Czechoslovak Mathematical Journal

Ján Jakubík

Представление и расширение l-групп

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 2, 267–283

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100566

Чехословацкий математический журнал т. 13 (88) 1963, Прага

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И РАСШИРЕНИЕ l-ГРУПП

ЯН ЯКУБИК (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 31/III 1961 г.)

В работе решается (в § 1) проблема погружения частично упорядоченной коммутативной группы в частично упорядоченную группу с делением. Затем (в § 2) исследуется понятие „расширения", (введенное А. Г. Пинскером в работах [10], [11] для полных l-групп и примененное на многих местах монографии [7] для K-пространств).

1. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ АРХИМЕДОВСКИХ l-ГРУПП

1.0. В работе [4]. Гофман (C. Gofman) построил представление архимедовской l-группы при помощи т. наз. функций Каратеодори [2]. Отметим, что по определению функций Каратеодори в [4] (стр. 111 – 112) не имеем дела с действительными функциями в обычном смысле слова. Исходным моментом и главным средством для развития рассуждений служат Гофману определенные подмножества l-группы, которые первым исследовал П. Жаффар (P. Jaffard) и назвал их „filets"; сравни [5].

Известно, что каждую архимедовскую l-группу G_1 можно погрузить в полную l-группу G_2 (сравни [1], гл. 14, § 9). Далее известно, что каждое K-пространство можно представить при помощи действительных функций ([7], гл. 13, теорема 3.11). Следовательно, если можно будет доказать, что полную l-группу можно погрузить в K-пространство, то из предыдущего будет вытекать, что архимедовскую l-группу G_1 можно представить при помощи действительных функций.

О. Г. Пинскер доказал ([10]; сравни также [8], § 6), что каждую полную l-группу G_2 можно погрузить в K-пространство. При доказательстве используется теория „непересекающихся сумм l-групп" ([10], § 4). Доказательство ведется в основном так, что сначала построится разложение G_2 в прямое произведение $G_2 = AB$ где A – в определенном смысле „непрерывная" и B – „дискретная" группа. Затем доказывается, что A является (при удобном определении умножения αx, где $x \in A$ и α – действительное число) K-пространством. Из специального строения l-группы B вытекает, что B можно погрузить в K-пространство ([10], § 8, стр. 269 – 279).

В § 1 мы докажем: Каждую частично упорядоченную коммутативную группу G можно погрузить в частично упорядоченную группу $Z(G)$ так, что $Z(G)$ является группой с делением (т.е. для каждого $a \in Z(G)$ и для каждого натурального числа n существует $x \in Z(G)$ так, что $nx = a$). Частично упорядоченную группу $Z(G)$ построим обычным алгебраическим способом, исходя из множества всех „дробей" вида a/n, где $a \in G$ и n — натуральное число. Если же G является l-группой, то и $Z(G)$ является l-группой, и G представляет собой l-подгруппу в $Z(G)$. Если G – архимедовская l-группа, то и $Z(G)$ является архимедовской. Если G – архимедовская l-группа и если l-группу $Z(G)$ погрузим в полцую l-группу G_1 (обычным способом, при помощи сечений Делекинда, сравни [1], гл. 14), то можем определить умножение элементов $x \in G_1$ на действительные числа так, что G_1 окажется K-пространством.

Мы пользуемся обозначениями по образцу [1] и понятием K-пространства по [7].

1.1. Пусть G — коммутативная частично упорядоченная группа. Пусть $Z(G)$ — — множество всех выражений вида x/α, где $x \in G$, $\alpha \in P$, причем P — множество всех натуральных чисел. В множестве $Z(G)$ определим равенство $=$ следующим образом: $x/\alpha = y/\beta$ тогда и только тогда, если $\beta x = \alpha y$. Легко можно убедиться в том, что определенное таким образом отношение $=$ является рефлексивным, симметрическим и транзитивным.

1.2. Пусть $x, x', y, y' \in G$, $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in P$.

Если $x/\alpha = x'/\alpha'$, $y/\beta = y'/\beta'$, то $\alpha' x = \alpha x'$, $\beta' y = \beta y'$, так что $\alpha'\beta'(\beta x + \alpha y) = \alpha\beta(\beta' x' + \alpha' y')$.

Имея в виду предыдущие рассуждения можем определить в $Z(G)$ операцию $+$ посредством уравнения $x/\alpha + y/\beta = (\beta x + \alpha y)/\alpha\beta$. Мы скажем, что элемент $z \in Z(G)$ является положительным, если существует $x \in G$, $x > 0$ так, что $z = x/\alpha$ для подходящего α. Легко можно проверить, что $Z(G)$ является по отношению к операции $+$ коммутативной группой. При этом $-(x/\alpha) = -x/\alpha$, $\beta(x/\alpha) = (\beta x)/\alpha$. Далее обозначим символом $(Z(G))^+$ множество состоящее из всех положительных элементов $z \in Z(G)$ и нулевого элемента группы $Z(G)$. В таком случае сумма двух элементов из $(Z(G))^+$ также принадлежит $(Z(G))^+$; если $x/\alpha \in (Z(G))^+$, $x \neq 0$, то $-(x/\alpha) \notin (Z(G))^+$. Согласно [1] (гл. 14, теорема 1), можем $Z(G)$ считать частично упорядоченной группой, если только для x/α, $y/\beta \in Z(G)$ положим $x/\alpha \leqq y/\beta$ именно тогда, когда $y/\beta - x/\alpha \in (Z(G))^+$.

Замечание. Если G – коммутативная l-группа, $z = x/\alpha$, то $z > 0$ тогда и только тогда, если $x > 0$.[1])

[1]) Символ 0 употребляем для обозначения нулевого элемента в различных ч. у. группах; на местах, где бы могло возникнуть сомнение, о которой ч. у. группе идет речь, пишем, например, $0 \in Z(G)$, $0 \in G$, и т. п.

1.3. Пусть G_1 — множество всех $z \in Z(G)$, для которых существует $x \in G$ так, что $z = x/1$. Очевидно, что G_1 представляет собой ч.у. подгруппу в $Z(G)$, изоморфную ч.у. группе G. Элементы x, $x/1$ мы будем считать тождественными и получаем утверждение:

Теорема. *Пусть G — коммутативная ч.у. группа. Существует коммутативная ч.у. группа $Z(G)$ так, что G является ч.у. подгруппой в $Z(G)$, причем:*

1) *если $z \in Z(G)$, то существует $x \in G$ и натуральное число α так, что $\alpha z = x$,*

2) *если $z \in Z(G)$ их α — натуральное число, то существует такое $z_1 \in Z(G)$, что $\alpha z_1 = z$.*

1.4. Теорема. *Пусть G — коммутативная l-группа. Тогда и $Z(G)$ является l-группой и G — l-подгруппой в $Z(G)$.*

Доказательство. a) Сначала докажем, что $Z(G)$ является l-группой. Достаточно доказать, что для каждого элемента $z \in Z(G)$ существует элемент $z \cup 0$. Если $z = x/\alpha$, то $z \cup 0 = (x \cup 0)/\alpha$. Если, то есть, $z' \in Z(G)$, $z' \geqq z$, $z' \geqq 0$, то $\alpha z' \geqq x$, $\alpha z' \geqq x \cup 0$, $z' \geqq (x \cup 0)/\alpha$.

b) Из предыдущего видно, что G есть l-подгруппа в $Z(G)$.

1.5. Пусть r — рациональное число, $r = \alpha/\beta$, где β — натуральное и α — целое число. Для каждого $x/\vartheta \in Z(G)$ мы положим $r(x/\vartheta) = (\alpha x)/(\beta\vartheta)$. Если r — целое число, то это определение совпадает с определением 1.2.

1.6. Всюду в дальнейшем символы R, R' означают, соответственно, множество всех действительных чисел и множестьо всех рациональных чисел. Пусть $A, B \subset Z(G)$, $P, Q \subset R'$. Мы будем пользоваться символикой, принятой обычно при вычислениях с комплексами (например, $A + B$ будет множеством всех элементов из $Z(G)$ вида $a + b$, $a \in A$, $b \in B$; PA будет множеством всех элементов из $Z(G)$, которые можно писать в виде αa, $\alpha \in P$, $a \in A$). Если множество P имеет только один элемент α, то будем писать αA вместо PA.

1.7. *Пусть G — архимедовская l-группа. Тогда и $Z(G)$ является архимедовской l-группой.*

Доказательство. Если бы l-группа $Z(G)$ не была архимедовской, существовали бы элементы x/α, $y/\beta \in Z(G)$, $x/\alpha > 0$ такие, что для каждого натурального числа n было бы $n(x/\alpha) < y/\beta$. Из этого вытекало бы $n(\beta x) < \alpha y$, что невозможно, так как $\beta x > 0$.

1.8. До конца § 1 будем предполагать, что G является архимедовской l-группой. Так как $Z(G)$ представляет собой архимедовскую l-группу, то согласно [1] (гл. 14, теорема 17 и § 7, лемма 1) $Z(G)$ можно погрузить в полную l-группу $U(G)$. Мы докажем, что в l-группе $U(G)$ можно определить умножение αx, где α — — действительное число и $x \in U(G)$ так, чтобы $U(G)$ была K-пространством. Это утверждение можно доказать, опираясь на цитированные результаты работы [10]; следующий ниже прямой способ доказательства кажется, однако, более естественным и коротким. Далее, отсюда вытекает: Пусть G_1, G_2 — архимедовские l-группы. Пусть частично упорядоченные множества $Z(G_1)$, $Z(G_2)$ изоморфны. Тогда и частично упорядоченные множества $U(G_1)$, $U(G_2)$ изоморфны. Значит, построение структуры $U(G)$ является в определенном смысле „инвариантным" по отношению к операции $+$. (Сравнии также отд. 2.1.)

$U(G)$ мы построим таким же способом, как в доказательстве цитированной теоремы из [1]. Из хода доказательства этой теоремы вытекает: Каждому множеству $X \subset Z(G)$, ограниченному сверху в $Z(G)$, поставлен посредством упомянутого построения в соответствие элемент $x \in U(G)$; при этом в $U(G)$ справедливо

$$x = \sup X . \tag{1.1}$$

К каждому элементу $x \in U(G)$ существует множество $X \subset Z(G)$, ограниченное сверху в $Z(G)$ и удовлетворяющее соотношению (1.1). Если при этом символом $H(x)$ обозначено множество всех верхних границ множества X в $Z(G)$ и если символы X_1, x_1, $H(x_1)$ имеют аналогичное значение, то $x \leqq x_1$ тогда и только тогда, когда $H(x_1) \subset H(x)$. При тех же обозначениях в $U(G)$, далее, будет

$$x + x_1 = \sup (X + X_1) . \tag{1.2}$$

1.8.1. *Пусть $x \in Z(G)$, $x > 0$, пусть P — множество всех рациональных чисел α, $0 < \alpha < 1$. Тогда в $U(G)$ имеет место соотношение* $\sup (Px) = x$.

Доказательство. Если $\alpha \in P$, $\alpha = m/n$, $0 < m < n$, то $(m/n)\, x < x$, так что $\sup (Px) \leqq x$. Предположим, что было бы $\alpha x \leqq y < x$ для каждого $\alpha \in P$. Тогда было бы $(n - 1)\, x \leqq ny$ для каждого натурального $n > 1$, следовательно $n(x - y) \leqq x$. Но так как $x - y > 0$, и так как $U(G)$ как полная l-группа является архимедовской, то мы получаем таким образом противоречие. Итак, $\sup (Px) = x$.

1.8.2. *Пусть $x \in Z(G)$, $x > 0$, $\alpha \in R'$, $\alpha > 0$, пусть Q означает множество всех рациональных чисел β, $0 < \beta < \alpha$. Тогда в $U(G)$ справедливо равенство* $\sup (Qx) = \alpha x$.

Доказательство. Пусть P имеет то же значение, как в предыдущем отделе. Если β' пробегает множество P, то $\alpha\beta'$ пробегает множество Q, и наоборот. Соответствие $y \to \alpha x$ определяет, очевидно, автоморфизм ч.у. множества $(Z(G))^+$. Из этого по 1.8.1 вытекает

$$\sup (Qx) = \sup (\alpha(Px)) = \alpha \sup (Px) = \alpha x .$$

1.9. Пусть $\alpha \in R$, $\alpha > 0$, $x \in U(G)$, $x > 0$. Пусть P означает множество всех $\alpha_1 \in R'$, $0 < \alpha_1 < \alpha$. Пусть выполняется (1.1). В таком случае множество PX ограничено сверху в $Z(G)$. Если в $U(G)$ $y = \sup (PX)$, то мы положим $\alpha \,.\, x = y$.

Это определение является однозначным. Если, то есть для $X_1, X_2 \subset Z(G)$ в $U(G)$ выполняется $y_1 = \sup (PX_1)$, $y_2 = \sup (PX_2)$, то для каждого $x_1 \in X_1$,

$x_2 \in X_2$, $u_1 \in H(y_1)$, $\alpha_1 \in P$ мы получаем последовательно соотношения

$$\alpha_1 x_1 \leqq u_1\,, \quad x_1 \leqq \frac{1}{\alpha_1} u_1\,, \quad x_2 \leqq \frac{1}{\alpha_1} u_1\,, \quad \alpha_1 x_2 \leqq u_1\,, \quad u_1 \in H(y_2)\,.$$

Следовательно, $H(y_1) \subset H(y_2)$, так что $y_2 \leqq y_1$. Аналогично можно доказать обратное неравенство; итак, $y_1 = y_2$.

Замечания. 1. Если выполнены предположения, приведенные в 1.9, и если $x \in Z(G)$, $\alpha \in R'$, то согласно 1.8.2 будет $\alpha x = \alpha \,.\, x$. Поэтому мы будем в дальнейшем писать αx вместо $\alpha \,.\, x$.

2. Из определения, введенного в 1.9 непосредственно вытекает следующее: если выполнены предположения, приведенные в 1.9 и если $t \in U(G)$, $x \leqq t$, $\beta \in R$, $\alpha \leqq \beta$, то $\alpha x \leqq \beta t$.

В отделах 1.10, 1.11, 1.12 имеют символы α, P, x, X то же значение, как в 1.9. Далее, $y \in U(G)$, $y > 0$, $Y \subset Z(G)$, $y = \sup Y$, $\beta \in R$, $\beta > 0$ и Q есть множество всех $\beta_1 \in R'$, $0 < \beta_1 < \beta$. Обозначим $\gamma = \alpha + \beta$, $\vartheta = \alpha\beta$; символы S, T имеют аналогичное значение по отношению к γ, ϑ, как имеет P по отношению к α.

1.10. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\sup(PX + PY) \leqq \sup(PX) + \sup(PY)\,.$$

Из бесконечной дистрибутивности между сложением и структурными операциями ([1], гл. XIV, § 10) вытекает

$$\sup(PX) + \sup(PY) \leqq \sup(PX + PY)\,.$$

Согласно (1.2), 1.9 и 1.6 имеем

$$\alpha(x + y) = \alpha \sup(X + Y) = \sup(P(X + Y)) \leqq \sup(PX + PY) = \\ = \sup(PX) + \sup(PY) = \alpha x + \alpha y\,.$$

Пусть, далее, $\alpha_1, \alpha_2 \in P$, $\alpha_3 = \max(\alpha_1, \alpha_2)$. Для каждого $x_1 \in X$, $y_1 \in Y$

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 \leqq \alpha_3 x_1 + \alpha_3 y_1 \leqq \alpha(x + y)\,,$$

так что будет тоже $\alpha x + \alpha y \leqq \alpha(x + y)$.

1.11. $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x$.

Доказательство. Из равенства $P + Q = S$ вытекает

$$(\alpha + \beta)\, x = \sup(SX) = \sup((P + Q)\, X) \leqq \sup(PX + QX) = \\ = \sup(PX) + \sup(QX) = \alpha x + \beta x\,.$$

Для каждого $x_1, x_2 \in X$ будет $x_3 = x_1 \cup x_2 \leqq x$; значит, в силу замечания 2, следующего за 1.9,

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 \leqq \alpha_1 x_3 + \beta_1 x_3 = (\alpha_1 + \beta_1)\, x_3 \leqq \gamma x$$

для каждого $\alpha_1 \in P$, $\beta_1 \in Q$. Следовательно, также $\alpha x + \beta x \leqq \gamma x$.

1.12. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x$.

Доказательство. Обозначим $\beta x = y$, $QX = Y$. Из равенства $PQ = T$ и из уравнения $\beta x = \sup Y$ вытекает

$$\alpha(\beta x) = \alpha y = \sup(PY) = \sup(PQX) = \sup(TX) = \vartheta x\,.$$

1.13. Для $x \in U(G)$, $x = 0$ и для каждого $\alpha \in R$ положим $\alpha x = x$. Для $\alpha \in R$, $\alpha = 0$ и для каждого $x \in U(G)$ мы положим также $\alpha x = 0 \in U(G)$. Пусть $x \in U(G)$, $x > 0$, $\alpha \in R$, $\alpha < 0$. Теперь мы определим $\alpha x = -((-\alpha)\, x)$. Если $\alpha \in R$, $x \in U(G)$, $x < 0$, то мы положим $\alpha x = -(\alpha(-x))$.

Из введенных определений вытекает: результат из отдела 1.10 имеет место и тогда, когда $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $\alpha \in R$. Утверждение 1.11 справедливо и при условии $\alpha \in R$, $\beta \in R$, $x \geqq 0$ или $x < 0$. При тех же предположениях справедливо и утверждение 1.12.

1.14. Пусть $\alpha \in R$, $x \in U(G)$. Элемент x можно представить в виде $x = y - z$, $y, z \in (U(G))^+$. Положим $\alpha x = \alpha y - \alpha z$. Это определение однозначно: если одновременно $x = y' - z'$, $y', z' \in (U(G))^+$, то $y + z' = y' + z$, следовательно, по 1.10 (или же по 1.13)

$$\alpha y + \alpha z' = \alpha(y + z') = \alpha(y' + z) = \alpha y' + \alpha z\,,$$
$$\alpha y - \alpha z = \alpha y' - \alpha z'\,.$$

1.15. Пусть $\alpha, \beta \in R$, $x, y \in U(G)$. Тогда[1']

$$\alpha(x + y) = \alpha(x^+ - x^- + y^+ - y^-) = \alpha(x^+ + y^+) - \alpha(x^- + y^-) =$$
$$= (\alpha x^+ - \alpha x^-) + (\alpha y^+ - \alpha y^-) = \alpha x + \alpha y\,,$$
$$(\alpha + \beta)\, x = (\alpha + \beta)\, x^+ - (\alpha + \beta)\, x^- = (\alpha x^+ - \alpha x^-) + (\beta x^+ - \beta x^-) =$$
$$= \alpha x + \beta x\,,$$
$$\alpha(\beta x) = \alpha(\beta x^+ - \beta x^-) = \alpha(\beta x^+) - \alpha(\beta x^-) = (\alpha\beta)\, x^+ -$$
$$- (\alpha\beta)\, x^- = (\alpha\beta)\, x\,.$$

Этим мы доказали, что справедлива

1.16. Теорема. *Каждую архимедовскую l-группу G можно погрузить в K-пространство $U(G)$.*

Из предыдущей теоремы о и из теоремы о представлении K-пространства при помощи действительных функций ([7], гл. 13, теорема 3.11) вытекает:

К каждой архимедовской l-группе G существует l-группа G', элементами которой служат действительные функции[2]) *(на выбранном подходящим образом множестве Q, причем структурные операции и операция $+$ имеют в G' обычное значение), такая, что l-группы G, G' изоморфны.*

[1']) В отличие от [1] мы обозначаем $x^- = -(x \cap 0)$ (в солгасии с [7], отд. 1.5).

2. РАСШИРЕННЫЕ l-ГРУППЫ

2.1. Мы скажем, что l-группа G *обладает свойством* (f), если справедливо следующее утверждение:

Если $\{x_i\} \subset G^+$ и если два любых различных элемента этого множества взаимно дизъюнктны, то в G существует элемент $\bigcup x_i$. (Сравни [1], гл. 15, § 3, Упр. 2.)

Г. Биркгоф поставил вопрос, возможно ли каждую архимедовскую l-группу G погрузить в полную l-группу G', обладающую свойством (f). (Сравни [1], гл. 15, § 14, проблема 108.) Так как каждую архимедовскую l-группу можно погрузить в полную l-группу, можем, не умаляя общности, предполагать, что G есть полная l-группа. В русском переводе книги [1] (стр. 350) имеется заметка, что эту задачу решил А. Г. Пинскер в работе [10]. А. Г. Пинскер строит для каждой полной l-группы G полную l-группу $R(G)$, удовлетворяющую определенному условию максимальности ([10], стр. 291, определение 1); $R(G)$ называется *максимальным расширением* l-группы G. Полная l-группа G называется *расширенной группой,* если $R(G) = G$. При помощи трансфинитной индукции затем доказывается ([10], теорема 6 и лемма 6), что полная l-группа G является расширенной тогда и только тогда, когда она имеет свойство (f). Аналогичное понятие расширенного K-пространства встречается на многих местах книги [7]. (Причина этого заключается в том, что расширенное K-пространство имеет много „хороших" свойств; сравни также [8].) Расширенным l-группам и K-пространствам посвящены еще работы [11], [12], [13].

Строя l-группу $R(G)$, автор работы [10] опирается на систему определенных подмножеств множества G^+, определенную при помощи частичного упорядочения и операции $+$ в G (на т. наз. систему комплексов, см. [10], определение 2). Свойство (f) касается только частичного упорядочения множества G^+, не говорится в нем ничего о групповой операции. Поэтому является вполне естественным следующий вопрос:

(*) *Пусть заданы полные l-группы G_1, G_2 и пусть G_1, G_2 как частично упорядеченные множества (т.е. мы не берем во внимание групповые операции) изоморфны. Существуют тогда расширенные и полные l-группы G'_i $(i = 1, 2)$, в которые можно погрузить G_1, G_2, причем частично упорядоченные множества G'_1, G'_2 изоморфны?*

Положительный ответ на поставленный вопрос означал бы, что построение l-группы G' является в определенном смысле „инвариантным" по отношению к групповой операции в G. Из работы А. Г. Пинскера не вытекает ответ на этот вопрос, так как — ввиду выше приведенного — при построении множества P использована и операция $+$. (Сравни [10], § 2, определение 2 и теорема 2.)

---

[2]) Согласно цитированной теореме из [7] речь идет о функциях f таких, что для каждого $q \in Q f(q)$ является действительным числом или одним из символов $+\infty$, $-\infty$.

К данной полной l-группе G мы построим структуру H так, что частично упорядоченное множество G^+ будет подструктурой в H. Построение структуры H не зависит от того, каким образом определена на G^+ операция $+$. Далее мы построим l-группу G' так, что будет $(G')^+ = H$, причем G' является полной l-группой, обладающей свойством (f), и l-группа G будет погруженной в l-группу G'. Из такого хода рассуждений вытекает, что ответ на поставленный выше вопрос положителен. При построении *мы не воспользуемся аксиомой выбора.*

Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что G — полная l-группа. Напомним еще, что каждая полная l-группа является коммутативной. (Сравни [1].)

2.2. Каждому множеству $\{x_i\} \subset G^+$, $\{x_i\} \neq \emptyset$, любых два элемента которого взаимно дизъюнктны, поставим в соответствие символ Sx_i. Множество всех таких символов обозначим через H. Если $Sx_i, Sy_j \in H$, то мы положим $Sx_i \leqq Sy_j$ тогда и только тогда, когда для каждого x_i

$$x_i = \bigcup_j (x_i \cap y_j)\,. \tag{2.1}$$

Если $Sx_i \leqq Sy_j$, $Sy_j \leqq Sx_i$, то мы считаем символы Sx_i, Sy_j равными и пишем $Sx_i = Sy_j$.

2.3. *Отношение $\leqq$ является транзитивным на H.*

Доказательство. Пусть $Sx_i \leqq Sy_j$, $Sy_j \leqq Sz_k$. Тогда (2.1) справедливо для каждого x_i и одновременно для каждого y_j

$$y_j = \bigcup_k (y_j \cap z_k)\,.$$

Из этого для каждого x_i вытекает

$$x_i = \bigcup_j [x_i \cap (\bigcup_k (y_j \cap z_k))] = \bigcup_j \bigcup_k (x_i \cap y_j \cap z_k) \leqq \bigcup_j \bigcup_k (x_i \cap z_k) =$$
$$= \bigcup_k (x_i \cap z_k) \leqq x_i\,,$$

так что по 2.2 будет $Sx_i \leqq Sz_k$.

2.4. *Отношение $=$ является эквивалентностью на H.*

Доказательство. Рефлексивность и симметричность вытекает непосредственно из определения. Транзитивность вытекает из 2.3.

Значит, множество H с равенством $=$ оказывается частично упорядоченным при помощи отношения $\leqq$.

2.5. В следующем рассуждении мы считаем, что индексы i, j пробегают множество I и индекс k множество K:

Пусть $Sx_i, Sy_k \in H$, $Sx_i \leqq Sy_k$. Для фиксированного $k \in K$ мы обозначим

$$\bar{x}_k = \bigcup_i (x_i \cap y_k)\,.$$

Тогда $S\bar{x}_k = Sx_i$.

Доказательство. Для фиксированного i по предположению и по 2.2 будет $x_i = \bigcup_k (x_i \cap y_k)$, следовательно,

$$\bigcup_k (x_i \cap \bar{x}_k) = \bigcup_k (x_i \cap (\bigcup_j (x_j \cap y_k))) = \bigcup_k \bigcup_j (x_i \cap x_j \cap y_k) = \bigcup_k (x_i \cap y_k) = x_i ,$$

так что, согласно 2.2 $Sx_i \leqq S\bar{x}_k$. Далее, для фиксированного $k \in K$

$$\bigcup_i (\bar{x}_k \cap x_i) = \bigcup_i (\bigcup_j (x_j \cap y_k) \cap x_i) = \bigcup_i \bigcup_j (x_j \cap y_k \cap x_i) = \bigcup_i (x_i \cap y_k) = \bar{x}_k ,$$

так что $S\bar{x}_k \leqq Sx_i$.

2.6. *Пусть Sx_i, $Sy_k \in H$. Пусть для каждого x_i существует элемент $y_{k(i)} \in \in \{y_k\}$ такой, что*

$$x_i \leqq y_{k(i)} . \tag{2.2}$$

Тогда $Sx_i \leqq Sy_k$.

Доказательство. Из (2.2) вытекает для каждого y_k, $y_k \neq y_{k(i)}$ соотношение $y_k \cap x_i = 0$, так что

$$\bigcup_k (x_i \cap y_k) = x_i \cap y_{k(i)} = x_i ,$$

чем утверждение доказано.

2.7. Если множество $\{x_i\} \subset G^+$ имеет только один элемент x, то мы будем писать $Sx_i = x$. Согласно 2.6 можем в таком случае ч. у. множество G^+ считать ч. у. подмножеством ч. у. множества H. Далее, согласно 2.6 элемент 0 является наименьшим элементом в H. Ввиду 2.6 далее справедливо: если $x \in H$, $x = Sx_i$, то для каждого x_i выполнено неравенство $x_i \leqq x$.

В следующих отделах 2.7.1 – 2.9 мы докажем, что H является относительно полной структурой. В рассуждениях отделов 2.7.1 и 2.8 мы также используем операцию $+$ определеную на G^+. Из сказанного ниже будет ясным, что операция $+$ применяется *не для построения множества H*, но для доказательства того, что частично упорядоченное множество H имеет некоторые *специальные свойства*.

2.7.1. Введем следуещее обозначение (сравни [6]):

Если $A \subset G^+$, то символом $K'(A)$ мы обозначим множество всех $x \in G^+$, для которых из соотношения $a \in A$ вытекает $a \cap x = 0$. Далее мы обозначим $K(A) = K'(K'(A))$. Из бесконечной дистрибутивности вытекает: если M — множество, ограниченное сверху в G^+ и если $M \subset K'(A)$, то $\sup M \subset K'(A)$. Очевидно, что $K'(A)$, $K(A)$ являются идеалами в структуре G^+. Из [1] (гл. 14, теорема 6) мы получаем: если $x, y \in K'(A)$, то $x + y \in K'(A)$. Аналогично для $K(A)$.

Пусть $x \in G^+$. Обозначим

$$x_1 = \sup g,\ g \in K(A),\ g \leqq x, \quad x_2 = \sup g,\ g \in K'(A),\ g \leqq x .$$

Далее мы обозначим $x - (x_1 \cup x_2) = y$. Очевидно, $y \geqq 0$. Так как $x_1 \cap x_2 = 0$, то $x_1 \cup x_2 = x_1 + x_2$, следовательно, $x = x_1 + x_2 + y$. Предположим, что $y > 0$. Если $y \in K'(A)$, то $x_2 + y \in K'(A)$, $x_2 < x_2 + y$, что противоречит предположению. Следовательно, существует $a \in A$ так, что $a \cap y = a_1 > 0$. Тогда $y = a_1 + b$, $b \geqq 0$, $a_1 \in K(A)$. Из этого вытекает

$$x = x_1 + a_1 + x_2 + b\,, \quad x_1 + a_1 \in K(A)\,, \quad x_1 + a_1 \leqq x\,, \quad x_1 + a_1 > x_1\,.$$

Но это тоже противоречит условию, так что $y = 0$. Этим мы доказали утверждение:

Элемент $x \in G^+$ *можно представить в виде* $x = x_1 + x_2 = x_1 \cup x_2$, $x_1 \in K(A)$, $x_2 \in K'(A)$.

Если A имеет только один элемент y, то мы пишем $K(y) = K(A)$, $K'(y) = K'(A)$.

2.8. Пусть $x, y \in H$, $x = Sx_i(i \in M)$, $y = Sy_j(j \in N)$. Согласно 2.7.1 можно элементы x_i, y_j представить в виде

$$x_i = x_{ij} + x'_{ij} = x_{ij} \cup x'_{ij}\,, \tag{2.3}$$
$$y_j = y_{ij} + y'_{ij} = y_{ij} \cup y'_{ij}\,,$$

причем $x_{ij}, y_{ij} \in K(x_i \cap y_j)$, $x'_{ij}, y'_{ij} \in K'(x_i \cap y_j)$. Из полноты l-группы G вытекает, что в G^+ имеется элемент $\bigcup\limits_j x_{ij}$. Следовательно, элемент x_i можно представить в виде

$$x_i = (\bigcup_j x_{ij}) + x'_i\,, \quad x'_i \geqq 0\,. \tag{2.3'}$$

Согласно (2.3) в таком случае будет $x'_i \leqq x'_{ij}$, следовательно,

$$x'_i \in K'(x_i \cap y_j)\,. \tag{2.4}$$

Аналогично

$$y_j = (\bigcup_i y_{ij}) + y'_j\,, \quad y'_j \in K'(x_i \cap y_j)\,.$$

По 2.7.1 тогда будет $x'_i \cap y'_j \in K'(x_i \cap y_j)$. Но одновременно $x'_i \cap y'_j \leqq x_i \cap y_j$ так что $x'_i \cap y'_j \in K(x_i \cap y_j)$. Следовательно, должно быть

$$x'_i \cap y'_j = 0\,. \tag{2.5}$$

Обозначим $x_{ij} \cup y_{ij} = z_{ij}$. По 2.7.1 $z_{ij} \in K(x_i \cap y_j)$.

Пусть $p \in M$, $q \in N$, $(p, q) \neq (i, j)$. Тогда

$$x_p \cap y_q \in K'(x_i \cap y_j),$$

откуда последовательно получаем

$$z_{ij} \cap x_p \cap y_q = 0\,, \quad z_{ij} \in K'(x_p \cap y_q)\,,$$
$$z_{ij} \cap z_{pq} = 0\,. \tag{2.6}$$

Так как $x'_i \leqq x_i$, будет для $i, p \in M$, $i \neq p$

$$x'_i \cap x'_p = 0\,, \tag{2.7}$$

и аналогично для $j, q \in N$, $j \neq q$

(2.8) $$y'_j \cap y'_q = 0\,.$$

Далее, для $i, p \in M$, $j \in N$ будет

$$x'_p \cap z_{ij} = x'_p \cap (x_{ij} \cup y_{ij}) = (x'_p \cap x_{ij}) \cup (x'_p \cap y_{ij})\,.$$

Если $i = p$, то согласно (2.3) и (2.4) $x'_i \cap x_{ij} = 0$. Если $i \neq p$, то (так как $x'_p \leqq x_p$, $x_{ij} \leqq x_i$) $x'_p \cap x_{ij} = 0$. Получаем $x'_p \cap z_{ij} = x'_p \cap y_{ij}$. Обозначим $x'_p \cap y_{ij} = c$. Согласно (2.4) $c \in K'(x_p \cap y_j)$. Далее, $c \leqq y_j$, $c \leqq x_p$, следовательно, $c \in K(x_p \cap y_j)$. Из этого вытекает $c = 0$, т.е.

(2.9) $$x'_p \cap z_{ij} = 0\,.$$

Аналогично можно доказать: Если $i \in M$, $j, q \in N$, то

(2.10) $$y'_q \cap z_{ij} = 0\,.$$

Пусть $\{v_l\}$ $(l \in L)$ – множество всех элементов z_{ij}, x'_i, y'_j $(i \in M, j \in N)$. Согласно (2.6), (2.7), (2.8), (2.10) и (2.5) каждых два различных элемента этого множества взаимно дизъюнктны. Следовательно, в H существует элемент $v = Sv_l$.

Согласно (2.9)

$$x'_i \cap x_{ij} = 0\,, \quad x'_i \cap \big(\bigcup_j x_{ij}\big) = 0\,,$$

так что по (2.3′)

$$x_i = \big(\bigcup_j x_{ij}\big) \cup x'_i\,.$$

Значит, для каждого $i \in M$

$$x_i \geqq \bigcup_l (x_i \cap v_l) \geqq \big[\bigcup_j (x_i \cap z_{ij})\big] \cup (x_i \cap x'_i) \geqq$$
$$\geqq \big[\bigcup_j (x_i \cap x_{ij})\big] \cup (x_i \cap x'_i) = x_i \cap \big[\big(\bigcup_j x_{ij}\big) \cup x'_i\big] = x_i\,.$$

Следовательно, $x \leqq v$. Аналогично можно проверить справедливость соотношения $y \leqq v$. *Этим мы доказали, что H является направленным по возрастанию множеством.*

2.9. *Пусть* $a, a_m \in H$, $a_m \leqq a (m \in M$, $M = \emptyset)$, $a = Sy_k (k \in K)$, $a_m = \underset{k}{S} x(m, k)$, $x(m, k) \leqq y_k$ (сравни 2.5). *Тогда в H имеет место соотношение*

$$\sup a_m = \underset{k}{S}\big(\bigcup_m x(m, k)\big)\,.$$

Доказательство. Для фиксированного $k \in K$ мы обозначим $\bigcup_m x(m, k) = z_k$. Так как $z_k \leqq y_k$, то каждых два различных элемента множества $\{z_k\}$ взаимно дизъюнктны. Далее обозначим $Sz_k = z$. Согласно 2.6 для каждого $m \in M$ $Sx(m, k) \leqq Sz_k$. Предположим, что $v \in H$, $a_m \leqq v$ для каждого $m \in M$, $v = Sv_i$, $i \in I$. Согласно 2.2 будет тогда для каждого $m \in M$, $k \in K$

$$x(m, k) = \bigcup_i (x(m, k) \cap v_i)\,.$$

Из этого для каждого $k \in K$ вытекает

$$\bigcup_i (z_k \cap v_i) = \bigcup_i \bigcup_m (x(m, k) \cap v_i) = \bigcup_m \bigcup_i (x(m, k) \cap v_i) = \bigcup_m x(m, k) = z_k .$$

Согласно 2.2 тогда будет $z \leqq v$, чем утверждение доказано.

Следствие. По только что доказанному и по 2.8 ч. у. множество H является (относительно полной) структурой.

Замечание. Пусть выполнены предположения, приведенные в 2.9, пусть для каждого $m \in M$ $a_m \in G^+$, $a \in G^+$. Тогда множество K из 2.9 можем рассматривать, как одноэлементное множество $K = \{1\}$, $y_1 = a$, $x(m, 1) = a_m$. Согласно 2.9 и 2.7 будет

$$\sup a_m = \bigcup x(m, 1) = \bigcup a_m .$$

(При этом символы sup и $\bigcup$ относятся, соответственно, к H и G^+.) Поэтому мы можем супремум относительно ч. у. множества H обозначать тоже символом $\bigcup$.

Пусть, далее, $a \in G^+$, $b \in H$, пусть в H выполняется неравенство $b \leqq a$. По 2.7 и 2.5 можем b представить в виде $b = Sb_k(k \in K)$, где K-одноэлементное множество. Следовательно, $b \in G^+$. *Этим доказано, что G^+ является идеалом в H.*

2.9.1. Пусть $b, c \in H$. Мы выведем еще явную формулу для $b \cap c$. Согласно 2.8 существует $a \in H$ так, что $b \leqq a$, $c \leqq a$. Пусть $a = Sy_k(k \in K)$. По 2.5 тогда будет $b = Sb_k$, $c = Sc_k$, $b_k \leqq y_k$, $c_k \leqq y_k$. Обозначим $u = b_k \cap c_k$, $u = Su_k$. Согласно 2.6 $u \leqq b$, $u \leqq c$. Пусть $z \in H$, $z \leqq b$, $z \leqq c$. Тогда $z = Sz_k$, $z_k \leqq y_k$. Далее, согласно 2.2 (индекс i пробегает множество K)

$$z_k = \bigcup_i (z_k \cap b_i) = z_k \cap b_k ,$$

значит, $z_k \leqq b_k$. Аналогично можно доказать, что $z_k \leqq c_k$. Согласно 2.6 $z \leqq b$, $z \leqq c$. Следовательно, $u = b \cap c$, $b \cap c = S(b_k \cap c_k)$.

2.10. Пусть $Sx_i \in H$. По 2.7 для каждого x_i $x_i \leqq Sx_i$. Предположим, что $v \in H$, $v = Sv_j$ и что для каждого x_i выполняется соотношение $x_i \leqq v$. Согласно 2.7 и 2.2 для каждого x_i тогда будет $x_i = \bigcup_j (x_i \cap v_j)$, так что по 2.2 $Sx_i \leqq v$. Из этого вытекает, что Sx_i есть супремум множества $\{x_i\}$ в H.

2.11. *Пусть A — непустое подмножество множества H. Пусть каждых два различных элемента из A взаимно дизъюнктны. Тогда в H существует элемент* $\sup A$.

Доказательство. Каждый элемент $a \in A$ представим только одним, точно выбранным способом в виде

$$a = Sx_i . \tag{2.11}$$

Обозначим через X множество всех элементов x_i, для которых существует элемент $a \in A$ так, что x_i имеется в выражении (2.11). Каждых два различных элемента множества X взаимно дизъюнктны, так что в H существует элемент

$x_0 = Sx_i(x_i \in X)$. Далее, согласно (2.11) и 2.6 выполняется для каждого $a \in A$ неравенство $a \leqq x_0$. Итак, согласно 2.9 существует в H элемент $\sup A$.

Замечание. Можно доказать, что $\sup A = x_0$; этим равенством мы не будем в дальнейшем пользоваться.

2.12. В итоге мы в отделах 2.2–2.11 доказали, что справедлива

Теорема. *Пусть G — полная l-группа. Существует относительно полная структура H такая, что:*

a) *G^+ является идеалом в H,*

b) *каждый элемент $z \in H$ можно представить в виде $z = \bigcup x_i(x_i \in M)$, причем $M \subset G^+$ и каждых два различных элемента из M взаимно дизъюнктны в G^+,*

c) *если $\{z_l\} \subset H$ и если каждых два различных элемента этого множества взаимно дизъюнктны, то в H существует $\sup \{z_l\}$.*

2.13. В множестве H мы теперь введем бинарную операцию $+$. Пусть $x, y \in H$. Согласно 2.8 существует $z \in H$, $z = Sz_k(k \in K)$ так, что $x \leqq z$, $y \leqq z$. По 2.5 элементы x, y можно представить в виде

(2.12) $$x = Sx_k\,, \quad y = Sy_k\,, \quad x_k \leqq z_k\,, \quad y_k \leqq z_k\,.$$

Обозначим $x_k + y_k = v_k$ (символ $+$ представляет здесь групповую операцию в G). По (2.12) каждых два различных элемента из множества $\{v_k\}$ взаимно дизъюнктны, так что в H существует элемент $v = Sv_k$. Обозначим

(2.13) $$v = (z \mid x + y)\,.$$

2.14. Мы будем пользоваться обозначениями, принятыми в 2.13, и пусть затем $t \in H$, $t = St_m(m \in M)$, $x \leqq t$, $y \leqq t$. Тогда

$$x = S\bar{x}_m\,, \quad y = S\bar{y}_m\,, \quad \bar{x}_m \leqq t_m\,, \quad \bar{y}_m \leqq t_m\,, \quad v' = (t \mid x + y)\,,$$

где $v' = S\bar{v}_m$, $\bar{v}_m = \bar{x}_m + \bar{y}_m$. Согласно 2.10 в H имеют место равенства

(2.14) $$x = \bigcup \bar{x}_m\,, \quad y = \bigcup \bar{y}_m\,.$$

Далее, согласно 2.2

$$\bar{x}_m = \bigcup_k (\bar{x}_m \cap x_k)\,, \quad \bar{y}_m = \bigcup_k (\bar{y}_m \cap y_k)\,,$$

следовательно, по (2.14)

(2.15) $$x = \bigcup_{m,k} (\bar{x}_m \cap x_k)\,, \quad y = \bigcup_{m,k} (\bar{y}_m \cap y_k)\,.$$

Обозначим

$$u(m, k) = (\bar{x}_m \cap x_k) + (\bar{y}_m \cap y_k)\,.$$

Так как каждых два различных элемента $u(m, k)$ взаимно дизъюнктны, то в H существует элемент $Su(m, k) = u$. По (2.15) и 2.6 $x \leqq u$, $y \leqq u$. Следовательно, $u = (u \mid x + y)$.

Согласно 2.6 $u \leqq v$. Далее справедливо (если индекс j пробегает множество K и индекс m множество M)

$$\bigcup_{m,j} ((x_k + y_k) \cap u(m,j)) = \bigcup_{m,j} ((x_k + y_k) \cap [(\bar{x}_m \cap x_j) + (\bar{y}_m \cap y_j)]) =$$
$$= \bigcup_{m} ((x_k + y_k) \cap [\bar{x}_m \cap x_k) + (\bar{y}_m \cap y_k)]) = \bigcup_{m} (x_k + y_k) = x_k + y_k .$$

Согласно 2.2 тогда будет $v \leqq u$, значит, в итоге $v = u$. Одинаковым способом можно доказать, что $v' = u$, следовательно, $v = v'$. Из этого вытекает, что элемент v из отдела 2.13 не зависит от выбора элемента z. Вместо (2.13) пожем поэтому писать $v = x + y$.

Из предыдущих рассуждений одновременно вытекает: *Если* $x = Sx_k$, $y = Sy_k (k \in K)$ *и если для каждого* $m, n \in K$, $m \neq n$, $x_m \cap y_n = 0$, *то* $x + y = S(x_k + y_k)$.

2.15. В определении операции $+$ для элементов множества H можем учитывая отдел 2.7, наблюдать некоторого рода некоректность: надо еще проверить, если для элементов $x, y \in G^+$ операция $+$, рассматриваемая в G^+, совпадает с операцией $+$, введенной в 2.13, 2.14. Для проверки этого достаточно в 2.13 положить $z = x \cup y$.

2.16. Из определения операции $+$ в H непосредственно вытекает: Для любых элементов $x, y \in H$ $x + y = y + x$. Пусть, далее, $x, y, z \in H$. Согласно 2.8 существует $u \in H$, $x \leqq u$, $y \leqq u$, $z \leqq u$, $u = Su_k(k \in K)$. Тогда $x = Sx_k$, $y = Sy_k$, $z = Sz_k$, причем каждый из элементов x_k, y_k, z_k меньше или равен u_k. Согласно 2.14, 2.15

$$x + (y + z) = S(x_k + (y_k + z_k)) = S((x_k + y_k) + z_k) = (x + y) + z .$$

2.17. Пусть $x, y \in H$, $x + y = v$. Согласно 2.13 и 2.6 $x \leqq v$, $y \leqq v$. Если $v = 0$, то по 2.7 должно быть $x = y = 0$.

2.18. Для $x, y, z, u \in H$ мы воспользуемся теми же обозначениями и соотношениями, как в 2.16. Пусть $x + y = x + z$. Следовательно, по определению суммы $S(x_k + y_k) = S(x_k + z_k)$. По 2.2 (если индекс i пробегает множество K)

$$x_k + y_k = \bigcup_{i} ((x_k + y_k) \cap (x_i + z_i)) = (x_k + y_k) \cap (x_k + z_k) .$$

так что $x_k + y_k \leqq x_k + z_k$. Аналогично можно доказать обратное неравенство. Значит, $x_k + y_k = x_k + z_k$, так что $y_k = z_k$, $y = z$.

2.19. Ма будем пользоваться обозначениями, введенными в 2.16. Пусть $x \leqq y$. Тогда, согласно 2.2 (если индекс i пробегает множество K) $x_k = \bigcup_{i} (x_k \cap y_i) = x_k \cap y_k$, так что $x_k \leqq y_k$. По 2.6 $S(x_k + z_k) \leqq S(y_k + z_k)$, следовательно, $x + z \leqq y + z$.

2.20. l-подгруппа A l-группы B называется *замкнутой в* B, если имеет место следующее утверждение:

Если $a \in A$, $A_1 \subset A$ и если по отношению к A $\sup A_1 = a$, то это равтенсво справедливо и по отношению к B. Из теоремы 3, гл. 14, [1] и из 2.8, 2.13–2.19 вытекает: Существует полная l-группа $F(G)$ такая, что $(F(G))^+ = H$. Согласно 2.11 $F(G)$ обладает свойством (f). Этим мы доказали, что справедлива:

Теорема. *Пусть G — полная l-группа. Существует полная l-группа $F(G)$ такая, что*

a) *G является замкнутой l-подгруппой в $F(G)$,*

в) *если $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{F}(G)$, $x > 0$, то существует множество $\{x_i\} \subset G^+$ каждых два различных элемента которого дизъюнктны, причем в $F(G)$ имеем $x = \bigcup x_i$,*

c) *$F(G)$ обладает свойством* (f).

2.21. Пусть G является K-пространством. Образуем l-группу $F(G)$, как было описано выше. Пусть $\alpha \in R$, $x \in H$, $x = Sx_i$. Положим

$$\begin{aligned} &\text{для} \quad \alpha = 0 \quad \alpha x = 0 \in H\,, \\ &\text{для} \quad \alpha > 0 \quad \alpha x = S\alpha x_i\,, \\ &\text{для} \quad \alpha < 0 \quad \alpha x = -S(-\alpha)\, x_i\,. \end{aligned}$$

Чтобы доказать корректность этого определения, надо проверить, вытекает ли из соотношения $Sx_i = Sy_k$ соотношение $S\alpha x_i = S\alpha y_k$. Очевидно, достаточно исследовать случай $\alpha > 0$.

Пусть $Sx_i = Sy_k$. Согласно 2.2 и [7] (гл. 1, отд. 1.3.9)

$$\alpha x_i = \alpha \bigcup_k (x_i \cap y_k) = \bigcup_k \alpha(x_i \cap y_k) = \bigcup_k (\alpha x_i \cap \alpha y_k)\,,$$

так что по 2.2 $S\alpha x_i \leqq S\alpha y_k$. Аналогичным способом можем доказать обратное неравенство, следовательно, $S\alpha x_i = S\alpha y_k$.

2.22. Пусть $\alpha, \beta \in R$, $x, y \in F(G)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x > 0$, $y > 0$. Проверим, выполняются ли для этих элементов условия 3)–7) из [7], гл. 1, отд. 1.1.

Условия 3), 6), 7), очевидно, выполняются. Далее (опираемся на те же предположения и обозначения, как в 2.16)

$$\alpha Sx_i + \beta Sx_i = S\alpha x_i + S\beta x_i = S(\alpha x_i + \beta x_i) = (\alpha + \beta)\, Sx_i\,,$$

так что справедливо условие 5). Выполнение условия 4) вытекает из равенства

$$\begin{aligned} \alpha Sx_k + \alpha Sy_k &= S\alpha x_k + S\alpha y_k = S(\alpha x_k + \alpha y_k) = \\ &= \alpha S(x_k + y_k) = \alpha(Sx_k + Sy_k)\,. \end{aligned}$$

2.23. В общем, если $\alpha \in R$, $x \in F(G)$, $x = y - z$, $y, z \in H$, то положим $\alpha x = \alpha y - \alpha z$. Поступая подобно тому, как в 1.14, 1.15, можем доказать, что это определение однозначно и что утверждение, высказанное в 2.22 справедливо для любых $\alpha, \beta \in R$, $x, y \in F(G)$. Из этого вытекает:

Теорема. *Пусть G — K-пространство. Пусть символ $F(G)$ имеет такое же значение, как в отд.* 2.21. *Тогда $F(G)$ является K-пространством.*

Замечание. Очевидно, что при выполнении условий, приведенных в этой теореме, G является K-подпространством в $F(G)$. Если при этом $\{x_i\} \subset G^+$ и если каждых два различных элемента множества $\{x_i\}$ взаимно дизъюнктны, то элемент $x = Sx_i \in F(G)$ является соединением элементов x_i в смысле [7] (гл. 1, отд. 1.7).

2.24. Из теорем 1.16, 2.20 и 2.23 вытекает:

Теорема. *Каждую архимедовскую l-группу G можно погрузить в K-пространство $F(U(G))$, обладающее свойством* (f).

Литература

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory, revised editon. Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. Vol. XXV, 1948.

[2] *C. Carathéodory:* Entwurf für eine Algebraisierung des Integral-Begriffs. Sitzungsber. Bayer. Akad. Wis., 1938, 28—67.

[3] *Ф. А. Цвид:* Счетное расширение линейных полуупорядоченных пространств. Учен. записки Ленингр. Гос. Пед. Инст. *86* (1949), 337—350.

[4] *C. Gofman:* Remarks on lattice ordered groups and vector lattices. I. Carathéodory functions. Trans. Amer. Math. Soc. *88* (1958), 107—120.

[5] *P. Jaffard:* Contribution à l'étude des groupes ordonnés. J. Math. Pures Appl. *32* (1953), 203—280.

[6] *Я. Якубик:* Об одном классе структурно упорядоченных групп. Čas. pěst. mat. *84* (1959), 150—161.

[7] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер:* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. Москва 1950.

[8] *Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер:* Полуупорядоченные группы и линейные полуупорядоченные пространства. Успехи мат. наук *43* (1951), 31—98.

[9] *А. Г. Пинскер:* Разложение полуупорядоченных групп и пространств. Ученые записки Ленингр. Гос. Пед. Инст. *86* (1949), 235—284.

[10] *А. Г. Пинскер:* Расширение полуупорядоченных групп и пространств. Учен. записки Ленингр. Гос. Пед. Инст. *86* (1949), 236—315.

[11] *А. Г. Пинскер:* О расширении полуупорядоченных пространств. Докл. Акад. наук СССР *21* (1938), № 1—2, 6—10.

[12] *А. Г. Пинскер:* О некоторых свойствах расширенных K-пространств. Докл. Акад. наук СССР, *22* (1939), № 5, 220—224.

Zusammenfassung

DARSTELLUNG UND ERWEITERUNG VON l-GRUPPEN

JÁN JAKUBÍK, Košice

In der Arbeit ist die Terminologie nach [1] und [7] benutzt. Die Ergebnisse des § 1:

Jede teilweise geordnete (tw. g.) abelsche Gruppe G kann in eine abelsche tw.g. Gruppe $Z(G)$ derart eingebettet werden, dass 1) für jedes $z \in Z(G)$ eine natürliche

Zahl n und ein Element $x \in G$ mit $nx = z$ existieren, 2) für jedes $z \in Z(G)$ und für jede natürliche Zahl n ein $z_1 \in Z(G)$ mit $nz_1 = z$ existiert. Die tw. g. Gruppe $Z(G)$ wird mit Hilfe der üblichen algebraischen Konstruktion aus der Menge aller „Brüche“ a/n, wo $a \in G$ und n eine natürliche Zahl ist, gewonnen. Wir setzen $a/n = b/m$, wenn $ma = nb$; weiter setzen wir $z > 0$ genau dann, wenn es ein $a \in G$ mit $z = a/n$, $a > 0$ gibt. Ist G eine l-Gruppe, so ist auch $Z(G)$ eine l-Gruppe, und G ist eine l-Untergruppe in $Z(G)$. Ist G archimedisch, so ist auch $Z(G)$ archimedisch. Wenn G archimedisch ist und wenn $Z(G)$ in eine vollständige l-Gruppe G_1 eingebettet wird (in der üblichen Weise, mit Hilfe der Dedekindschen Schnitte, vgl. [1], Kap. XIV), dann kann man die Multiplikation der Elemente $x \in G_1$ mit reellen Zahlen so erklären, dass G_1 ein K-Raum wird. Da jeder K-Raum durch reelle Funktionen dargestellt werden kann (im Sinne von [7], Kap. XIII, Satz 3.11), man kann auch jede archimedische l-Gruppe durch reelle Funktionen darstellen.

Im § 2 untersuchen wir die Einbettung einer vollständigen l-Gruppe in eine sgn. erweiterte l-Gruppe:

Wenn A eine Teilmenge einer l-Gruppe ist und wenn aus $a, b \in A$, $a \neq b$ die Gleichung $a \cap b = 0$ folgt, so heisst A eine disjunktive Menge. Sind G_1, G_2 l-Gruppen, wobei G_1, G_2 als tw. g. Mengen isomorph sind, schreiben wir $G_1 \sim (\leqq)\, G_2$.

Wir wollen sagen, dass eine l-Gruppe G die *Eigenschaft* (f) besitzt, wenn jede disjunktive Teilmenge von G das Supremum in G hat. G. Birkhoff hat die Frage gestellt ([1], Problem 108), ob jede archimedische l-Gruppe in eine volständige l-Gruppe mit der Eigenschaft (f) eingebettet werden kann. Da sich jede archimedische l-Gruppe in eine vollständige l-Gruppe einbetten lässt, so kann man voraussetzen, dass G vollständig ist.

A. G. Pinsker [10] konstruiert zu jeder vollständigen l-Gruppe G eine l-Gruppe $R(G)$, welche eine „Maximalbedingung“ erfüllt; dabei ist G in $R(G)$ eingebettet. Eine vollständige l-Gruppe G heisst *erweitert*, wenn $G = R(G)$. Bei der erwähnten Konstruktion ist ein System von Teilmengen von G^+ benutzt, welches durch die Relation $\leqq$ und die Operation $+$ (aus G) definiert ist. Durch transfinite Induktion ([10], Satz 6 und Lemma 6) wird dann bewiesen, dass eine vollständige l-Gruppe genau dann erweitert ist, wenn sie die Bedingung (f) erfüllt.

Die Bedingung (f) bezieht sich nur auf die teilweise Ordnung in G, die Operation $+$ wird dabei nicht in Betracht genommen. Daher entsteht die folgende Frage: Es seien G_1, G_2 vollständige l-Gruppen, $G_1 \sim (\leqq)\, G_2$. Gibt es dann vollständige l-Gruppen G_1', G_2', welche die Bedingung (f) erfüllen, wobei G_i in G_i' eingebettet ist, $i = 1, 2$, und $G_1' \sim (\leqq)\, G_2'$?

Zu jeder vollständigen l-Gruppe G konstruieren wir eine vollständige l-Gruppe $F(G)$, welche die Eigenschaft (f) besitzt. Bei dieser Konstruktion wird das Auswahlsaxion nicht benutzt. Es gilt dann:

G ist eine geschlossene l-Untergruppe in $F(G)$; jedes $x \in F(G)^+$ ist das Supremum einer disjunktiven Menge $A \subset G^+$. Sind G_1, G_2 vollständige l-Gruppen, so folgt aus $G_1 \sim (\leqq)\, G_2$ die Beziehung $G_1' \sim (\leqq)\, G_2'$.