Josef Havelka

Sur une généralisation de la normale affine

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 2, 240–266

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100565

SUR UNE GENERALISATION DE LA NORMALE AFFINE

JOSEF HAVELKA, Brno

(Reçu le 27 mars 1961)

Dans le présent travail, on généralise certaines constructions géométriques de la normale affine d'une surface d'un espace affin droit pour le cas où la surface π est plongée dans un espace à trois dimensions $\mathfrak{A}_3$, à connexion affine.

Introduction. Nous appelons espace $\mathfrak{A}_3$ à connexion affine une variété élémentaire à trois dimensions $\mathfrak{M}$, lorsqu'on associe à chaque point $M(\xi^1, \xi^2, \xi^3) \in \mathfrak{M}$ un, et un seul, espace centroaffin ${}^M A_3$ de centre M et de repère fondamental $\{M(\xi), \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3\}$ et que pour chaque arc $\gamma \equiv \widehat{MN}$ de la variété $\mathfrak{M}$ on détermine d'une manière univoque une affinité $\mathbf{A}_\gamma$ non-singulière, existant entre ${}^M A_3$ et ${}^N A_3$ et satisfaisant à certaines conditions de différentiabilité. L'affinité $\mathbf{A}_\gamma$ correspondante est construite d'une manière bien connue à l'aide des équations

$$\nabla \mathbf{M} = \omega_i^0 \mathbf{I}_i\,, \quad \nabla \mathbf{I}_k = \omega_k^i \mathbf{I}_i\,.$$

Si $\{M(\xi), \bar{\mathbf{I}}_1, \bar{\mathbf{I}}_2, \bar{\mathbf{I}}_3\}$ est un autre repère de l'espace ${}^M A_3$, alors

$$\bar{\mathbf{I}}_k = \alpha_k^i \mathbf{I}_i\,,$$

et l'affinité $\mathbf{A}_\gamma$ est déterminée par les équations

$$\nabla \mathbf{M} = \bar{\omega}_0^i \bar{\mathbf{I}}_i\,, \quad \nabla \bar{\mathbf{I}}_k = \bar{\omega}_k^i \bar{\mathbf{I}}_i\,.$$

En vertu des équations de transformation qui lient les formes de Pfaff ω_0^i et $\bar{\omega}_0^i$, ou encore ω_i^k et $\bar{\omega}_i^k$, le repère $\{M(\xi), \mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2, \mathbf{I}_3\}$ est spécialisé de telle manière que les vecteurs $\mathbf{I}_1, \mathbf{I}_2$ déterminent les tangentes aux développements des courbes asymptotiques $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ (sur l'asymptotique $\mathbf{u}(\mathbf{v})$, le paramètre variable est $u(v)$), et l'équation différentielle des directions asymptotiques prend la forme $2\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = 0$.

Le deuxième paragraphe est consacré à la définition de la normale principale d'une surface $\pi \subset \mathfrak{A}_3$. Elle prend pour sa base la construction, due à A. DEMOULIN, de la normale affine d'une surface dans l'espace affin droit (voir [10], et aussi [2], p. 188) et qui est généralisée au cas de l'espace à connexion affine. Soit $M(0, 0)$ un point fixe de la surface $\pi \subset \mathfrak{A}_3$ en question, soit $M'(u_1, 0)$, $[M''(0, v_1)]$ le point variable de l'asymptotique $v = 0$ $[u = 0]$. Soit $\alpha^*[\beta^*]$ le plan parallèle aux tangentes aux courbes asymptotiques $u = 0$, $u = u_1$ $[v = 0, v = v_1]$, aux points M, M' $[M, M'']$. On démontre que pour $u_1 \to 0$ $[v_1 \to 0]$, le pan α^* $[\beta^*]$ converge vers un plan α $[\beta]$. On appelle normale principale de la surface $\pi \subset \mathfrak{A}_3$ la droite qui passe par M, paralléle à la droite d'intersection des plans α, β.

Dans la suivante partie de notre travail, nous donnons une autre interprétation géométrique de la normale principale de la surface π, en nous servant des quadriques $Q_{\boldsymbol{u}}$, $Q_{\boldsymbol{v}}$. La quadrique $Q_{\boldsymbol{u}}$ $[Q_{\boldsymbol{v}}]$ est la quadrique osculatrice de la surface $\Pi_{\boldsymbol{u}}$ $[\Pi_{\boldsymbol{v}}]$, dont les droites génératrices sont tangentes aux asymptotiques $\boldsymbol{v}$ $[\boldsymbol{u}]$, aux points de l'asymptotique $\boldsymbol{u}$ $[\boldsymbol{v}]$. (La construction des quadriques $Q_{\boldsymbol{u}}$, $Q_{\boldsymbol{v}}$ est tout à fait analogue à la construction de la quadrique de Lie dans un espace affin droit avec la différence que les quadriques $Q_{\boldsymbol{u}}$ et $Q_{\boldsymbol{v}}$ ne coïncident pas.) On démontre le théorème: *La normale principale de la surface $\pi \subset \mathfrak{A}_3$ au point M est la droite d'intersection des plans asymptotiques des quadriques $Q_{\boldsymbol{u}}$ $[Q_{\boldsymbol{v}}]$, passant par les droites $x^1 = 0$, $x^3 = 0$ $[x^2 = 0, x^3 = 0]$.*, (x^i sont les coordonnées locales dans l'espace ${}^M A_3$).

Les considérations du quatrième paragraphe ont pour leur point de départ la notion de quadrique osculatrice de la surface $\pi \subset \mathfrak{A}_3$ au point M. Une quadrique Q sera appelée quadrique osculatrice de la surface π au point $M \in \pi$, si elle contient l'élément du second ordre de toute courbe γ_0 que l'on obtient en développant une courbe $\gamma \subset \pi$, $M \in \gamma$. On démontre le théorème: *Dans l'espace $\mathfrak{A}_3$ général, il existe ∞^3 de quadriques osculatrices d'une surface π au point M.*

A chaque droite p qui passe par un point M et qui ne se trouve pas dans le plan tangent à la surface π au point M, nous associons par la polarité $\mathbf{P}$ déterminée par la quadrique osculatrice Q, la droite p^* telle que $\mathbf{P}p = p^*$. De plus, nous établissons une correspondance $\mathfrak{K}$ de telle manière que nous associons à chaque droite p la droite $\bar{p}$ qui unit les points de contact du plan $\tau_{\boldsymbol{u}}$ $[\tau_{\boldsymbol{v}}]$, ($\tau_{\boldsymbol{u}}$ est le plan déterminé par la droite p et par l'axe des x^2, $\tau_{\boldsymbol{v}}$ par p et l'axe des x^1) avec la surface $\Pi_{\boldsymbol{u}}$ $[\Pi_{\boldsymbol{v}}]$. On a alors:

a) *A chaque droite p passant par un point $M \in \pi$, on peut associer ∞^1 de quadriques osculatrices Q dont les centres se trouvent sur une droite o, $M \in o$, et telles que $\mathbf{P}p = \mathbf{K}p$.*

b) *Soit n_∞ la droite à l'infini du plan tangent à la surface π au point $M \in \pi$. Alors la droite $\mathbf{K}^{-1}n_\infty$ coïncide avec la normale principale de la surface π au point M.*

c) *Soit $\mathbf{T}$ la correspondance univoque qui associe à la droite p donnée la droite o* (cf. l'alinéa a)). *La droite p coincide avec o si et seulement si p est la normale principale de la surface π.*

Dans le dernier paragraphe, les résultats des précédents sont comparés à ceux de M. V. D. Izmailoff (voir [9]) qui définit, à l'aide de ce qu'il appele *connexion induite*, tout un faisceau de normales affines d'une hypersurface dans l'espace $\mathfrak{A}_n$ général. Si nous considérons la surface π comme une variété de König (voir p. ex.

[11], p. 524), alors il se pose fort naturellement la question de savoir s'il existe parmi les normales d'Izmailoff une qui ne dépende pas du mode de l'immersion. On a en effet le théorème suivant:

Dans le faisceau des normales d'Izmailoff il existe une et une seule qui soit indépendante du mode de l'immersion; c'est la normale principale.

1. Soit donnée une variété élémentaire à trois dimensions $\mathfrak{M}$ (Raschevski, p. 329). Tout son point $M(\xi)$ peut être caractérisé par trois coordonnées ξ^1, ξ^2, ξ^3, rapportées au système de coordonnées choisi. Le passage d'un système de coordonnées ξ^i à un autre $\bar{\xi}^i$ est donné par les équations de transformation[1])

$$\bar{\xi}^i = \bar{\xi}^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)\,, \tag{1}$$

on suppose les dérivées partielles $\partial\bar{\xi}^i/\partial\xi^k$ continues et le Jacobien

$$\left|\frac{\partial\bar{\xi}^i}{\partial\xi^k}\right| \tag{2}$$

différent de zéro, de sorte que, inversement,

$$\xi^i = \xi^i(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2, \bar{\xi}^3)\,. \tag{3}$$

A chaque point $M(\xi) \in \mathfrak{M}$ nous associons un espace centroaffin ${}^M A_3$ de centre M et de repère fondamental $\{M(\xi), \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_3\}$[2]) Si $\{M(\xi), \bar{\boldsymbol{I}}_1, \bar{\boldsymbol{I}}_2, \bar{\boldsymbol{I}}_3\}$ est un autre repère de l'espace ${}^M A_3$, alors

$$\bar{\boldsymbol{I}}_k = \alpha_k^i \boldsymbol{I}_i\,, \tag{4}$$

où les α_k^i sont fonctions de l'argument ξ, une fois continûment différentiables et telles que $|\alpha_k^i| \neq 0$.

Dans le cas général, il n'y a aucune connexion entre les objects géométriques dans les différents espaces centroaffins ${}^M A_3$. Pour obtenir une telle connexion, nous allons énoncer la

Définition 1. Une variété élémentaire $\mathfrak{M}$ aux points M de laquelle on associe d'une manière univoque des espaces centroaffins ${}^M A_3$ de centre M et de repère fondamental $\{M, \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_3\}$ sera appelée espace $\mathfrak{A}_3$ à *connexion affine*, lorsque pour tout arc $\gamma \equiv \equiv \overset{\frown}{MN}$ de la variété $\mathfrak{M}$ on donne une et une seule transformation affine non-singulière $\boldsymbol{A}_\gamma$ entre ${}^M A_3$ et ${}^N A_3$.

La transformation affine $\boldsymbol{A}_\gamma$ de la définition 1 sera déterminée par le système d'équations[3])

$$\nabla \boldsymbol{M} = \omega_0^i \boldsymbol{I}_i\,, \quad \nabla \boldsymbol{I}_k = \omega_k^i \boldsymbol{I}_i\,, \tag{5}$$

[1]) Les indices (minuscules) latins prennent les valeurs 1, 2, 3; les indices grecs les valeurs 1, 2.

[2]) Les vecteurs $\boldsymbol{I}_i$ sont toujours fonctions des mêmes paramètres que le point M.

[3]) Le symbole ∇ signale ici que les premiers membres des équations (5) ne sont pas, en général, les différentielles totales des fonctions $M(\xi)$ ou $\boldsymbol{I}_k(\xi)$.

où ω_0^i, ω_i^k sont les formes de Pfaff

(6) $$\omega_0^i = \Gamma_{k0}^i(\xi)\,\mathrm{d}\xi^k\,, \quad \omega_i^k = \Gamma_{ji}^k(\xi)\,\mathrm{d}\xi^j\,;$$

les fonctions $\Gamma_{jk}^i(\xi)$ sont continues et continûment différentiables, les formes ω_0 sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire

(7) $$[\omega_0^1, \omega_0^2, \omega_0^3] \neq 0\,.$$

Soit

(8) $$\xi^i = \xi^i(t)\,, \quad {}^1t \leqq t \leqq {}^2t\,,$$

l'équation de l'arc γ donné, où $M({}^1\xi^1, {}^1\xi^2, {}^1\xi^3)$ correspond à ${}^1t$, tandis que $N({}^2\xi^i)$ correspond à ${}^2t$. Nous construisons le système d'équations différentielles ordinaires

(9) $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{k0}^i[\xi(t)]\,\frac{\mathrm{d}\xi^k}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{J}_i\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{J}_k}{\mathrm{d}t} = \Gamma_{jk}^i[\xi(t)]\,\frac{\mathrm{d}\xi^j}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{J}_i\,,$$

dont la solution générale, située dans l'espace ${}^{M}A_3$ et déterminée aux transformations affines de l'espace ${}^{M}A_3$ près, a la forme

(10) $$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(t)\,, \quad \boldsymbol{J}_i = \boldsymbol{J}_i(t)\,.$$

Soit $\boldsymbol{L}^*(t), \boldsymbol{J}^*(t)$ la solution du système (9) déterminée univoquement par les conditions initiales

(11) $$\boldsymbol{L}^*({}^1t) = \boldsymbol{M}({}^1\xi)\,, \quad \boldsymbol{J}_i^*({}^1t) = \boldsymbol{I}_i({}^1\xi)\,,$$

où $\{M({}^1\xi), \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_3\}$ est la base fondamentale de l'espace ${}^{M({}^1\xi)}A_3$. Soit $\{M({}^2t), \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_3\}$ la base de l'espace ${}^{M({}^1\xi)}A_3$ qui correspond, par l'affinité $\boldsymbol{A}_\gamma$ cherchée, à la base fondamentale $\{N({}^2\xi), \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_3\}$ de l'espace ${}^{N({}^2\xi)}A_3$, où

(12) $$\boldsymbol{M}({}^2t) = \boldsymbol{L}^*({}^2t)\,, \quad \boldsymbol{I}_i({}^2t) = \boldsymbol{J}_i^*({}^2t)\,.$$

Une telle affinité est déterminée sans ambiguïté et fait correspondre au point $\boldsymbol{X}(x^1, x^2, x^3) \in {}^{N({}^2\xi)}A_3$ le point

(13) $$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{M}({}^2t) + x^k\boldsymbol{I}_k({}^2t)\,.$$

dans ${}^{M({}^1\xi)}A_3$.

L'arc γ_0 dont l'équation est

$$\boldsymbol{L}^* = \boldsymbol{L}^*(t)\,, \quad t_1 \leqq t \leqq t_2\,,$$

sera appelé développement de l'arc $\gamma \subset \mathfrak{M}$ donné, dans l'espace ${}^{M({}^1\xi)}A_3$.

Soit donnée maintenant une surface π dans l'espace $\mathfrak{A}_3$ (cf. [13], p. 341) par les équations

(14) $$\xi^1 = u\,, \quad \xi^2 = v\,, \quad \xi^3 = \text{const.}$$

Les formes de Pfaff (6) devinnent

$$(15)\qquad \omega_0^i = \Gamma_{10}^i\,\mathrm{d}u + \Gamma_{20}^i\,\mathrm{d}v\,, \quad \omega_i^k = \Gamma_{1i}^k\,\mathrm{d}u + \Gamma_{2i}^k\,\mathrm{d}v\,,$$

où les coefficients Γ_{10}^i, Γ_{20}^i, Γ_{1i}^k, Γ_{2i}^k sont fonctions des variables u et v. Si nous posons

$$(16)\qquad \Gamma_{10}^i = a_0^i\,, \quad \Gamma_{20}^i = b_0^i\,, \quad \Gamma_{1i}^k = a_i^k\,, \quad \Gamma_{2i}^k = b_i^k\,,$$

le système (5) deviendra

$$(17)\qquad \nabla\boldsymbol{M} = (a_0^1\,\mathrm{d}u + b_0^1\,\mathrm{d}v)\,\boldsymbol{I}_1 + (a_0^2\,\mathrm{d}u + b_0^2\,\mathrm{d}v)\,\boldsymbol{I}_2 + (a_0^3\,\mathrm{d}u + b_0^3\,\mathrm{d}v)\,\boldsymbol{I}_3\,,$$
$$\nabla\boldsymbol{I}_k = (a_k^i\,\mathrm{d}u + b_h^i\,\mathrm{d}v)\,\boldsymbol{I}_i$$

Les tangentes aux arcs γ_0 que l'on obtient en développant tous les arcs $\gamma \subset \pi$, $M \in \gamma$ dans l'espace local ${}^{M(u,v)}A_3$ remplissent un plan (appelé plan tangent à la survace π au point M); il est donc possible de choisir les vecteurs $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$, pour chaque point $M(u, v)$ de la surface π, dans le plan tangent à la surface π. Mais alors le vecteur $\nabla\boldsymbol{M}$ sera une combinaison linéaire des vecteurs $\boldsymbol{I}_1$ et $\boldsymbol{I}_2$, de sorte que

$$(18)\qquad \omega_0^3 = 0$$

ou bien

$$(19)\qquad a_0^3 = b_0^3 = 0\,.$$

Spécialisons le repère $\{M(u, v), \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_3\}$ d'une telle manière que les vecteurs $\boldsymbol{I}_1$ et $\boldsymbol{I}_2$ se trouvent sur les tangentes aux développements des courbes $v =$ const, ou $u =$ $=$ const, respectivement. Dans ce cas-là, le système (17) deviendra

$$(20)\qquad \nabla\boldsymbol{M} = a_0^1\,\mathrm{d}u\,\boldsymbol{I}_1 + b_0^2\,\mathrm{d}v\,\boldsymbol{I}_2\,,$$
$$\nabla\boldsymbol{I}_k = \omega_k^i\boldsymbol{I}_i\,,$$

de sorte que

$$(21)\qquad a_0^2 = b_0^1 = 0\,.$$

Les courbes asymptotiques de la surface π sont les courbes telles que pour leurs développements (en chaque point) le plan osculateur coïncide avec le plan tangent à la surface π. Pour cela il faut et il suffit que les vecteurs $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$, $\mathrm{d}^2\boldsymbol{M}$[4]) soient linéairement dépendants:

$$(22)\qquad [\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \mathrm{d}^2\boldsymbol{M}] = 0\,,$$

c'est-à-dire explicitement

$$(23)\qquad a_0^1a_1^3\,\mathrm{d}u^2 + (a_0^1b_1^3 + b_0^2a_2^3)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + b_0^2b_2^3\,\mathrm{d}v^2 = 0\,.$$

---

[4]) La courbe $\gamma \subset \pi$ soit donnée par l'équation $u = f(v)$. Alors $\mathrm{d}u = (\mathrm{d}f/\mathrm{d}v)\,\mathrm{d}v$ et les seconds membres de l'équation (20) sont des différentielles totales, de sorte qu'il est aisé de déterminer l'expression d^2M à partir des équations (20).

Nous étudierons seulement les surfaces qui ont un réseau d'asymptotiques. Nous prendrons les lignes asymptotiques pour lignes paramétriques. Dans ce cas, nous aurons

$$a_0^1 a_1^3 = 0\,, \quad b_0^2 b_2^3 = 0\,. \tag{24}$$

Les fonctions a_0^1, b_0^2 ne peuvent pas s'annuler identiquement, car autrement la surface π dégénérerait en courbe. Si donc les vecteurs $\boldsymbol{I}_1$, $\boldsymbol{I}_2$ sont situés sur les tangentes aux développements des courbes asymptotiques $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, on a identiquement

$$a_1^3 = b_2^3 = 0\,. \tag{25}$$

Procédons à la transformation

$$u = u(\bar{u})\,, \quad v = v(\bar{v}) \tag{26}$$

et, dans chaque espace local ${}^{M(\bar{u},\bar{v})}A_3$ fixons un nouveau repère fondamental $\{M(\bar{u}, \bar{v}),$ $\bar{\boldsymbol{I}}_1, \bar{\boldsymbol{I}}_2, \bar{\boldsymbol{I}}_3\}$ tel que les vecteurs $\bar{\boldsymbol{I}}_1$, $\bar{\boldsymbol{I}}_2$ se trouvent sur les tangentes aux développements des lignes asymptotiques $\bar{\boldsymbol{u}}$, $\bar{\boldsymbol{v}}$. On a alors évidemment

$$\bar{\boldsymbol{I}}_1 = \alpha_1^1 \boldsymbol{I}_1\,, \quad \bar{\boldsymbol{I}}_2 = \alpha_2^2 \boldsymbol{I}_2\,, \quad \bar{\boldsymbol{I}}_3 = \alpha_3^1 \boldsymbol{I}_1 + \alpha_3^2 \boldsymbol{I}_2 + \alpha_3^3 \boldsymbol{I}_3\,. \tag{28}$$

L'affinité $\boldsymbol{A}_\gamma$ sera alors déterminée par les équations

$$\nabla \bar{\boldsymbol{M}} = \bar{\omega}_0^i \bar{\boldsymbol{I}}_i\,, \quad \nabla \bar{\boldsymbol{I}}_k = \bar{\omega}_k^i \bar{\boldsymbol{I}}_i\,, \tag{29}$$

où

$$\bar{\omega}_0^i = \bar{a}_0^i \,\mathrm{d}\bar{u} + \bar{b}_0^i \,\mathrm{d}\bar{v}\,, \quad \bar{\omega}_k^i = \bar{a}_k^i \,\mathrm{d}\bar{u} + \bar{b}_k^i \,\mathrm{d}\bar{v}\,, \tag{30}$$

$$\bar{a}_0^3 = \bar{b}_0^3 = \bar{a}_0^2 = \bar{b}_0^1 = \bar{a}_1^3 = \bar{b}_2^3 = 0\,.$$

Nous allons établir maintenant les relations qui existent entre les fonctions a_0^i, b_0^i, a_i^k, b_i^k et les fonctions $\bar{a}_0^i$, $\bar{b}_0^i$, $\bar{a}_i^k$, $\bar{b}_i^k$. En comparent les équations (29_1), (28) et (20_1), nous obtenons

$$a_0^1 = \bar{a}_0^1 \alpha_1^1 \frac{\mathrm{d}\bar{u}}{\mathrm{d}u}\,, \quad b_0^2 = \bar{b}_0^2 \alpha_2^2 \frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}v}\,. \tag{31}$$

Les coefficients α_1^1, α_2^2 doivent être différents de zéro, il est donc toujours possible d'obtenir, moyennant une transformation de paramètres, les égalités

$$a_0^1 = b_0^2 = 1\,. \tag{32}$$

En même temps, nous exigeons que nous ayons

$$\bar{a}_0^1 = \bar{b}_0^2 = 1\,. \tag{33}$$

Mais alors les transformations (26) sont liées par les relations

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\bar{u}} = \alpha_1^1\,, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\bar{v}} = \alpha_2^2\,. \tag{34}$$

A partir des équations (20), (25), (28), (29), (30), on obtient par un calcul simple les relations suivantes existant entre les fonctions a_i^k, b_i^k et $\bar{a}_i^k$, $\bar{b}_i^k$:

$$
(35)\quad \bar{a}_1^1 = \frac{\partial \alpha_1^1}{\partial u} + a_1^1 \alpha_1^1\,,\quad \bar{b}_2^2 = \frac{\partial \alpha_2^2}{\partial v} + b_2^2 \alpha_2^2\,,\quad \bar{b}_1^1 = \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^1}\frac{\partial \alpha_1^1}{\partial v} + \alpha_2^2 b_1^1 - \bar{b}_1^3 \frac{\alpha_3^1}{\alpha_1^1}\,,
$$

$$
\bar{a}_2^2 = \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^2}\frac{\partial \alpha_2^2}{\partial u} + \alpha_1^1 a_2^2 - \bar{a}_2^3 \frac{\alpha_3^2}{\alpha_1^1}\,,\quad \bar{a}_1^2 = \frac{(\alpha_1^1)^2}{\alpha_2^2}\, a_1^2\,,
$$

$$
\bar{b}_2^1 = \frac{(\alpha_2^2)^2}{\alpha_1^1}\, b_2^1\,,\quad b_1^2 = \alpha_1^1 b_1^2 - \bar{b}_1^3 \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\,,
$$

$$
\bar{a}_2^1 = \alpha_2^2 a_2^1 - \bar{a}_2^3 \frac{\alpha_3^1}{\alpha_1^1}\,,\quad \bar{a}_2^3 = \frac{\alpha_1^1\alpha_2^2}{\alpha_3^3}\, a_2^3\,,\quad \bar{b}_1^3 = \frac{\alpha_1^1\alpha_2^2}{\alpha_3^3}\, b_1^3\,,
$$

$$
\bar{a}_3^1 = \frac{\partial \alpha_3^1}{\partial u} + \alpha_3^1 a_1^1 + \alpha_3^2 a_2^1 + \alpha_3^3 a_3^1 - \bar{a}_3^3 \frac{\alpha_3^1}{\alpha_1^1}\,,\quad \bar{b}_3^2 = \frac{\partial \alpha_3^2}{\partial v} + \alpha_3^1 b_1^2 + \alpha_3^3 b_3^2 - \bar{b}_3^3 \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}\,,
$$

$$
\bar{b}_3^1 \frac{\alpha_1^1}{\alpha_2^2} = \frac{\partial \alpha_3^1}{\partial v} + \alpha_3^1 b_1^1 + \alpha_3^2 b_2^1 + \alpha_3^3 b_3^1 - \bar{b}_3^3 \frac{\alpha_3^1}{\alpha_2^2}\,,
$$

$$
\bar{a}_3^2 \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^1} = \frac{\partial \alpha_3^2}{\partial u} + \alpha_3^1 a_1^2 + \alpha_3^2 a_2^2 + \alpha_3^3 a_3^2 - \bar{a}_3^3 \frac{\alpha_3^3}{\alpha_1^1}\,,
$$

$$
\bar{a}_3^3 \frac{\alpha_3^3}{\alpha_1^1} = \frac{\partial \alpha_3^3}{\partial u} + \alpha_3^2 a_2^3 + \alpha_3^3 a_3^3\,,\quad \bar{b}_3^3 \frac{\alpha_3^3}{\alpha_2^2} = \frac{\partial \alpha_3^3}{\partial v} + \alpha_3^1 b_1^3 + \alpha_3^3 b_3^3\,.
$$

Les équations $(35_{9,10})$ impliquent

$$
(36)\qquad \bar{a}_2^3 + \bar{b}_1^3 = (a_2^3 + b_1^3)\, \alpha_1^1 \alpha_2^2 / \alpha_3^3\,,
$$

il est donc possible de spécialiser le repère $\{\boldsymbol{M}, \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_3\}$ de façon à avoir

$$
(37)\qquad a_2^3 + b_1^3 = 2\,.
$$

Or, dans ce cas-là, on a

$$
(38)\qquad \alpha_3^3 = \alpha_1^1 \alpha_2^2\,.
$$

En raison de (36), on peut poser

$$
(39)\qquad a_2^3 = 1 - h\,,\quad b_1^3 = 1 + h\,,
$$

où $h(u, v)$ est ce qu'on appelle *torsion* de la surface π (cf. [11], p. 536).

Si nous introduisons la notation

$$
(40)\qquad a_1^2 = \beta\,,\quad b_2^1 = \gamma
$$

nous pourrons, compte tenu des calculs précédents, spécialiser le repère $\{M, \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_3\}$ de telle manière que le système d'équations (5) devienne

$$
\begin{aligned}
(41)\qquad \nabla \boldsymbol{M} &= \mathrm{d}u\, \boldsymbol{I}_1 + \mathrm{d}v\, \boldsymbol{I}_2\,,\\
\nabla \boldsymbol{I}_1 &= (a_1^1\, \mathrm{d}u + b_1^1\, \mathrm{d}v)\, \boldsymbol{I}_1 + (\beta\, \mathrm{d}u + b_1^2\, \mathrm{d}v)\, \boldsymbol{I}_2 + (1 + h)\, \mathrm{d}v\, \boldsymbol{I}_3\,,\\
\nabla \boldsymbol{I}_2 &= (a_2^1\, \mathrm{d}u + \gamma\, \mathrm{d}v)\, \boldsymbol{I}_1 + (a_2^2\, \mathrm{d}u + b_2^2\, \mathrm{d}v)\, \boldsymbol{I}_2 + (1 - h)\, \mathrm{d}u\, \boldsymbol{I}_3\,,\\
\nabla \boldsymbol{I}_3 &= (a_3^i\, \mathrm{d}u + b_3^i\, \mathrm{d}v)\, \boldsymbol{I}_i\,.
\end{aligned}
$$

Ici, les vecteurs $\boldsymbol{l}_1$, $\boldsymbol{l}_2$ sont vecteurs tangents aux lignes asymptotiques[5]) dont l'équation différentielle a la forme

$$2\mathrm{d}u\ \mathrm{d}v = 0\,. \tag{42}$$

Nous éliminerons dans la suite le cas (cf. [12], p. 286) où

$$\beta\gamma = 0\,, \quad \text{ou bien} \quad |h| = 1\,. \tag{43}$$

2. Dans l'espace affin droit, on connait (voir p. ex. [2], [3]) plusieurs constructions analytiques et géométriques de la normale affine en un point de la surface donnée. Dans les espaces à connexion affine, c'étaient surtout les auteurs des travaux [7], [8], et [9] qui étudiaient du point de vue de la connexion induite, le problème de la détermination analytique de la normale affine. Nous allons montrer à présent une possibilité de généraliser certaines constructions géométriques au cas d'une surface plongée[6]) dans l'espace à trois dimensions, à connexion affine générale.

Pour la base de nos considérations nous prendrons la construction de Demoulin de la normale affine d'une surface de l'espace affin droit, et que Demoulin a publiée dans son travail [10] (voir aussi [2], p. 188):

Les points M, et M^* d'une surface π dans l'espace affin droit soient déterminés par des couples de paramètres (u, v) et $(u + \mathrm{d}u,\ v + \mathrm{d}v)$ respectivement. Les courbes asymptotiques $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, soit aussi $\boldsymbol{u}^*$ et $\boldsymbol{v}^*$, passant par le point M (ou encore M^*, resp.), se coupent aux points M', M''. Soit α^* le plan parallèle aux vectuers $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{MM'}$, $\boldsymbol{a}^* = \overrightarrow{M''M^*}$; soit β^* le plan parallèle aux vecteurs $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{MM''}$, $\boldsymbol{b}^* = \overrightarrow{M'M^*}$. Soient α, β les positions limites des plans α^*, ou β^* resp., lorsque $\mathrm{d}u \to 0$, $\mathrm{d}v \to 0$ simultanément. Alors, la normale affine au point $M(u, v)$ est parallèle à la droite d'intersection des plans α, β.

Il n'est évidemment pas possible d'appliquer directement cette construction de la normale affine dans le cas d'un espace à connexion, car les développements des courbes $\boldsymbol{v}^*$ et $\boldsymbol{u}$, ou resp. $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{u}^*$ dans l'espace local ${}^{M(u,v)}A_3$ ne forment pas, en général, un quadrilatère curviligne.

Nous allons modifier maintenant la construction de Demoulin pour le cas de la surface $\pi \subset \mathfrak{A}_3$, évisagée ci-dessus, en nous servant de la spécialisation du repère $\{M(u, v), \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3\}$ considérée (voir les équations (41)).

Soit M le point de la surface π, correspondant aux paramètres $u = v = 0$, soit M' le point correspondant à $u = u_1$, $v = 0$. Construisons au point M la tangente a à l'asymptotique $u = 0$ et au point M' la tangente a^* à l'asymptotique $u = u_1$. Pour notre choix spécial du repère, les tangentes a et a^* sont déterminées par le vecteur $\boldsymbol{l}_2(0,0)$ ou $\boldsymbol{l}_2(u_1, 0)$ respectivement, dans l'espace local ${}^{M(0,0)}A_3$, ou resp. ${}^{M'(u_1,0)}A_3$. En développant la courbe asymptotique $v = 0$ dans l'espace local ${}^{M(0,0)}A_3$,

[5]) Nous parlons parfois de la courbe γ au lieu de son développement; cf. aussi le travail [14].

[6]) Pour le choix spécial des équations (14) nous interprétons la surface π comme une variété de König $A^2_{0,3}$ (voir p. ex. [11], p. 524).

nous pouvons obtenir pour le vecteur $\boldsymbol{I}_2(u_1, 0)$ ainsi transformé[7]) un développement de Taylor de la forme[8])

$$(44) \qquad \boldsymbol{I}_2(u_1, 0) = \boldsymbol{I}_2(0, 0) + u_1 \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_2}{\mathrm{d}u}\right)_{0,0} + \frac{(u_1)^2}{2} \left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{I}_2}{\mathrm{d}u^2}\right)_{0,0} + \dots .$$

Comme nous avons pour l'asymptotique considérée $\mathrm{d}v = 0$, nous obtenons des équations (41) les relations

$$(45) \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_1}{\mathrm{d}u}\right)_{0,0} = a_1^1 \underset{0}{\boldsymbol{I}_1} + \beta \underset{0}{\boldsymbol{I}_2}\,, \ ^{9})$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_2}{\mathrm{d}u}\right)_{0,0} = a_2^1 \underset{0}{\boldsymbol{I}_1} + a_2^2 \underset{0}{\boldsymbol{I}_2} + (1 - h) \underset{0}{\boldsymbol{I}_3}\,, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I}_3}{\mathrm{d}u}\right)_{0,0} = a_3^i \underset{0}{\boldsymbol{I}_i}\,;$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{I}_2}{\mathrm{d}u^2}\right)_{0,0} = \{a_{2u}^1 + a_2^1(a_1^1 + a_2^2) + (1 - h)\, a_3^1\} \underset{0}{\boldsymbol{I}_1} +$$
$$+ \{\beta a_2^1 + a_{2u}^2 + (a_2^2)^2 + (1 - h)\, a_3^2\} \underset{0}{\boldsymbol{I}_2} + \{(1 - h)(a_2^2 + a_3^1) - h_u\} \underset{0}{\boldsymbol{I}_3}\,,$$

de sorte que nous avons pour les composantes h^i du vecteur $\boldsymbol{I}_2(u_1, 0)$ figurant dan l'équation (44)

$$(46) \qquad h^1 = \frac{u_1}{1!}\, a_2^1 + \frac{(u_1)^2}{2!} \{a_{2u}^1 + a_2^1(a_1^1 + a_2^2) + (1 - h)\, a_3^1\} + \dots ,$$

$$h^2 = 1 + \frac{u_1}{1!}\, a_2^2 + \frac{(u_1)^2}{2!} \{\beta a_2^1 + a_{2u}^2 + (a_3^1)^2 + (1 - h)\, a_3^2\} + \dots ,$$

$$h^3 = \frac{u_1}{1!} (1 - h) + \frac{(u_1)^2}{2!} \{(1 - h)(a_2^2 + a_3^1) - h_u\} + \dots .$$

Le plan α^*, parallèle aux tangentes a, a^* a pour équation

$$(47) \qquad x^1 \left\{1 - h + \frac{u_1}{2} [(1 - h)(a_2^2 + a_3^1) - h_u] + \dots\right\} -$$
$$- x^3 \left\{a_2^1 + \frac{u_1}{2} [a_{2u}^1 + a_2^1(a_1^1 + a_2^2) + (1 - h)\, a_3^1] + \dots\right\} = 0 .$$

Si $u_1 \to 0$, alors le plan α^* converge vers sa position limite α, c'est-à-dire vers le plan dont l'équation est

$$(48) \qquad x^1(1 - h) - x^3 a_2^1 = 0 .$$

---

[7]) C'est-à-dire pour le vecteur situé dans ${}^{M(0,0)}A_3$ et correspondant au vecteur $\boldsymbol{I}_2(u_1, 0)$ par l'affinité $\boldsymbol{A}$ qui est associée à l'arc $v = 0$, $0 \leqq u \leqq u_1$, et qui transforme l'espace ${}^{M'(u_1,0)}A_3$ dans ${}^{M(0,0)}A_3$.

[8]) Le vecteur transformé est noté par le même symbole comme le vecteur original dans l'espace local correspondant.

[9]) Dans les seconds membres des équations (45), il faut prendre pour a_i^k, b_i^k leurs valeurs en (0, 0). Au lieu de $\boldsymbol{I}_k(0, 0)$ nous écrivons tout simplement $\underset{0}{\boldsymbol{I}_k}$.

D'une manière tout à fait analogue, nous construisons maintenant au point M la tangente b à l'asymptotique $v = 0$, et qui est manifestement déterminée par le vecteur $\boldsymbol{l}_1$. La tangente b^* construite au point $M''(0, v_1)$ à l'asymptotique $v = v_1$ détermine avec la tangente b le plan β^* dont l'équation est

$$x^2 \left\{1 + h + \frac{v_1}{2}\left[(1 + h)(b_1^1 + b_3^3) + h_v\right] + \dots\right\} - \tag{49}$$
$$- x^3 \left\{b_1^2 + \tfrac{1}{2}v_1\left[b_{1v}^2 + b_1^2(b_2^2 + b_1^1) + (1 + h)\, b_3^2\right] + \dots\right\} = 0\,.$$

Pour $v_1 \to 0$ le plan β^* tend vers sa position limite β, c'est-à-dire vers le plan d'équation

$$x^2(1 + h) - x^3 b_1^2 = 0\,. \tag{50}$$

La droite d'intersection des plans α, β est déterminée par le vecteur $\boldsymbol{n}$ dont les composantes sont

$$n^1 = a_2^1(1 + h)\,, \quad n^2 = b_1^2(1 - h)\,, \quad n^3 = 1 - h^2\,. \tag{51}$$

Définition 2. La droite déterminée par le vecteur (51) sera appelée *normale principale* de la surface π au point M, à supposer que π soit donnée par (14), (41).

3. On peut montrer une autre signification géométrique de la normale principale à l'aide des quadriques de Lie.

Soit $M \in \pi$, soit $\gamma \subset \pi$ une courbe passant par M et dont l'équation est

$$v = v(u)\,. \tag{52}$$

En chaque point M de la courbe γ construisons la droite p déterminée par le vecteur $\boldsymbol{c}$ dont les composantes prises par rapport au repère fondamental $\{M(u, \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \boldsymbol{l}_3\}$ sont $c^1(u)$, $c^2(u)$, 0, c'est-à-dire

$$\boldsymbol{c} = c^1 \boldsymbol{l}_1 + c^2 \boldsymbol{l}_2\,. \tag{53}$$

De plus, à partir de la relation

$$c^1 \boldsymbol{l}_1 + c^2 \boldsymbol{l}_2 = h^i \underset{0}{\boldsymbol{l}_i} \tag{54}$$

nous obtenons pour les composantes h^i (prises par rapport au repère $\{M(0), \underset{0}{\boldsymbol{l}_1}, \underset{0}{\boldsymbol{l}_2}, \underset{0}{\boldsymbol{l}_3}\}$) du vecteur transformeé $\boldsymbol{c}$ le développement de Taylor

$$h^i(u) = (c^i)_0 + u\left(\frac{\mathrm{d}h^i}{\mathrm{d}u}\right)_0 + \tfrac{1}{2}u^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 h^i}{\mathrm{d}u^2}\right)_0 + \dots\,. \tag{55}$$

Nous avons, en même temps

$$\frac{\mathrm{d}h^k}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}c^k}{\mathrm{d}u} + c^i(a_i^k + b_i^k v')\,, \tag{56}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 h^k}{\mathrm{d}u^2} = \frac{\mathrm{d}^2 c^k}{\mathrm{d}u^2} + 2\frac{\mathrm{d}c^i}{\mathrm{d}u}(a_i^k + b_i^k v') + c^i\left[a_{iu}^k + a_i^k v' + \frac{\mathrm{d}(b_i^k v')}{\mathrm{d}u} + (a_i^l + b_i^l v')(a_l^k + b_l^k v')\right].$$

Développons maintenant la courbe γ dans l'espace local $\{M(0, \underset{0}{\boldsymbol{I}_1}, \underset{0}{\boldsymbol{I}_2}, \underset{0}{\boldsymbol{I}_3}\}$; soit γ_0 la courbe ainsi obtenue. Cette dernière a pour équation

$$(57) \qquad \boldsymbol{M} = (\boldsymbol{M})_0 + u(\boldsymbol{M}')_0 + \frac{1}{2!}u^2(\boldsymbol{M}'')_0 + \frac{1}{3!}u^3(\boldsymbol{M}''')_0 + \ldots$$

où

$$(\boldsymbol{M}')_0 = \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{M}}{\mathrm{d}u}\right), \quad \text{etc},$$

$$(58) \quad (\boldsymbol{M}')_0 = (a_0^i + b_0^i v')\underset{0}{\boldsymbol{I}_i}, \quad (\boldsymbol{M}'')_0 = [b_0^k v'' + (a_0^i + b_0^i v')(a_i^k + b_i^k v')]\underset{0}{\boldsymbol{I}_k}.$$

Definition 3. Soit $\gamma \subset \pi$ la courbe déterminée par l'équation (52). En chaque point $M(u) \in \gamma$, $u_0 \leqq u \leqq u_1$, construisons la droite p déterminée par le vecteur (53). Alors la surface située dans ${}^{M(u_0)}A_3$ dont les droites génératrices p_0 correspondent aux droites p par l'affinité $\boldsymbol{A}_\gamma(u)$[11]) sera désignée Π_γ, sa quadrique osculatrice par Q_γ. Si la courbe γ est l'asymptotique $\boldsymbol{u}$ [$\boldsymbol{v}$] et le vecteur $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{I}_2$ [$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{I}_1$], alors la surface correspondante sera notée $\Pi_{\boldsymbol{u}}$ [$\Pi_{\boldsymbol{v}}$] et sa quadrique osculatrice $Q_{\boldsymbol{u}}$ [$Q_{\boldsymbol{v}}$].

Nous allons déterminer maintenant la quadrique Q_γ qui contient trois droites consécutives de la surface Π_γ. L'équation d'une quadrique générale Q (en coordonnées locales) a la forme

$$(59) \quad a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + \\ + 2a_{14}x^1 + 2a_{24}x^2 + 2a_{34}x^3 + a_{44} = 0.$$

Chacune des droites de la surface Π_γ est déterminée par les points de coordonnées homogènes $(x^1, x^2, x^3, 1)$ et $(h^1, h^2, h^3, 0)$. La condition nécessaire et suffisante pour que cette droite soit en même temps une droite de la quadrique (59) est que les équations suivantes soient vérifiées

$$(60) \quad a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 + \\ + 2a_{14}x^1 + 2a_{24}x^2 + 2a_{34}x^3 + a_{44} = 0,$$

$$a_{11}x^1h^1 + a_{22}x^2h^2 + a_{33}x^3h^3 + a_{12}(x^1h^2 + h^1x^2) + a_{13}(x^1h^3 + x^3h^1) + \\ + a_{23}(x^2h^3 + x^3h^2) + a_{14}h^1 + a_{24}h^2 + a_{34}h^3 = 0,$$

$$a_{11}(h^1)^2 + a_{22}(h^2)^2 + a_{33}(h^3)^2 + 2a_{12}h^1h^2 + 2a_{13}h^1h^3 + 2a_{23}h^2h^3 = 0.$$

Nous obtenons les conditions pour les coefficients de la quadrique Q_γ, lorsque nous substituons pour x^i et h^i dans les équations (60) les développements

$$(61) \qquad x^i = uB_1^i + \tfrac{1}{2}u^2B_2^i + \ldots, \quad h^i = c^i + uA_1^i + \tfrac{1}{2}u^2A_2^i + \ldots,$$

où la signification des coefficients $A_1^i, \ldots, B_1^i, \ldots$ étant évidente des équations (55),

[11]) C'est-à-dire par l'affinité qui existe, en vertu des équations (41), entre les espaces ${}^{M(u_0)}A_3$ et ${}^{M(u)}A_3$.

(56), (57), (58). En annulant les coefficients de $(u)^0$, $(u)^1$, $(u)^2$, nous obtenons les équations

$$\begin{aligned}
(61') \qquad & a_{44} = 0\,, \quad a_{i4}B_1^i = 0\,, \\
& a_{ik}B_1^iB_1^k + a_{i4}B_2^i = 0\,, \quad a_{i4}c^i = 0\,, \\
& a_{ik}(\tfrac{1}{2}c^kB_2^i + \tfrac{1}{2}c^iB_2^k + A_1^kB_1^i + A_1^iB_1^k) + a_{i4}A_2^i = 0\,, \\
& a_{ik}c^ic^k = 0\,, \quad a_{ik}(c^kA_1^i + c^iA_1^k) = 0\,, \\
& a_{ik}(\tfrac{1}{2}c^kA_2^i + A_1^iA_1^k + \tfrac{1}{2}c^iA_2^k) = 0\,.
\end{aligned}$$

Ces neuf équations déterminent la quadrique Q_γ d'une manière univoque. Dans la suite, nous bornerons au cas où la courbe γ est une des asymptotiques et où le vecteur $\mathbf{c}$ est situé sur la tangente à l'autre asymptotique. Au sens de la définition 3, nous noterons alors la quadrique correspondante Q_γ par $Q_{\mathbf{u}}$, ou $Q_{\mathbf{v}}$ respectivement. Dans le cas de la courbe asymptotique $v = \text{const}$, les coefficients A_1^i, A_2^i, B_1^i, B_2^i sont

$$\begin{aligned}
(62) \quad & A_1^1 = a_2^1\,, \quad A_1^2 = a_2^2\,, \quad A_1^3 = 1 - h\,, \\
& A_2^1 = a_{2u}^1 + a_2^1a_1^1 + a_2^2a_2^1 + (1 - h)\,a_3^1\,, \quad A_2^2 = a_{2u}^2 + a_2^1\beta + (a_2^2)^2 + \\
& \qquad + (1 - h)\,a_3^2\,, \\
& A_2^3 = -h_u + (1 - h)\,(a_2^2 + a_3^3)\,, \quad B_1^1 = 1\,, \quad B_1^2 = 0\,, \quad B_1^3 = 0\,, \quad B_2^1 = a_1^1\,, \\
& \qquad B_2^2 = \beta\,, \quad B_2^3 = 0\,,
\end{aligned}$$

de façon que les développements des coordonnées x^i du point de la courbe γ_0, ou respectivement des composantes h^i du vecteur transporté $\mathbf{c}(0, 1, 0)$ sont déterminés par les équations

$$\begin{aligned}
(63) \qquad & x^1 = u + \tfrac{1}{2}u^2a_1^1 + \ldots\,, \quad x^2 = \tfrac{1}{2}u^2\beta + \ldots, \quad x^3 = \tfrac{1}{6}u^3(.) + \ldots\,, \\
& h^1 = ua_2^1 + \tfrac{1}{2}u^2[a_{2u}^1 + a_2^1a_1^1 + a_2^2a_2^1 + (1 - h)\,a_3^1] + \ldots\,, \\
& h^2 = 1 + ua_2^2 + \tfrac{1}{2}u^2[a_{2u}^2 + a_2^1\beta + (a_2^2)^2 + (1 - h)\,a_3^2] + \ldots\,, \\
& h^3 = u(1 - h) + \tfrac{1}{2}u^2[-h_u + (1 - h)\,(a_2^2 + a_3^3)] + \ldots\,.
\end{aligned}$$

Dans notre cas, l'équation (61') devient plus simple et les conditions pour les coefficients de la quadrique $Q_{\mathbf{u}}$ seront

$$\begin{aligned}
(64) \quad & a_{44} = 0, \quad a_{14} = 0, \quad a_{11} + a_{24}\beta = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{12}a_2^1 + a_{23}(1 - h) = 0\,, \\
& a_{11}(a_2^1)^2 + a_{33}(1 - h)^2 + a_{12}[a_{2u}^1 + a_2^1a_1^1 + 3a_2^2a_2^1 + (1 - h)\,a_3^1] + \\
& \qquad + 2a_{13}a_2^1(1 - h) + a_{23}[-h_u + (1 - h)\,(3a_2^2 + a_3^3)] = 0\,, \\
& a_{24} = 0, \; a_{12} + a_{34}(1 - h) = 0\,, \\
& a_{12}(a_1^1 + 2a_2^2) + 2a_{13}(1 - h) + a_{34}[-h_u + (1 - h)\,(a_2^2 + a_3^3)] = 0\,.
\end{aligned}$$

Si nous posons encore $a_{12} = 1$, nous obtenons pour les coefficients a_{ik} de la quadrique Q_u les relations

$$(65)\quad a_{44} = a_{14} = a_{24} = a_{11} = a_{22} = 0\,, \quad a_{34} = -\frac{1}{1-h}\,, \quad a_{23} = -\frac{a_2^1}{1-h}\,,$$

$$a_{13} = \frac{-h_u + (1-h)\,a}{2(1-h)^2}\,, \quad a_{33} = \frac{a_2^1 a_2^2 - a_{2u}^1 - (1-h)\,a_3^1}{(1-h)^2}\,,$$

où

$$(66)\qquad a = a_3^3 - a_1^1 - a_2^2\,.$$

L'équation de la quadrique Q_u a donc la forme

$$(67)\quad \frac{a_2^1 a_2^2 - a_{2u}^1 - (1-h)\,a_3^1}{(1-h)^2}(x^3)^2 + 2x^1x^2 + \frac{-h_u + (1-h)\,a}{(1-h)^2}\,x^1x^3 - \\ - \frac{2a_2^1}{1-h}\,x^2x^3 - \frac{2}{1-h}\,x^3 = 0\,.$$

D'une manière tout à fait analogue (ou bien en permutant les indices (1,2), (u, v) et les fonctions (a_i^k, b_i^k)) nous obtenons l'équation de la quadrique Q_v de la définition 3:

$$(68)\quad \frac{b_1^2 b_1^1 - b_{1v}^2 - (1+h)\,b_3^2}{(1+h)^2}(x^3)^2 + 2x^1x^2 + \frac{h_v + (1+h)\,b}{(1+h)^2}\,x^2x^3 - \\ - \frac{2b_1^2}{1+h}\,x^1x^3 - \frac{1}{1+h}\,x^3 = 0\,,$$

où

$$(69)\qquad b = b_3^3 - b_1^1 - b_2^2\,.$$

Chacune des quadriques Q_u, Q_v contient évidemment les deux tangentes asymptotiques dont les équations en coordonnées locales sont

$$(70)\qquad x^3 = 0,\ x^2 = 0, \quad \text{resp.} \quad x^3 = 0,\ x^1 = 0\,.$$

Théorème 1. *Soit π une surface donnée par* (14), (41); *soient Q_u, Q_v les quadriques de la définition* 3. *Supposons que nous ayons construit les plans asymptotiques des deux quadriques Q_u, Q_v, passant par les droites $x^3 = 0$, $x^1 = 0$, ou $x^3 = 0$, $x^2 = 0$ respectivement. Alors la normale principale de la surface π au point $M \in \pi$ coïncide avec la droite d'intersection de ces deux plans asymptotiques.*

Démonstration. Tout plan

$$(71)\qquad x^1 - \lambda x^3 = 0$$

passant par la droite $x^3 = 0$, $x^1 = 0$ de la quadrique Q_u coupe la quadrique Q_u en une autre droite dont l'équation est

$$x^1 - \lambda x^3 = 0\,,$$

$$x^1 \frac{a_2^1 a_2^2 - a_{2u}^1 - (1-h)\, a_3^1 + \left[-h_u + (1-h)\, a\right] \lambda}{(1-h)^2} +$$

$$+ x^2 \frac{2\lambda(1-h) - 2a_2^1}{1-h} - \frac{2}{1-h} = 0\,.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le plan (71) soit le plan asymptotique de la quadrique Q_u est

$$\lambda = a_2^1/(1-h)$$

de façon que son équation est

$$x^1(1-h) - a_2^1 x^3 = 0\,. \tag{72}$$

D'une manière analogue, nous obtenons l'équation du plan asymptotique correspondant de la quadrique Q_v, savoir

$$x^2(1+h) - b_1^2 x^3 = 0\,. \tag{73}$$

Le théorème 1 découle alors immédiatement de la comparaison des équations (72), (73), (48), (50) et de la définition 2.

En tenant compte des résultats précédents, on peut spécialiser la base dans chacun des espaces locaux ${}^{M(u,v)}A_3$ d'une telle manière que la normale principale soit donnée par le vecteur $\boldsymbol{I}_3$. Alors

$$a_2^1 = b_1^2 = 0\,, \tag{74}$$

de sorte qu'à partir des équations (41) on obtient

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{M} &= \mathrm{d}u\, \boldsymbol{I}_1 + \mathrm{d}v\, \boldsymbol{I}_2\,,\\ \nabla \boldsymbol{I}_1 &= (a_1^1\, \mathrm{d}u + b_1^1\, \mathrm{d}v)\, \boldsymbol{I}_1 + \beta\, \mathrm{d}u\, \boldsymbol{I}_2 + (1+h)\, \mathrm{d}v\, \boldsymbol{I}_3\,,\\ \nabla \boldsymbol{I}_2 &= \gamma\, \mathrm{d}v\, \boldsymbol{I}_1 + (a_2^2\, \mathrm{d}u + b_2^2\, \mathrm{d}v)\, \boldsymbol{I}_2 + (1-h)\, \mathrm{d}u\, \boldsymbol{I}_3\,,\\ \nabla \boldsymbol{I}_3 &= (a_3^i\, \mathrm{d}u + b_3^i\, \mathrm{d}v)\, \boldsymbol{I}_i\,. \end{aligned} \tag{75}$$

Ce résultat peut également être obtenu d'une façon analytique à partir des équations $(35_{7,8})$.

Lorsque la normale principale est déterminée par le vecteur $\boldsymbol{I}_3$, les quadriques Q_u, Q_v de la définition 3 ont les équations

$$\frac{-a_3^1}{1-h}(x^3)^2 + 2x^1x^2 + \frac{2Ax^1x^3}{1-h} - \frac{2}{1-h}\,x^3 = 0\,, \tag{67'}$$

$$\frac{-b_3^2}{1+h}(x^3)^2 + 2x^1x^2 + \frac{2Bx^2x^3}{1+h} - \frac{2}{1+h}\,x^3 = 0\,, \tag{68'}$$

où

$$(76)\qquad 2A = [-h_u + (1-h)\,a]/(1-h)\,, \quad 2B = [h_v + (1+h)\,b]/(1+h)\,.$$

Les quadriques (67′), (68′) sont, en général, régulières et déterminent un faisceau à l'équation

$$(77)\qquad (-a_3^1 + \lambda b_3^2)(x^3)^2 + 2[1 - h - \lambda(1+h)]\,x^1x^2 + 2Ax^1x^3 - \\ - 2B\lambda x^2x^3 - 2(1-\lambda)\,x^3 = 0\,,$$

où λ est le paramètre.

Définition 4. Soit π une surface donnée par (14), (75). Alors toute quadrique (77) sera appelée *quadrique de Lie* au point $M \in \pi$.

Les coordonnées locales du centre S de toute quadrique non-dégénérée du faisceau (77) peuvent être déterminées à partir des équations

$$(78)\qquad \begin{aligned} &\qquad\qquad\qquad [1-h-\lambda(1+h)]\,x^2 \quad + Ax^3 = 0\,,\\ &[1-h-\lambda(1+h)]\,x^1 + \qquad\qquad\qquad - B\lambda x^3 = 0\,,\\ &\qquad Ax^1 \qquad\qquad -B\lambda x^2 + (-a_3^1 + \lambda b_3^2)\,x^3 = 1-\lambda\,. \end{aligned}$$

D'après nos hypothèses, l'expression $1 - h - \lambda(1+h)$ est différent de zéro, de façon que nous avons pour les coordonnées locales du centre S

$$(79)\qquad \begin{aligned} x_S^1 &= \frac{B\lambda(1-\lambda)}{2AB\lambda + (-a_3^1 + \lambda b_3^2)[1-h-\lambda(1+h)]}\,,\\ x_S^2 &= \frac{-A(1-\lambda)}{2AB\lambda + (-a_3^1 + \lambda b_3^2)[1-h-\lambda(1+h)]}\,,\\ x_S^3 &= \frac{(1-\lambda)[1-h-\lambda(1+h)]}{2AB\lambda + (-a_3^1 + \lambda b_3^2)[1-h-\lambda(1+h)]}\,. \end{aligned}$$

Définition 5. Le système des droites joignant le point M aux centres des quadriques de Lie non-dégénérées sera appelé *système des normales de Lie* de la surface π.

Théorème 2. *Si, en particulier, l'espace donné $\mathfrak{A}_3$ est un espace droit, alors en tout point M de la surface π (donnée par (14), (41)) il existe une, et une seule, quadrique de Lie, donc aussi une et une seule normale de Lie.*

Démonstration. Dans l'espace affin droit, les expressions $\nabla \boldsymbol{M}$, $\nabla \boldsymbol{I}_k$ sont des différentielles complètes. Les fonctions a_0^i, b_0^i, a_i^k, b_i^k doivent donc remplir les conditions d'intégrabilité

$$(80)\qquad a_{0v}^k - b_{0u}^k = b_0^i a_i^k - a_0^i b_i^k\,, \quad a_{kv}^j - b_{ku}^j = b_k^i a_i^j - a_k^i b_i^j\,.$$

Des équations (80_1) nous obtenons pour $k = 1, 2, 3$

$$(81)\qquad 2a_2^1 = 2b_1^1,\ 2b_1^2 = 2a_2^2,\ a_2^3 = b_1^3 \quad \text{ou bien} \quad h = 0\,,$$

et des équations (80_2), nous obtenons pour les couples d'indices (1,3) et (2,3)

$$a_3^3 - a_1^1 + b_1^2 = 0\,, \quad b_3^3 - b_2^2 + a_2^1 = 0 \tag{82}$$

ou bien, comme il résulte des équations (81),

$$a_3^3 - a_1^1 + a_2^2 = 0\,, \quad b_3^3 - b_2^2 + b_1^1 = 0\,. \tag{83}$$

Si nous retranchons enfin les équations (83_1) et (81_2), ou encore (83_2) et (81_1), nous obtenons

$$a = -2b_1^2\,, \quad b = -2a_1^2 \tag{84}$$

de sorte que les coefficients de x^1x^3, x^2x^3, x^3 dans les équations (67) et (68) des quadriques Q_u et Q_v sont les mêmes. Il reste encore à montrer que les coefficients de $(x^3)^2$ sont aussi égaux. Des conditions d'intégrabilité (80), il découle pour les couples d'indices (1,1), (2,2) et (3,3) que l'on a

$$a_{1v}^1 - b_{1u}^1 = b_1^2a_2^1 + b_1^3a_3^1 - a_1^2b_2^1\,, \quad a_{2v}^2 - b_{2u}^2 = b_2^1a_1^2 - a_2^1b_1^2 - a_2^3b_3^2\,, \tag{85}$$
$$a_{3v}^3 - b_{3u}^3 = b_3^2a_2^3 - a_3^1b_1^3$$

de sorte que

$$a_v - b_u = 2b_3^2 - 2a_3^1\,. \tag{86}$$

En différentiant les équations (84) par rapport à v, ou u resp., nous avons

$$2a_{2u}^1 - 2b_{1v}^2 = a_v - b_u \tag{87}$$

c'est-à-dire

$$a_{2u}^1 + a_3^1 = b_{1v}^2 + b_3^2\,. \tag{88}$$

Comme nous avons (cf. les équations (81))

$$a_2^1a_2^2 = b_1^2b_1^1 \tag{89}$$

l'égalité des coefficients de $(x^3)^2$ dans les équations (67) et (68) découle directement de l'égalité (88); notre théorème est donc démontré.

Théorème 3. *Dans l'espace $\mathfrak{A}_3$ général, les normales de Lie de la surface π au point M se trouvent dans le faisceau de droites, situées dans le plan ϱ, à l'équation*

$$x^1A(1 + h) + x^2B(1 - h) + x^3AB = 0\,. \tag{90}$$

Démonstration. Les centres des quadriques de Lie correspondantes se trouvent tous sur la droite p aux équations paramétriques (79). Le point M et la droite p déterminent le plan ϱ cherché. Ainsi la première partie du théorème 3 est-elle démontrée. Dans le plan ϱ se trouve également la droite p' dont voici les équations paramétriques:

$$x^1 = B\lambda\,, \quad x^2 = -A\,, \quad x^3 = 1 - h - \lambda(1 + h)\,,$$

de façon que le plan ϱ est donné, par les équations paramétriques

$$x^1 = \alpha\lambda B\,, \quad x^2 = -\alpha A\,, \quad x^3 = \alpha[1 - h - \lambda(1 + h)]\,. \tag{91}$$

En éliminant les paramètres α et λ nous obtenons l'équation (90), ce qui achève la démonstration.

Dans les calculs précédents, nous avons supposé l'expression $1 - h - \lambda(1 + h)$ différente de zéro. Dans le cas où

$$\lambda = (1 - h)/(1 + h)\,, \tag{92}$$

la quadrique correspondante du faisceau (77) se décompose en deux plans: $x^3 = 0$ et le plan σ à l'équation

$$[-(1 + h)\,a_2^1 + (1 - h)\,b_3^2]\,x^3 + 2A(1 + h)\,x^1 - 2B(1 - h)\,x^2 - 4h = 0\,, \tag{93}$$

le plan δ contenant la conique commune aux quadriques Q_u et Q_v.

Considérons maintenant de plus près comment peuvent être situés les plans ϱ et σ. Le plan ϱ coupe le plan tangent à la surface π en une droite m, le plan σ le coupe en une droite n. Si nous désignons par A et B les points d'intersection de la droite n avec les tangentes asymptotiques et par C le point commun aux droites m et n, nous avons le résultat suivant:

Le rapport des segments $AC : BC$ est égal à -1.

La démonstration peut être faite p.ex. par le calcul direct des coordonnées des points A, B, C à partir des équations (90) et (93). On peut procéder aussi de la façon suivante: Construisons le plan σ', parallèle ou plan σ et passant par le point M. Le plan σ' coupe le plan tantent en une droite n' dont voci l'équation

$$A(1 + h)\,x^1 - B(1 - h)\,x^2 = 0\,;$$

l'équation de la droite m est

$$A(1 + h)\,x^1 + B(1 - h)\,x^2 = 0\,.$$

Il découle des deux équations que les tangentes asymptotiques forment avec les droites m, n' un quaterne harmonique. Comme la droite $n \parallel n'$, le rapport $AC : BC$ est égal à -1.

Comme nous voyons des équations (67′) et (68′), le troisième axe de coordonnées coupe les quadriques Q_u, Q_v en deux points G, H, dont les coordonnées sont données par les expressions

$$x^3 = -2/a_3^1\,, \quad x^3 = -2/b_3^2\,.$$

Donc le rapport $GM : HM$ égale b_3^2/a_3^1. Cela fait voir également la signification géométrique des invariants a_3^1, b_3^2.

4. Dans l'espace local d'un point M de la surface π considérée ((14), (75)), soit donnée une quadrique Q à l'équation

$$\begin{aligned} a_{11}(x^1)^2 + a_{22}(x^2)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + \\ + 2a_{23}x^2x^3 + 2a_{14}x^1 + 2a_{24}x^2 + 2a_{34}x^3 + a_{44} = 0\,. \end{aligned} \tag{59}$$

Définition 6. La quadrique Q donnée par l'équation (59) sera appelée *quadrique osculatrice* de la surface π ((14), (75)) au point $M_0 \in \pi$ si elle contient l'élément du 2e ordre de chaque courbe γ_0 que l'on obtient en développant une quelconque courbe $\gamma \subset \pi$, $M_0 \in \gamma$.

Pour les coordonnées du point M de la courbe γ_0, nous obtenons à l'aide des équations (57), (58) les développements suivants

$$(94) \qquad x^1 = u + \tfrac{1}{2}u^2(a_1^1 + b_1^1 v' + \gamma v'^2) + \dots,$$
$$x^2 = uv' + \tfrac{1}{2}u^2(v'' + \beta + v'a_2^2 + v'^2 b_2^2) + \dots, \quad x^3 = \tfrac{1}{2}u^2 2v' + \dots .$$

En substituant les expressions (94) dans l'équation (59), nous avons

$$(95) \qquad a_{44} + u(2a_{14} + 2a_{24}v') +$$
$$+ u^2[a_{11} + a_{14}(.) + a_{24}(.) + v'(2a_{12} + 2a_{34}) + v'^2 a_{22}] + u^3(.) + \dots = 0 .$$

Pour que la quadrique Q soit une quadrique osculatrice, il faut et il suffit, d'après la définition 6, que les coefficients de $(u)^0, (u)^1, (u)^2$ s'annulent identiquement pour toutes les directions v'. Comme cela, nous obtenons pour les coefficients a_{ik} de l'équation (59) les conditions

$$(96) \qquad a_{44} = a_{14} = a_{24} = a_{11} = a_{22} = 0, \quad a_{12} + a_{34} = 0 .$$

Si nous posons encore $a_{12} = 1$, alors l'équation de la quadrique osculatrice Q devient

$$(97) \qquad a_{33}(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 + 2a_{23}x^2x^3 - 2x^3 = 0,$$

où a_{33}, a_{13}, a_{23} sont des paramètres arbitraires. Nous avons donc le

Theorème 4. *Dans $\mathfrak{A}_3$ général, il y a ∞^3 de quadriques osculatrices d'une surface π en un point M.*

Les tangentes aux asymptotiques u = const aux points de la courbe asymptotique u déterminent une surface réglée Π_u (voir la définition 3). Tout plan déterminé par l'axe des x^2 et par un point $N(\lambda, \mu, \nu)$[12], à l'équation

$$(98) \qquad \nu x^1 - \lambda x^3 = 0,$$

est tangent à la surface Π_u au point $K(0, \nu\lambda^{-1}(1 - h)^{-1}, 0)$. En effet, remplaçons la surface Π_u par un de ses ∞^3 hyperboloïdes de contact

$$(99) \qquad a_{11}(x^1)^2 + a_{33}(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 2a_{13}x^1x^3 - 2(1 - h)^{-1} x^3 = 0;$$

la conique déterminée par les équations (98), (99) se compose de deux droites dont les projections dans le plan $x^1 = 0$ sont les droites

$$(100) \quad x^3 = 0, \quad (a_{11}\lambda^2\nu^{-2} + a_{33} + 2a_{13}\lambda\nu^{-1})\, x^3 + 2\lambda\nu^{-1}x^2 - 2(1 - h)^{-1} = 0,$$

le point d'intersection commun des droites (100) est évidemment le point de contact K du plan (98) avec la surface Π_u, que nous avons cherché.

D'une manière tout à fait analogue, le plan donné par l'équation

$$(101) \qquad \nu x^2 - \mu x^3 = 0,$$

[12]) Nous supposons que le point $N(\lambda, \mu, \nu)$ ne se trouve pas dans le plan tangent à la surface π, c'est-à-dire que $\nu \neq 0$.

et qui passe par le point $N(\lambda, \mu, \nu)$ et par l'axe des x^1, est tangent à la surface Π_ν de la définition 3 au point $L(\nu\mu^{-1}(1 + h)^{-1}, 0, 0)$.

Définition 7. Soit π la surface déterminée par (14) et (75). Soient M, N, K, L les points donnés par leurs coordonnées locales resp. $(0, 0, 0)$, (λ, μ, ν), $(0, \nu\lambda^{-1}(1 - h)^{-1}, 0)$, $(\nu\mu^{-1}(1 + h)^{-1}, 0, 0)$. La correspondance biunivoque qui associe la droite $p \equiv KL$ à la droite $p \equiv MN$ sera appelée *correspondance* $\boldsymbol{K}$; nous avons donc $\boldsymbol{K}p = \bar{p}$.

Outre cela, la polarité $\boldsymbol{P}$, déterminée par la quadrique osculatrice (97) associe à la droite p la droite p^* dont l'équation est

(102)
$$x^3 = 0\,, \quad x^1(\mu + a_{13}\nu) + x^2(\lambda + a_{23}\nu) + \\ + x^3(a_{33}\nu + a_{13}\lambda + a_{23}\mu - 1) - \nu = 0\,.$$

La droite p^* peut être donnée p.ex. par les points $K'(0, \nu/(\lambda + a_{23}\nu), 0)$ et $L'(\nu/(\mu + a_{13}\nu), 0, 0)$. Les coefficients a_{13}, a_{23} peuvent être choisis de telle façon que l'on ait $K \equiv K'$, $L \equiv L'$. En effet, il suffit de poser $a_{13} = \mu h/\nu$, $a_{23} = -\lambda h/\nu$. Dans ce cas, nous aurons pour toutes les droites p (voir la définition 7)

(103)
$$\boldsymbol{K}p \equiv \boldsymbol{P}p\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \bar{p} \equiv p^*\,.$$

Il est possible de résumer nos résultats en

Théorème 5. *Dans $\mathfrak{A}_3$ général, à chaque droite p passant par un point M de la surface π ((14), (75)) et qui ne se trouve pas dans le plan tangent à π correspondant, on peut associer ∞^1 quadriques osculatrices à l'équation*

(104)
$$a_{33}(x^3)^2 + 2x^1x^2 + 2h\mu\nu^{-1}x^1x^3 - 2h\lambda\nu^{-1}x^2x^3 - 2x^3 = 0$$

d'une telle maniere que la polaire p^* conjuguée à la droite p par rapport aux quadriques (104) coïncide avec la droite $\boldsymbol{K}p$.

Théorème 6. *Dans les conditions du théorème précédent, les centres des quadriques (104) se trouvent sur une droite o passant par le point M.*

Démonstration. Les coordonnées locales des centres des quadriques (104) vérifient les équations

(105)
$$x^2 + h\mu\nu^{-1}x^3 = 0\,, \quad x^1 - h\lambda\nu^{-1}x^3 = 0\,, \\ h\mu\nu^{-1}x^1 - h\lambda\nu^{-1}x^2 + a_{33}x^3 - 1 = 0\,.$$

Les deux premières équations ne dépendent pas du paramètre a_{33} et déterminent la droite o cherchée. Les plans (105_1), (105_2) passent par le point M, donc la droite o passe également par M, c.q.f.d.

Définition 8. La correspondance biunivoque qui associe à la droite considérée p de la définition 7 la droite o du théorème 6 sera appelée *correspondance* $\boldsymbol{T}$; on a donc $\boldsymbol{T}p = o$.

Théorème 7. *Soit n_∞ la droite à l'infini du plan tangent à la surface π en un point $M \in \pi$, la surface π étant déterminée par* (14) *et* (75). *Alors la normale principale de la surface π en M est la droite $\mathbf{K}^{-1}n_\infty$.*

Démonstration. La droite $\bar{p}$ est déterminée par les points K et L dont les coordonnées homogènes sont $[0, v, 0, \lambda(1 - h)]$ et $[v, 0, 0, \mu(1 + h)]$ respectivement. Si $\bar{p}$ est la droite impropre du plan tangent, on a $\lambda(1 - h) = 0$, $\mu(1 + h) = 0$. Or, d'après (43), nous avons $|h| \neq 1$, donc $\lambda = \mu = 0$ nécessairement, c.q.f.d.

Définition 9. La surface π soit donnée par (14), (75). Le faisceau de quadriques à l'équation

$$a_{33}(x^3)^2 + 2x^1x^2 - 2x^3 = 0\,, \tag{107}$$

que l'on peut associer à la normale de la surface π suivant le théorème 5 sera appelé *faisceau de quadriques de Darbous.*

Théorème 8. *Les centres des quadriques de Darboux en un point M de la surface π* ((14), (75)) *se trouvent sur la normale principale en $M \in \pi$.*

Démonstration. A l'aide des équations (105), nous obtenons pour les centres des quadriques (107) les conditions suivantes

$$x^2 = 0\,, \quad x^1 = 0\,, \quad a_{33}x^3 = 1\,,$$

de sorte que le centre d'une quelconque des quadriques de Darboux se trouve sur le troisième axe de coordonnées du repère local, donc sur la normale principale.

Nous allons montrer encore un autre propriété de la normale principale et qui fait apparaître les rapports qui existent entre la normale principale et le faisceau des quadriques de Darboux.

Théorème 9. *Supposons que la surface π* ((14), (75)) *ait une torsion non-nulle. Alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'une droite p coïncide avec la droite $\mathbf{T}p$* (*voir la définition* 6) *est que p soit la normale principale de la surface π.*

Démonstration. a) Soit p la normale principale. Alors $\lambda = \mu = 0$ et la droite correspondante $\mathbf{T}p = o$ sera en vertu des équations (105), donnée par les équations $x^1 = 0, x^2 = 0$.

b) En général, la droite p est déterminée par les coordonnées λ, μ, v, tandis que la droite o a les coordonnées $h\lambda, -h\mu, v$. Pour que les droites p et o coïncident, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lambda = kh\lambda\,, \quad \mu = -kh\,\mu\,, \quad v = kv\,, \tag{108}$$

où k est un facteur de proportionnalité différent de zéro. Comme il s'agit d'une surface à torsion non-nulle, les équations (108) ne peuvent être vérifiées que si $\lambda =$ $= \mu = 0$, c.q.f.d.

5. Dans la suite, nous voulons comparer nos résultats précédents avec ceux de V. D. IZMAÏLOFF (voir [9]). Il s'agira surtout de la connexion induite par la connexion de l'espace $\mathfrak{A}_3$ sur la surface normalisée $\pi \subset \mathfrak{A}_3$. Le problème de la connexion invariante induite a été déjà traité par V. HLAVATÝ et F. NOŽIČKA (cf. [7], [8]).

Rappelons tout d'abord quelques résultats concernant les notions de *dérivée covariante mixte* et de *connexion induite* (voir [1], p. 139).

Soient données deux variétés élémentaires $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ de dimension n et $n - 1$ respectivement. Les points de l'espace $\mathfrak{M}$ ou $\mathfrak{N}$ soient donnés, rapportés aux systèmes de coordonnées correspondants, par les coordonnées $x^1, \ldots, x^n$ et $u^1, \ldots, u^{n-1}$. A chaque point $(u^1, \ldots, u^{n-1})$ soit associé d'une façon univoque un point $(x^1, \ldots, x^n)$ par les équations

$$x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{109}$$

Considérons les fonctions polylinéaires $z = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots)$ d'arguments vectoriels, où les vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \ldots$ appartiennent aux espaces $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$. Dans chacun des espaces $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ soit donnée une connexion affine, déterminée par les formes de Pfaff ω_i^k, ou resp. $\check{\omega}_\alpha^\beta(\alpha, \beta = 1, \ldots, n-1)$. Si nous avons dans l'espace $\mathfrak{N}$ une courbe γ, nous déterminons la différentielle de la fonction $z = A_{\alpha i \ldots} v^\alpha w^i \ldots$, sous l'hypothèse que les vecteurs v^α (ou w^i, resp.) se transforment parallèlement par la connexion de l'espace $\mathfrak{N}$, ou $\mathfrak{M}$, respectivement. Nous avons

$$\mathrm{d}v^\alpha = -\check{\omega}_\beta^\alpha v^\beta, \quad \mathrm{d}w^i = -\omega_k^i w^k,$$

de sorte que la différentielle cherchée a la forme

$$\mathrm{d}z = (\mathrm{d}A_{\alpha i \ldots} - \check{\omega}_\alpha^\beta A_{\beta i \ldots} - \omega_i^k A_{\alpha k \ldots})\, v^\alpha w^i \ldots .$$

Donc, la différentielle $\mathrm{d}z$ est une fonction polylinéaire des vecteurs v^α, w^i, ..., . Le tenseur

$$\delta A_{\alpha i} = \mathrm{d}A_{\alpha i \ldots} - \check{\omega}_\alpha^\beta A_{\beta i \ldots} - \omega_i^k A_{\alpha k \ldots}$$

sera appelé *différentielle absolute mixte*. Si nous exprimons les formes de Pfaff correspondantes à l'aide des coefficients de la connexion, alors

$$\omega_i^k = \Gamma_{ji}^k \,\mathrm{d}x^j, \quad \check{\omega}_\alpha^\beta = \check{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\beta \,\mathrm{d}u^\gamma,$$

ou bien, compte tenu de (109),

$$\omega_i^k = \Gamma_{ji}^k B_\alpha^j \,\mathrm{d}u^\alpha \quad \text{où} \quad B_\alpha^j = \frac{\partial x^j}{\partial u^\alpha}.$$

Dans ce cas la différentielle absolue mixte peut être écrite sous la forme

$$\delta A_{\alpha i \ldots} = (\partial_\gamma A_{\alpha i \ldots} - \check{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\beta A_{\beta i \ldots} - \Gamma_{ji}^k A_{\alpha k \ldots} B_\gamma^j)\,\mathrm{d}u^\gamma.$$

L'expression

$$\mathrm{D}_\gamma A_{\alpha i \ldots} = \partial_\gamma A_{\alpha i \ldots} - \check{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\beta A_{\beta i \ldots} - \Gamma_{\gamma i}^k A_{\alpha k \ldots} B_\gamma^j$$

sera appelée *dérivée covariante mixte*.

Soit $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$. Alors les équations (109) déterminent une hypersurface dans $\mathfrak{M}$.

Définition 10. Une hypersurface π aux équations (109) dans une variété élémentaire n-dimensionnelle sera dite normalisée si en chacun de ses points $M(u^1, \ldots, u^{n-1})$ on se donne un vecteur n^i tel que le déterminant

$$[B_1^i, \ldots, B_{n-1}^i, n^i] \neq 0 .$$

Sur l'hypersurface π soit donnée une courbe γ par les équations

$$u^\alpha = u^\alpha(t) , \quad \alpha = 1, \ldots, n-1 , \tag{110}$$

alors le vecteur tangent à la courbe (110) a les composantes

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt} = B_\alpha^i v^\alpha . \tag{111}$$

Les équations (111) associent à chaque vecteur tangent v^α un vecteur v^i de l'espace $\mathfrak{M}$. En général, on trouve évidemment que le vecteur v^i soumis à un transport parallèle dans la connexion affine déterminée par les coefficients Γ_{ij}^k ne reste pas vecteur tangent à l'hypersurface π.

Définition 11. Sur une variété élémentaire n-dimensionnelle, ayons une hypersurface normalisée suivant la définition 10. Nous dirons que la connexion affine $\check{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ de l'hypersurface π (cf. [1], p. 146) est *induite par le vecteur* n^i, lorsque

$$D_\gamma B_\alpha^i = b_{\alpha\gamma} n^i . \tag{112}$$

Ici le symbole D_γ désigne la dérivée covariante mixte par rapport aux connexions $\check{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma$ et Γ_{ij}^k.

En écrivant explicitement les équations (112), nous obtenons

$$\partial_\gamma B_\alpha^i - \check{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\beta B_\beta^i + \Gamma_{jk}^i B_\alpha^k B_\gamma^j = b_{\alpha\gamma} n^i . \tag{113}$$

Soient $\tilde{B}_i^\beta$ des fonctions vérifiant les équations

$$B_\alpha^i \tilde{B}_i^\beta = \delta_\alpha^\beta , \quad n^i \tilde{B}_i^\alpha = 0 . \tag{114}$$

Alors les équations (113) donnent pour la connexion induite $\check{\Gamma}_{\gamma\alpha}^\beta$ les formules (cf. [1], p. 147)

$$\check{\Gamma}_{\beta\alpha}^\gamma = (\partial_\gamma B_\alpha^i) \tilde{B}_i^\beta + \Gamma_{jk}^i B_\alpha^k B_\gamma^j \tilde{B}_i^\beta . \tag{115}$$

Revenons à l'étude de la surface $\pi \subset \mathfrak{A}_3$ donnée par (14) et (75). Si le repère $\{M(u, v), \boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \boldsymbol{I}_3\}$ est spécialisé d'après les équations (75), nous obtenons à partir des équations (5)

$$\begin{aligned}
(116) \quad \nabla \boldsymbol{M} &= du^1\, \boldsymbol{I}_1 + du^2\, \boldsymbol{I}_2 + du^3 \boldsymbol{I}_3 , \\
\nabla \boldsymbol{I}_1 &= (\Gamma_{11}^1\, du^1 + \Gamma_{21}^1\, du^2 + \Gamma_{31}^1\, du^3)\, \boldsymbol{I}_1 + (\beta\, du^1 + \Gamma_{31}^2\, du^3)\, \boldsymbol{I}_2 + \\
&\quad + [(1 + h)\, du^2 + \Gamma_{31}^3\, du^3]\, \boldsymbol{I}_3 , \\
\nabla \boldsymbol{I}_2 &= (\Gamma_{22}^1\, du^2 + \Gamma_{32}^1\, du^3)\, \boldsymbol{I}_1 + (\Gamma_{12}^2\, du^1 + \Gamma_{22}^2\, du^2 + \Gamma_{32}^2\, du^3)\, \boldsymbol{I}_2 + \\
&\quad + [(1 - h)\, du^1 + \Gamma_{32}^3\, du^3]\, \boldsymbol{I}_3 , \\
\nabla \boldsymbol{I}_3 &= \Gamma_{k3}^i\, du^k\, \boldsymbol{I}_i ,
\end{aligned}$$

de sorte que l'on a

$$\Gamma^2_{11} = \beta\,, \quad \Gamma^2_{21} = 0\,, \quad \Gamma^3_{11} = 0\,, \quad \Gamma^3_{21} = 1 + h\,, \quad \Gamma^1_{12} = 0\,, \quad \Gamma^3_{12} = 1 - h\,, \quad \Gamma^3_{22} = 0\,. \tag{117}$$

Les équations (14) de la surface π donnent

$$B^i_\alpha = \delta^i_\alpha\,, \quad \partial_\beta B^i_\alpha = 0\,. \tag{118}$$

Les équations[13])

$$B^i_\alpha m_i = 0 \tag{119}$$

dont une solution particulière est p. ex.

$$m_1 = 0\,, \quad m_2 = 0\,, \quad m_3 = 1\,, \tag{120}$$

déterminent le champ du covecteur tangent, à une fonction scalaire λ près. La solution générale des équations (119) a la forme

$$\tilde{m}_1 = 0\,, \quad \tilde{m}_2 = 0\,, \quad \tilde{m}_3 = \lambda\,. \tag{121}$$

Formons maintenant l'objet

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \bar{B}^i_{\alpha\beta} m_i \equiv \left(\partial_\beta B^i_\alpha + G^i_{jk} B^j_\alpha B^k_\beta\right) m_i$$

où

$$G^i_{jk} = \tfrac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}\right).$$

Dans notre cas, nous avons évidemment

$$|\omega_{\alpha\beta}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{122}$$

Ecrivons ensuite

$$\check{B}^i_{\alpha\beta} = \partial_\beta B^i_\alpha + \Gamma^i_{jk} B^j_\alpha B^k_\beta\,;$$

alors la connexion $\check{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta}$ sur la surface π pourra être écrite, compte tenu des équations (115), sous la forme

$$\check{\Gamma}^\gamma_{\alpha\beta} = \check{B}^i_{\alpha\beta} \tilde{B}^\gamma_i \tag{123}$$

V. D. Izmaïloff détermine les fonctions inconnues $\tilde{B}^\gamma_i$ à partir des équations

$$B^i_\alpha \tilde{B}^\gamma_i = \delta^\beta_\alpha\,, \quad \check{B}^i_{\alpha\gamma} \tilde{B}^\gamma_i = \Gamma_\alpha\,, \tag{124}$$

où l'objet Γ_α se transforme par un changement de coordonnées suivant les équations

$$\Gamma_{\alpha'} = \Gamma_\alpha \frac{\partial u^\alpha}{\partial u^{\alpha'}} + \frac{\partial u^{\sigma'}}{\partial u^\alpha} \frac{\partial^2 u^\alpha}{\partial u^{\sigma'} \partial u^{\alpha'}}\,.$$

Outre cela, il faut déterminer l'objet Γ_α indépendemment de la solution (120). M. Izmaïloff détermine alors l'objet Γ_α remplissant les deux conditions à l'aide des équations

$$\Gamma_\sigma = T_\sigma - \pi_\sigma\,, \tag{125}$$

[13]) Nous suivons ici les raisonnements de V. D. Izmaïloff [9].

où

(126) $\qquad T_\sigma = \partial_\sigma \ln \sqrt{|\omega|}\,, \quad \pi_\sigma = s\omega^{\alpha\beta}(\mathrm{D}^*_\sigma \mathrm{D}^*_\beta B^i_\alpha)\, m_i + k\omega^{\alpha\beta}(\mathrm{D}^*_\sigma \mathrm{D}^*_\beta B^i_\alpha)\, m_i\,,$

les symboles D^*_σ désignent ici la dérivée covariante mixte par rapport aux connexions G^i_{jk} et $\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}_\omega$. Les expressions $\left\{\begin{matrix}\sigma\\ \alpha\beta\end{matrix}\right\}_\omega$ sont les symboles de Christofell, leur base est le tenseur symétrique $\omega_{\alpha\beta}$; $s + k = -(n-1)/(n+1)$. Nous avons donc

$$(127) \qquad \pi_\sigma = s\omega^{\alpha\beta}\Bigg[\partial_\sigma\left(\partial_\beta B^i_\alpha - \left\{\begin{matrix}\varrho\\ \beta\alpha\end{matrix}\right\} B^i_\varrho + G^i_{jk}B^k_\alpha B^j_\beta\right) -$$
$$- \left\{\begin{matrix}\gamma\\ \sigma\alpha\end{matrix}\right\}\left(\partial_\beta B^i_\gamma - \left\{\begin{matrix}\varrho\\ \beta\gamma\end{matrix}\right\} B^i_\varrho + G^i_{jk}B^k_\gamma B^j_\beta\right) + G^i_{jk}\left(B^j_\sigma \partial_\beta B^k_\alpha - \left\{\begin{matrix}\varrho\\ \beta\alpha\end{matrix}\right\} B^k_\varrho + G^k_{ql}B^l_\alpha B^q_\beta\right)\Bigg] m_i +$$
$$+ k\omega^{\alpha\beta}\Bigg[\partial_\beta\left(\partial_\sigma B^i_\alpha - \left\{\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\alpha\end{matrix}\right\} B^i_\varrho + G^i_{jk}B^k_\alpha B^j_\sigma\right) - \left\{\begin{matrix}\gamma\\ \beta\sigma\end{matrix}\right\}\left(\partial_\gamma B^i_\alpha - \left\{\begin{matrix}\varrho\\ \gamma\alpha\end{matrix}\right\} B^i_\varrho + G^i_{jk}B^k_\alpha B^j_\sigma\right) -$$
$$- \left\{\begin{matrix}\gamma\\ \beta\alpha\end{matrix}\right\}\left(\partial_\sigma B^i_\gamma - \left\{\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\gamma\end{matrix}\right\} B^i_\varrho + G^i_{jk}B^k_\gamma B^j_\sigma\right) + G^i_{jk}B^j_\beta\left(\partial_\sigma B^k_\alpha - \left\{\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\alpha\end{matrix}\right\} B^k_\varrho + G^k_{qp}B^p_\alpha B^q_\sigma\right)\Bigg] m_i\,.$$

Dans notre cas particulier, tous les symboles de Christofell égalent zéro, de sorte que, en vertu des équations (118) et (120), les équations (127) se simplifient considérablement et deviennent

$$(128) \qquad \pi_\sigma = s\omega^{\alpha\beta}[\partial_\sigma G^3_{\beta\alpha} + G^3_{\sigma k}G^k_{\alpha\beta}] + k\omega^{\alpha\beta}[\partial_\beta G^3_{\sigma\alpha} + G^3_{\beta k}G^k_{\alpha\sigma}].$$

De (122) nous obtenons

$$(129) \qquad |\omega^{\alpha\beta}| = \begin{vmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\,;$$

on a donc

$$(130) \quad \pi_\sigma = 2s(\partial_\sigma G^3_{21} + G^3_{\sigma 1}G^1_{12} + G^3_{\sigma 2}G^2_{12} + G^3_{\sigma 3}G^3_{12}) + k(\partial_2 G^3_{\sigma 1} + G^3_{21}G^1_{1\sigma} +$$
$$+ G^3_{22}G^2_{1\sigma} + G^3_{23}G^3_{1\sigma} + \partial_1 G^3_{\sigma 2} + G^3_{11}G^1_{2\sigma} + G^3_{12}G^2_{2\sigma} + G^3_{13}G^3_{2\sigma})\,.$$

Comme $n = 3$, on a $k = -\frac{1}{2} - s$. En substituant les coefficients de la connexion Γ^k_{ij} de (116) dans les équations (130), nous obtenons

$$(131) \qquad \pi_1 = -\Gamma^1_{11}(\tfrac{1}{2} + s) + (\tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{4})(\Gamma^2_{12} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^3_{31})\,,$$
$$\pi_2 = -\Gamma^2_{22}(\tfrac{1}{2} + s) + (\tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{4})(\Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{23} + \Gamma^3_{32})\,.$$

Comme T_σ s'annulant, les équations (125) donnent

$$(132) \qquad \Gamma_1 = \Gamma^1_{11}(\tfrac{1}{2} + s) + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}s)(\Gamma^1_{12} + \Gamma^3_{13} + \Gamma^3_{31})\,,$$
$$\Gamma_2 = \Gamma^2_{22}(\tfrac{1}{2} + s) + (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2}s)(\Gamma^1_{21} + \Gamma^3_{23} + \Gamma^3_{32})\,.$$

A présent, il est aisé de déterminer à l'aide des équations (124) les expressions $\tilde{B}_i^\alpha$; un calcul direct donne

$$\tilde{B}_1^1 = 1,\ \tilde{B}_2^1 = 0,\ \tilde{B}_1^2 = 0,\ \tilde{B}_2^2 = 1\,, \tag{133}$$

$$\tilde{B}_3^1 = \frac{(s-\frac{1}{2})\,\Gamma_{22}^2 + (\frac{1}{4}-\frac{1}{2}s)(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{32}^3)}{1-h}\,,$$

$$\tilde{B}_3^2 = \frac{(s-\frac{1}{2})\,\Gamma_{11}^1 + (\frac{1}{4}-\frac{1}{2}s)(\Gamma_{21}^1 + \Gamma_{23}^3 + \Gamma_{32}^3)}{1+h}\,.$$

Le vecteur n^i correspondant, qui induit sur π la connexion (123), sera déterminé à l'aide des équations (114_2)

$$n^1\tilde{B}_1^1 + n^2\tilde{B}_2^1 + n^3\tilde{B}_3^1 = 0\,,\quad n^1\tilde{B}_1^2 + n^2\tilde{B}_2^2 + n^3\tilde{B}_3^3 = 0\,,$$

de façon que l'on a

$$n^1 : n^2 : n^3 = -\tilde{B}_3^1 : -\tilde{B}_3^2 : 1\,. \tag{134}$$

Définition 12. Soit π la surface déterminée par (14) et (75). Les droites de l'espace local ${}^MA_3$ passant par le point $M \in \pi$ et déterminées par le vecteur (134) seront appelées *normales d'Izmaïloff* de la surface π en M. (Elles appartiennent évidemment à un même faisceau).

Si nous considérons la surface π comme une variété de König (cf. la note 6), alors il se pose la question de savoir s'il existe parmi les normales d'Izmaïloff une qui soit indépendante du mode de l'immersion. La réponse est donnée par le théorème suivant.

Théorème 10. *Dans le faisceau de normales d'Izmaïloff* (*données par* (134)) *il y en a une et une seule normale indépendante du mode de l'immersion, c'est la normale principale.*

Démonstration. Pour qu'un des vecteurs (134) soit indépendant du mode de l'immersion il faut et il suffit que le coefficient $(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}s)$ de Γ_{31}^3, ou Γ_{32}^3 respectivement, égale zéro. Or, on a dans ce cas-là, $\tilde{B}_3^1 = 0$, $\tilde{B}_3^2 = 0$, c.q.f.d.

Pour terminer, nous allons montrer encore la signification géométrique du vecteur (cf. [9], p. 174)

$$n^i = \tfrac{1}{2}\omega^{\alpha\beta}\left(\bar{B}_{\alpha\beta}^i - \left\{{\sigma \atop \alpha\beta}\right\} B_\sigma^i\right).$$

Nous avons la relation

$$n^1 = \tfrac{1}{2}\Gamma_{21}^1\,,\quad n^2 = \tfrac{1}{2}\Gamma_{12}^2\,,\quad n^3 = 1\,. \tag{135}$$

On sait bien (voir p.ex. [3], p. 105) que la normale affine d'une surface π dans l'espace affin droit est déterminée par le vecteur

$$\boldsymbol{k} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u\,\partial v} \tag{136}$$

où $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(u, v)$ est l'équation de la surface π rapportée aux paramètres asymptotiques u, v. Or, dans un espace à connexion affine, on a

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u\, \partial v} \neq \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u\, \partial v} .$$

Plus concrètement, nous avons

$$(137) \quad \boldsymbol{k}_1 = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial v\, \partial u} = b_1^1 \boldsymbol{I}_1 + (1 + h)\, \boldsymbol{I}_3\,, \quad \boldsymbol{k}_2 = \frac{\partial^2 \boldsymbol{M}}{\partial u\, \partial v} = a_2^2 \boldsymbol{I}_2 + (1 - h)\, \boldsymbol{I}_3\,.$$

Les vecteurs $\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2$ avec le point M déterminent un plan dont l'équation est

$$(138) \qquad x^1 a_2^2 (1 + h) + x^2 b_1^1 (1 - h) - x^3 b_1^1 a_2^2 = 0\,.$$

Théorème 11. *Soit π une surface déterminée par* (14) *et* (75). *Alors la normale déterminée par le vecteur* (135) *est située dans le plan* (138).

Démonstration. Il résulte des équations (135) et (16) que l'on a

$$(139) \qquad n^1 = \tfrac{1}{2} b_1^1\,, \quad n^2 = \tfrac{1}{2} a_2^2\,, \quad n^3 = 1\,.$$

En substituant les valeurs (139) dans (138), nous obtenons immédiatement le résultat désiré.

Le plan (138) coupe le plan tangent à la surface π en une droite dont l'équation est

$$(140) \qquad x^1 a_2^2 (1 + h) + x^2 b_1^1 (1 - h) = 0\,.$$

Théorème 12. *La surface π soit donnée par* (14) *et* (75). *Alors le rapport anharmonique H des droites passant par le point M et déterminées respectivement par les vecteurs $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$,* (135) *et par l'équation* (140) *est $H = -(1 - h)/(1 + h)$.*

Démonstration. Projetons les droites en question dans le plan tangent, parallèlement au vecteur $\boldsymbol{I}_3$. En vertu de (137) nous obtenons ainsi les droites

$$(141) \quad x^2 = 0\,, \quad x^1 = 0\,, \quad x^1 a_2^2 - x^2 b_1^1 = 0\,, \quad x^1 a_2^2 (1 + h) + x^2 b_1^1 (1 - h) = 0\,,$$

dont le rapport anharmonique est évidemment le même que le rapport anharmonique des droites du théorème 12. Or, on voit immédiatement que le rapport anharmonique des droites (141) est

$$H = -(1 - h)/(1 + h)\,,$$

c.q.f.d.

Le présent travail a été préparé au centre scientifique de la chaire de mathématiques et de géométrie descriptive de la faculté de Construction de l'Ecole Polytechnique de Brno, en particulier au séminaire de géométrie différentielle du Professeur J. Klapka. Il traite un problème posé par M. A. Švec de Prague.

L'auteur profite de cette occasion pour remercier tous ceux qui l'ont aidé pendant la préparation de ce travail, en particulier Prof. J. Klapka, MM. A. Švec et V. Havel.

Littérature

[1] *А. П. Норден:* Пространства аффинной связности. Москва 1950.
[2] *П. А. Широков* и *А. П. Широков:* Аффинная дифференциальная геометрия. Москва 1959.
[3] *W. Blaschke:* Vorlesungen über Differentialgeometrie. Band II, Berlin 1923.
[4] *С. П. Фиников:* Проективно-дифференциальная геометрия. Москва 1937.
[5] *J. A. Schouten:* Der Ricci — Kalkül, Berlin 1924.
[6] *J. A. Schouten - J. D. Struik:* Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie. Groningen-Batavia, Band I (1935), Band II (1938).
[7] *V. Hlavatý:* Induzierte und eingeborene Konnexion in den (nicht) holonomen Räumen. Mathematische Zeitschrift *38* (1934), 283—300.
[8] *F. Nožička:* Le vecteur affinonormal et la connexion de l'hypersurface dans l'espace affin. Čas. pro pěst. matematiky a fysiky *75* (1950), 179—209.
[9] *В. Д. Измайлов:* К теории гиперповерхности пространства аффинной связности. Успехи мат наук, *X*V, 1960, *5* (*95*), 171—178.
[10] *A. Demoulin:* Sur la théorie des lignes asymptotiques. Compt. Rend. Acad. Sci., *146* (1908), 413—415.
[10a] *A. Demoulin:* Sur la quadrique de Lie. Compt. Rend. Acad. Sci., *147* (1908), 493—496, 565—568.
[11] *A. Švec:* L'élément linéaire projectif d'une surface dans l'espace à connexion projective. Чехословацкий математический журнал, *10* (*85*), 1960, 523—550.
[12] *A. Švec:* L'élément linéaire projectif d'une surface dans l'espace à connexion projective. Чехословацкий математический журнал, *8* (*83*), 1958, 285—291.
[13] *P. K. Raschewski:* Riemansche Geometrie und Tensoranalysis. Berlin 1959.
[13a] *П. К. Рашевский:* Риманова геометрия и тензорный анализ. Москва 1953.
[14] *A. Švec:* K výkladu teorie prostorů s konexí. Čas. pro pěst. matematiky *86* (1961), 425—432.

Резюме

К ПРОБЛЕМЕ ОБОБЩЕНИЯ АФФИННОЙ НОРМАЛИ

ЙОСЕФ ГАВЕЛКА (Josef Havelka), Брно

В работе обобщаются некоторые геометрические построения аффинной нормали поверхности плоского аффинного пространства на случай, когда поверхность π погружена в трехмерное пространство $\mathfrak{A}_3$ с аффинной связностью. При помощи построения Демулена ([10] или [2], стр. 188) аффинной нормали, обобщенного на пространство $\mathfrak{A}_3$ с аффинной связностью, строится т. наз. главная нормаль поверхности π. Доказываются некоторые геометрические свойства главной нормали поверхности π в связи с квадриками Q_u и Q_v (построения квадрик Q_u и Q_v вполне аналогичны построению квадрики Ли в плоском аффинном пространстве с той разностью, что в пространстве со связностью квадрики Q_u и Q_v не совпадают) и со связкой т. наз. квадрик Дарбу. Полученные результаты сравниваются с работой [9], и доказывается, что главной нормалью поверхности π будет та нормаль из связки нормалей Измайлова, которая является независимой от способа погружения поверхности π в пространство $\mathfrak{A}_3$.