30) deviennent

$$\begin{aligned} &[\mathrm{d}r, \sin \varphi \omega^1 + \cos \varphi \omega^2] + (.)[\omega^1 \omega^2] = 0 , \\ &[\mathrm{d}\varphi_1 \omega^1] + [\mathrm{d}\varphi_2 \omega^2] + (.)[\omega^1 \omega^2] = 0 . \end{aligned} \tag{63}$$

Si nous écrivons

$$\Delta b_3 = \mathrm{d}b_3 - b_4 \omega_3^4 , \quad \Delta b_4 = \mathrm{d}b_4 + b_3 \omega_3^4 ,$$
$$\Delta u_3 = \mathrm{d}u_3 - u_4 \omega_3^4 , \quad \Delta u_4 = \mathrm{d}u_4 + u_3 \omega_3^4 ,$$

nous obtenons de (62) l'équation

$$\begin{aligned} 2b_3 \Delta b_3 + 2b_4 \Delta b_4 = {} & (b_3 \Delta u_3 + b_4 \Delta u_4 + u_3 \Delta b_3 + u_4 \Delta b_4) \sin \varphi \cos \varphi + \\ & + (u_3 b_3 + u_4 b_4) \cos 2\varphi \, . (\varphi_1 \omega^1 + \varphi_2 \omega^2) \end{aligned} \tag{64}$$

et le système (29) devient

$$\begin{aligned}(65)\qquad &\sin^2 \varphi[\Delta u_3\omega^1] + [\Delta b_3\omega^2] + (.)\,[\omega^1\omega^2] = 0\,,\\ &[\Delta b_3\omega^1] + \cos^2 \varphi[\Delta u_3\omega^2] + (.)\,[\omega^1\omega^2] = 0\,,\\ &\sin^2 \varphi[\Delta u_4\omega^1] + [\Delta b_4\omega^2] + (.)\,[\omega^1\omega^2] = 0\,,\\ &[\Delta b_4\omega^1] + \cos^2 \varphi[\Delta u_4\omega^2] + (.)\,[\omega^1\omega^2] = 0\,;\end{aligned}$$

il n'est pas necéssaire de récrire le système (27). Le système entier (25), (28), (61), (62) et (63), (65), (27) est en involution, de sorte que *les surfaces en question existent et dépendent de* $2n - 2$ *fonctions d'une variable.*

Bibliographie

[1] *A. Švec:* L'application des variétés à connexion à certains problèmes de la géométrie différentielle. Чехосл. мат. журнал, *10* (*85*) 1960, 523—550.

Резюме

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ СОПРЯЖЕННЫХ СЕТЕЙ В E_n

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Пусть на поверхности π, описываемой точкой $A(u, v)$ в евклидовом пространстве E_n, дан слой кривых $\mathfrak{V}$; пусть касательные к этим кривым $A(u, v) + tI(u, v)$ описывают прямолинейную конгруэнцию L. Каждую касательную можно погрузить в инвариантное $E_3(u, v)$, образованное точкой $A(u, v)$, и векторами $I(u, v)$, $I_u(u, v)$, $I_v(u, v)$. Проектируя $E_3(u, v)$ в $E_3(u + \mathrm{d}u, v + \mathrm{d}v)$ в направлении пространства $E_{n-3}(u, v)$, тотально перпендикулярного к $E_3(u, v)$, мы получаем из L прямолинейную конгруэнцию с евклидовой связностью $\mathscr{L}$; см. [1]. Развертывающиеся поверхности конгруэнции $\mathscr{L}$ высекают на π слой $\mathfrak{V}$ и дальнейший слой $\mathfrak{V}'$, *псевдосопряженный* с $\mathfrak{V}$. Сеть на поверхности π, составленную из слоев $\mathfrak{V}_1$ и $\mathfrak{V}_2$, мы назовем *псевдосопряженной сетью*, если $\mathfrak{V}_1$, соотв. $\mathfrak{V}_2$, является псевдосопряженным с $\mathfrak{V}_2$, соотв. $\mathfrak{V}_1$.

Показано что *в* E_n *существуют поверхности со следующими свойствами:* 1° *они обладают сопряженной сетью,* 2° *сеть, кривые которой делят пополам в каждой точке угол кривых сопряженной сети является* (обязательно ортогональной) *псевдосопряженной сетью. Эти поверхности зависят от* $2n - 2$ *функций одного переменного.*

Для поверхностей с сопряженной сетью доказывается следующая теорема существования: *Пусть дана област параметров* (u, v) *и две независимые функции* $F_\varrho(x_1, x_2, x_3, u, v)$. *Тогда в* E_n *существуют поверхности с сопряженной сетью так, что:* 1° *касательные к кривым* $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ *в каждой точке поверхности являются биссектрисами углов, образуемых сопряженными касательными,* 2° *для угла* 2φ *сопряженных касательных и расстояний* $\overline{AA_1}$, $\overline{AA_{-1}}$ *точек исходной поверхности от соответственных пребразований Лапласа имеет место* $F_\varrho(2\varphi, \overline{AA_1}, \overline{AA_{-1}}, u, v) = 0$. *Эти поверхности зависят от* $2n$ *функций одного переменного.*