Igor Kluvánek

О некоторых обобщениях теоремы Риса-Какутани

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 1, 89–113

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100553

Чехословацкий математический журнал, т. 13 (88) 1963, Прага

О НЕКОТОРЫХ ОБОБЩЕНИЯХ ТЕОРЕМЫ РИСА-КАКУТАНИ

ИГОРЬ КЛУВАНЕК (Igor Kluvánek), Братислава

(Поступило в редакцию 22/XII 1960 г.)

В статье дается определение и исследуются некоторые свойства интеграла по векторной мере, определенной на δ-кольце. Далее развита теория представления векторного интеграла Даниэлля при помощи интеграла по векторной мере. Из этой теории вытекают условия, при которых можно линейное преобразование из пространства непрерывных функций в любое пространство Банаха представить в виде интеграла по векторной мере.

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ВЕКТОРНОЙ МЕРЕ

В настоящем отделе мы дадим определение интеграла скалярной функции по мере со значениями в пространстве Банаха, определенной на δ-кольце. Упомянутое определение будет естественным обобщением интеграла по неотрицательной действительной мере, определенной на σ-кольце и допускающей также значение ∞ (смотри, например, [1]), и в то же время обобщением интеграла по векторной мере, определенной на σ-алгебре (смотри [2] или [3]). Мы будем поступать аналогично тому, как в работе [1], и поэтому будем полностью приводить только те доказательства, которые нельзя непосредственно перенять из [1].

Пусть P — произвольное непустое множество. Пусть $\mathbf{R}$ — множественное δ-кольцо подмножеств множества P (т.е. кольцо, замкнутое по отношению к счетным пересечениям).

Пусть X — пространство Банаха. Векторной мерой на $\mathbf{R}$ со значениями в X является такая функция μ, определенная на $\mathbf{R}$, для которой справедливо следующее: Если $\{E_n\}$ — последовательность непересекающихся множеств из $\mathbf{R}$ и $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathbf{R}$, то $\mu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$. Последнее равенство означает, что

$$\lim_n \left\|\mu(E) - \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)\right\| = 0 .$$

Обозначим через X^* сопряженное пространство к пространству X, т.е. пространство ограниченных линейных функционалов на X. Если μ — векторная мера на δ-кольце $\boldsymbol{R}$ значения которой находятся в X, то для каждого $x^* \in X^*$ функция $x^*\mu$ определенная для всех $E \in \boldsymbol{R}$ равенством $x^*\mu(E) = x^*(\mu(E))$ является обобщенной мерой на $\boldsymbol{R}$, т.е. σ-аддитивной функцией принимающей числовые значения.

Тройку $(P, \boldsymbol{R}, \mu)$ мы называем пространством с векторной мерой, если $\boldsymbol{R}$ является δ-кольцом подмножеств множества P, причем для каждой точки $s \in P$ существует $E \in \boldsymbol{R}$ так, что $s \in E$, и если μ — векторная мера на $\boldsymbol{R}$.

Если задано пространство $(P, \boldsymbol{R}, \mu)$ с векторной мерой, то важное значение имеет σ-кольцо $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ (наименьшее σ-кольцо, содержащее $\boldsymbol{R}$). Множества, принадлежащие $\boldsymbol{S}$, будем ради краткости называть измеримыми. Обратим внимание на то, что не для каждого измеримого множества E должно иметь смысл $\mu(E)$.

Уместно привести несколько замечаний относительно указанных положений. Обратим внимание, в какой связи находится понятие пространства с векторной мерой с понятиями, введенными в [1]. Пусть $\boldsymbol{S}$ — σ-кольцо подмножеств множества P и пусть μ — неотрицательная в более широком смысле слова действительная мера на $\boldsymbol{S}$ (следовательно, она может принимать и значение ∞). Система $\boldsymbol{R}$ всех множеств $E \in \boldsymbol{S}$, для которых $\mu(E) < \infty$, является, очевидно, δ-кольцом. Пусть $\boldsymbol{S}_1 = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{R})$ — наименьшее σ-кольцо над $\boldsymbol{R}$. $\boldsymbol{S}_1$ — это σ-кольцо тех множеств, которые имеют σ-конечную меру. Очевидно, что для того, чтобы мы могли в пространстве с мерой $(P, \boldsymbol{S}, \mu)$ (в смысле [1]) говорить о сходимости почти всюду, о сходимости по мере, об интегрируемых функциях и об их интегралалах, достаточно знать значения меры μ на δ-кольце $\boldsymbol{R}$. Известно, далее, что каждая функция, интегрируемая в этом пространстве, является измеримой относительно σ-кольца $\boldsymbol{S}_1$. Следовательно, для таких целей, как определение интеграла и с ним связанных понятий и в случае неотрицательных мер достаточно было бы ограничиться таким положением вещей, как мы описали, определяя пространство с векторной мерой. В случае действительной неотрицательной меры мы не поступаем так потому, что мы хотим, чтобы мера μ была определена на системе всех измеримых множеств. Из-за этого мы в этом случае допускаем и значение ∞. Если же дело касалось бы мер, значения которых не должны быть неотрицательными, то такое воззрение было бы в некоторых случаях слишком узким.

Пусть $(P, \boldsymbol{R}, \mu)$ — пространство с векторной мерой. Определим на $\boldsymbol{S}$ функцию $\|\mu\|$ следующим образом:

$$\|\mu\|(E) = \sup \{\|\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \mu(E_i)\|\},$$

где супремум берется по всем конечным системам $E_1, E_2, \ldots, E_k$ взаимно непересекающихся множеств из $\boldsymbol{R}, \bigcup_{i=1}^{k} E_i \subset E$; для всех $|\alpha_i| \leqq 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$; $k = 1, 2, \ldots$. Функцию $\|\mu\|$ мы называем полуизменением векторной меры μ.

Заметим, что векторная мера μ определена на δ-кольце **R** в то время, как ее полуизменение $\|\mu\|$ может иметь более широкую область определения, а именно σ-кольцо **S**. Очевидно, что для $E \in \mathbf{S}$ будет $0 \leqq \|\mu\|(E) \leqq \infty$ (значение ∞ допустимо).

Если значениями меры μ служат действительные или комплексные числа, то ее полуизменение $\|\mu\|$ является мерой, и мы обозначаем его знаком $|\mu|$, потому что оно совпадает с изменением меры μ.

Для полуизменения $\|\mu\|$ векторной меры μ справедливы следующие утверждения:

1. Для произвольного $E \in \mathbf{S}$

$$\|\mu\|(E) = \sup \{|x^*\mu|(E) : x^* \in X^*, \ \|x^*\| \leqq 1\} .$$

2. Если $E \in \mathbf{R}$, то

$$0 \leqq \sup \{\|\mu(F)\| : F \subset E, \ F \in \mathbf{R}\} \leqq \|\mu\|(E) \leqq 4 \sup \{\|\mu(F)\| : F \subset E, \ F \in \mathbf{R}\} < \infty .$$

3. Если $E, E_1, E_2, \ldots \in \mathbf{S}$, $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, то

$$\|\mu\| (E) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \|\mu\| (E_n) .$$

4. Если μ и ν — две векторные меры на **R** со значениями в пространстве Банаха, то для каждого $E \in \mathbf{S}$

$$\|\mu + \nu\| (E) \leqq \|\mu\| (E) + \|\nu\| (E) .$$

Доказательство утверждений 1, 2 и 3 имеется в [3] (лемма IV, 10.4, стр. 320), утверждение 4 очевидно.

Теперь мы введем понятия, аналогичные понятиям сходимости по мере и почти равномерной сходимости. Будем предполагать, что задано фиксированное пространство с векторной мерой $(P, \mathbf{R}, \mu)$.

При определении этих понятий „величину множеств“ будем оценивать при помощи полуизменения векторной меры. В частности будем пользоваться традиционным термином почти всюду или точнее μ-почти всюду в следующем смысле: Пусть $A(s)$ — какое-нибудь предложение, которое может быть отнесено к любой точке пространства $(P, \mathbf{R}, \mu)$ и пусть E множество тех точек $s \in P$, для которых $A(s)$ не имеет места. Мы скажем, что $A(s)$ имеет место почти всюду, если $\|\mu\| (E) = 0$. В силу приведенных утверждений (особенно свойство 3) полуизменение является удобным для этих целей. Будут справедливы многие теоремы, аналогичные теоремам о сходимости по мере в обычном смысле.

Действительную функцию, определенную на P, называем измеримой, если для каждого борелевского множества M действительных чисел $\{s : f(s) \in M, f(s) \neq 0\} \in \mathbf{S}$. Это значит, что измеримость мы берем по отношению к σ-кольцу **S**.

О последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций мы говорим, что она сходится по векторной мере μ (коротко: сходится по μ) к функции f, если

$$\lim_n \|\mu\| (\{s : |f_n(s) - f(s)| \geqq \varepsilon\}) = 0$$

для каждого $\varepsilon > 0$.

Последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций мы называем последовательностью фундаментальной по векторной мере μ, если для каждого $\eta > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такое число n_0, что для $n > n_0$, $m > n_0$

$$\|\mu\| (\{s : |f_n(s) - f_m(s)| \geqq \varepsilon\}) < \eta .$$

Последовательность функций $\{f_n\}$ называется μ-почти равномерно сходящейся к функции f (μ-почти равномерно фундаментальной последовательностью), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое множество $F_\varepsilon \in \mathbf{S}$, что $\|\mu\| (F_\varepsilon) < \varepsilon$, и последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к f (является равномерно фундаментальной) на множестве $P - F_\varepsilon$.

Теорема 1.1. *Из μ-почти равномерной сходимости вытекает сходимость по μ.*

Теорема 1.2. *Если последовательность $\{f_n\}$ сходится по μ к функции f, то она является фундаментальной по μ.*

Теорема 1.3. *Если $\{f_n\}$ сходится по μ к функции f и одновременно и к функции g, то μ-почти всюду $f(s) = g(s)$.*

Теорема 1.4. *Из каждой последовательности $\{f_n\}$ измеримых функций, фундаментальной по μ, можно выбрать частичную последовательность, сходящуюся μ-почти равномерно.*

Теорема 1.5. *Если $\{f_n\}$ является последовательностью измеримых функций, фундаментальной по μ, то существует измеримая функция f, к которой последовательность $\{f_n\}$ сходится по μ.*

Доказательства перечисленных теорем можно произвести почти дословно так же, как доказательства теорем § 22 из [1].

Теорема 1.6. *Если последовательность $\{f_n\}$ измеримых функций сходится μ-почти всюду на множестве $E \in \mathbf{R}$, то она сходится на множестве E μ-почти равномерно, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует множество $F_\varepsilon \in \mathbf{R}$, $F_\varepsilon \subset E$, $\|\mu\| (F_\varepsilon) < \varepsilon$ так, что последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на $E - F_\varepsilon$.*

Доказательство. Рассмотрим пространство с векторной мерой $(E, \mathbf{R}', \mu')$, причем $\mathbf{R}'$ — система всех множеств $F \in \mathbf{R}$, для которых $F \subset E$, и $\mu'(F) = \mu(F)$ для каждого $F \in \mathbf{R}'$. Очевидно, что $\mathbf{R}'$ — σ-алгебра. Согласно [2], или же [3] (лемма IV, 10.5, стр. 321) существует неотрицательная конечная мера ν на $\mathbf{R}'$ так, что $\lim\limits_{\nu(F)\to 0} \|\mu\| (F) = 0$.

К числу $\varepsilon > 0$ подберем $\delta > 0$ так, чтобы было $\|\mu'\| (F) < \varepsilon$, как только $\nu(F) < \delta$. По классической теореме Егорова существует множество $G \in \mathbf{R}'$ так, что $\nu(G) < \delta$, и последовательность $\{f_n\}$ сходится на $E - G$ равномерно. Так как $\|\mu'\|(G) = \|\mu\|(G) < \varepsilon$, теорема доказана.

Простой интегрируемой функцией мы называем функцию вида

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i},$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — числа, и $E_1, \ldots, E_k$ — множества, принадлежащие $\mathbf{R}$ (χ_A означает характеристическую функцию множества A).

Интеграл $\int f \, \mathrm{d}\mu$ простой интегрируемой функции определим равенством

$$\int f \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mu(E_i).$$

Легко можно по аддитивности векторной меры убедиться в том, что интеграл простой интегрируемой функции не зависит от ее представления.

Пусть $E \in \mathbf{S}$. Пусть f — простая интегрируемая функция. Интеграл функции f на множестве E определим равенством

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int \chi_E f \, \mathrm{d}\mu.$$

Это определение имеет смысл, так как в случае $E \in \mathbf{S}$ функция $\chi_E f$ является простой интегрируемой функцией.

Если f — простая интегрируемая функция, то функция ν, определенная на $\mathbf{S}$ равенством

$$\nu(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu,$$

является векторной мерой на $\mathbf{S}$. Векторная мера ν называется неопределенным интегралом функции f.

Этот неопределенный интеграл ν является векторной мерой, определенной на всем σ-кольце $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{R})$. Существует такое множество $Q \in \mathbf{S}$, что $\nu(E - Q) = 0$ для каждого $E \in \mathbf{S}$. Очевидно, что в качестве множества Q можно всять множество

$$Q = \bigcup_{i=1}^{k} E_i, \quad \text{если} \quad f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}.$$

Отсюда вытекает, что $\|\nu\|(E) \leqq \|\nu\|(Q)$ для любого множества $E \in \mathbf{S}$. Следовательно, полуизменение векторной меры ν ограничено, и число $\|\nu\|(Q)$ является его максимумом.

Пусть теперь f и g — две произвольные простые интегрируемые функции. Функция $|f - g|$ является также простой интегрируемой. Максимум полуизменения неопределенного интеграла функции $|f - g|$ обозначим через $\varrho(f, g)$. Легко видеть, что ϱ является псевдометрикой в множестве всех простых интегрируемых функций. Очевидно, также $\varrho(f, g) = \varrho(f - g, 0)$; $\varrho(f, 0) = \varrho(|f|, 0)$.

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Теорема 1.7. *Пусть f и g — простые интегрируемые функции. Пусть $|f| \leqq g$. Пусть ν, соотв. λ — неопределенный интеграл функции f, соотв. g. Пусть ν_1 — неопределенный интеграл функции $|f|$. Тогда для каждого множества $E \in \mathbf{S}$*

$$\|\nu_1\|(E) = \|\nu\|(E) \leqq \|\lambda\|(E).$$

Доказательство. Пусть

$$f = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}, \quad g = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \chi_{E_i},$$

причем $E_1, \ldots, E_k$ — взаимно непересекающиеся множества из $\mathbf{R}$. Очевидно, что f и g можно записать в таком виде. Следовательно, $0 \leqq |\alpha_i| \leqq \beta_i$. Пусть $x^* \in X^*$ (X — пространство, из которого берем значения векторной меры μ). Пусть $E \in \mathbf{S}$. Очевидно,

$$|x^*\nu|(E) = \sum_{i=1}^{k} |x^*\nu|(E_i \cap E) = \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|\, |x^*\mu|(E_i \cap E) = |x^*\nu_1|(E),$$

$$|x^*\lambda|(E) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i |x^*\mu|(E_i \cap E).$$

Следовательно, $|x^*\nu_1|(E) = |x^*\nu|(E) \leqq |x^*\lambda|(E)$. Отсюда вытекает, что $\|\nu_1\|(E) = \|\nu\|(E) \leqq \|\lambda\|(E)$.

О последовательности $\{f_n\}$ простых интегрируемых функций скажем, что она является фундаментальной в среднем, если она является фундаментальной в смысле введенной псевдометрики ϱ, т.е. если к любому числу $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое n_0, что $\varrho(f_n, f_m) < \varepsilon$ для $n > n_0$, $m > n_0$.

Теорема 1.8. *Последовательность $\{f_n\}$ простых интегрируемых функций, фундаментальная в среднем, является фундаментальной и по векторной мере μ.*

Доказательство. Теорема 1.7 оправдывает нас поступать так же, как в случае неотрицательной действительной меры, т.е. воспользоваться „неравенством Чебышева“. Положим $E_{mn} = \{s : |f_n(s) - f_m(s)| \geqq \varepsilon\}$ для любых натуральных n и m и для $\varepsilon > 0$. Тогда, согласно теореме 1.7

$$\varrho(f_n, f_m) = \varrho(f_n - f_m, 0) \geqq \varrho(\varepsilon \chi_{E_{mn}}, 0) = \varepsilon \|\mu\|(E_{mn}).$$

Отсюда уже очевидным образом вытекает утверждение теоремы.

Теорема 1.9. *Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность простых интегрируемых функций, и пусть ν_n — неопределенный интеграл функции f_n для $n = 1, 2, \ldots$.*

Тогда существует предел $\nu(E) = \lim_n \nu_n(E)$ равномерно относительно $E \in \mathbf{S}$, и определенная таким образом функция ν является векторной мерой на $\mathbf{S}$.

Пусть J – какое-нибудь множество, и пусть для каждого $\iota \in J$ задана векторная мера v_ι на $\mathbf{S}$. Мы скажем, что векторные меры v_ι, $\iota \in J$, равномерно абсолютно непрерывны (относительно μ), если к любому числу $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что $\|v_\iota\|\,(E) < \varepsilon$ для каждого множества $E \in \mathbf{S}$, удовлетворяющего условию $\|\mu\|\,(E) < \delta$ и для каждого $\iota \in J$.

Теорема 1.10. *Пусть* $\{f_n\}$ *— последовательность простых интегрируемых функций, фундаментальная в среднем. Псуть* v_n *— неопределенный интеграл функции* f_n, $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда векторные меры* v_n, $n = 1, 2, \ldots$ *равномерно абсолютно непрерывны.*

Теорема 1.11. *Пусть* $\{f_n\}$ *и* $\{g_n\}$ *— последовательности простых интегрируемых функций, фундаментальные в среднем и сходящиеся по* μ *к одной и той же функции* f. *Пусть* v_n *и* λ_n *являются, соответственно, неопределенными интегралами функций* f_n *и* g_n *для* $n = 1, 2, \ldots$. *Тогда* $\lim\limits_n v_n(E) = \lim\limits_n \lambda_n(E)$ *для каждого* $E \in \mathbf{S}$.

Доказательства приведенных теорем можно произвести таким же образом, как доказательства аналогичных теорем в [1], надо только всюду вместо $\int_E |f|\,\mathrm{d}\mu$ писать $\|v\|\,(E)$, где v — неопределенный интеграл функции f. Ни в дальнейшем не будем приводить доказательства тех теорем, которые очевидны, или которые получим описанным способом из доказательств теорем в [1].

Функцию f, определенную на P, мы называем интегрируемой (точнее говоря: интегрируемой в пространстве $(P, \mathbf{R}, \mu)$), если существует последовательность $\{f_n\}$ простых интегрируемых функций, фундаментальная в среднем и сходящаяся по μ к f. Интеграл $\int f\,\mathrm{d}\mu$ функции f определяется равенством

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int f_n\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Из теоремы 1.9 вытекает, что предел в правой части существует, и из теоремы 1.11 вытекает, что он не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$, обладающей требуемыми свойствами.

Теорема 1.12. *Если* f, g *— интегрируемые функции и* α, β *— числа, то и* $\alpha f + \beta g$ *является интегрируемой функцией и*

$$\int (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f\,\mathrm{d}\mu + \beta \int g\,\mathrm{d}\mu\,.$$

Если f *— интегрируемая функция, то и функция* $|f|$ *интегрируема.*

Пусть E — множество, $E \subset P$. Псуть f — функция на P. Если функция $f\chi_E$ интегрируема, то мы скажем, что функция f интегрируема на множестве E, и вектор

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int f\chi_E\,\mathrm{d}\mu$$

назовем интегралом функции f на множестве E.

Если f — интегрируемая функция и E — измеримое множество (т.е. $E \in \mathbf{S}$), то функция f интегрируема на множестве E. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что для произвольной фундаментальной в среднем последовательности простых интегрируемых функций, сходящейся по μ к f, последовательность $\{f_n \chi_E\}$ является также фундаментальной в среднем и сходится по μ к $f\chi_E$.

Пусть f — интегрируемая функция. Для каждого $E \in \mathbf{S}$ положим $\nu(E) = \int f\chi_E \, d\mu$. Функцию множества ν мы называем неопределенным интегралом функции f. Из теоремы 1.9 вытекает, что неопределенный интеграл интегрируемой функции является векторной мерой на $\mathbf{S}$.

Распространим теперь определение псевдометрики ϱ на произвольные пары интегрируемых функций.

Пусть f — интегрируемая функция. Обозначим через ν неопределенный интеграл функции $|f|$. Положим

$$\varrho(f, 0) = \max \{ \|\nu\| (E) : E \in \mathbf{S} \} .$$

Этот максимум существует и является действительным числом. Для двух любых интегрируемых функций f, g положим

$$\varrho(f, g) = \varrho(f - g, 0) .$$

Так как это определение псевдометрики ϱ совпадает с определением, введенным нами для простых интегрируемых функций, нет опасности, что допустим ошибку вследствие того, что пользуемся тем же символом ϱ.

2. СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА

Теорема 2.1. *Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная в среднем (т.е. в смысле метрики ϱ) последовательность интегрируемых функций. Тогда существует такая интегрируемая функция f, что*

$$\lim_n \varrho(f_n, f) = 0 .$$

Если, далее, ν_n — неопределенный интеграл функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$ и ν — неопределенный интеграл функции f, то

$$\lim_n \nu_n(E) = \nu(E) \quad и \quad \lim_n \|\nu_n\| (E) = \|\nu\| (E)$$

равномерно для $E \in \mathbf{S}$.

Теорема 2.2. *Пусть f — интегрируемая функция и ν — ее неопределенный интеграл. Тогда ν абсолютно непрерывна по отношению к μ, т.е. к любому $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что $\|\nu\| (E) < \varepsilon$, если $\|\mu\| (E) < \delta$, $E \in \mathbf{S}$.*

Теорема 2.3. *Псуть v и λ являются соответственно неопределенными интегралами функций f и g. Пусть $|f| \leqq g$. Тогда $\|v\|(E) \leqq \|\lambda\|(E)$ для каждого множества $E \in \mathbf{S}$.*

Доказательство. Согласно 1.7 и 2.1 достаточно построить последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ простых интегрируемых функций, фундаментальные в среднем, таким образом, чтобы $\{f_n\}$ сходилась по μ к f и $\{g_n\}$ и g, и чтобы $|f_n| \leqq g_n$ для $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть $\{f_n'\}$, соотв. $\{g_n\}$ — фундаментальная в среднем последовательность простых интегрируемых функций, сходящаяся по μ к f, соотв. g. Мы можем предполагать, что $g_n \geqq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, так как $g \geqq 0$.

Определим функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$ следующим образом:

Если $|f_n'(s)| \leqq g_n(s)$, то положим $f_n(s) = f_n'(s)$, если $|f_n'(s)| > g_n(s)$, то положим $f_n(s) = g_n(s) f_n'(s)/|f_n'(s)|$. Очевидно, что $|f_n| \leqq g_n$ для $n = 1, 2, \ldots$. Далее,

$$|f_n(s) - f(s)| \leqq 2|f_n'(s) - f(s)| + |g_n(s) - g(s)|,$$

так что

$$\{s : |f_n(s) - f(s)| \geqq \varepsilon\} \subset \left\{s : |f_n'(s) - f(s) - f(s)| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\} \cup \left\{s : |g_n(s) - g(s)| \geqq \frac{\varepsilon}{3}\right\}$$

откуда вытекает, что последовательность $\{f_n\}$ сходится по μ к f.

Кроме этого,

$$|f_n(s) - f_m(s)| \leqq 2|f_n'(s) - f_m'(s)| + |g_n(s) - g_m(s)|,$$

откуда $\varrho(f_n, f_m) \leqq 2\varrho(f_n', f_m') + \varrho(g_n, g_m)$, так что последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной в среденем.

Следующая лемма („Неравенство Чебышева“) позволит нам установить важнейшее отношение между сходимостью в среднем и сходимостью по мере.

Лемма. *Пусть f — интегрируемая функция. Пусть $\varepsilon > 0$ и $E = \{s : |f(s)| \geqq \varepsilon\}$. Тогда $\varrho(f, 0) \geqq \varepsilon\|\mu\|(E)$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно исследовать случай $\varepsilon = 1$. Итак, $E = \{s : |f(s)| \geqq 1\}$. Мы покажем, что χ_E — интегрируемая функция. Пусть $\{f_n\}$ — последовательность простых интегрируемых функций, фундаментальная в среднем и сходящаяся по μ к функции f. Последовательность $\{f_n\chi_E\}$ также представляет собой последовательность простых интегрируемых функций, фундаментальную в среднем и сходящуюся по μ к функции $f\chi_E$. Образуем функции $g_n = \min\{f_n\chi_E, 1\}$, $n = 1, 2, \ldots$. Последовательность $\{g_n\}$ является последовательностью простых интегрируемых функций. Последовательность $\{g_n\}$ сходится по μ к функции χ_E, так как $\{s : |g_n(s) - \chi_E(s)| \geqq \delta\} \subset \{s : |f_n(s) - f(s)| \geqq \delta\}$ для каждого $\delta > 0$. Далее, $\{g_n\}$ является фундаментальной в среднем, потому что $|g_n - g_m| \leqq |f_n - f_m|$. Это значит, что χ_E — интегрируемая функция. Обозначим теперь через ν, соотв. λ неопределенный интеграл функции $|f|$, соотв. χ_E. По теореме 2.3

$$\varrho(f, 0) \geqq \|\nu\| (E) \geqq \|\lambda\| (E) .$$

Теперь уже достаточно доказать только то, что $\|\lambda\| (E) \geqq \|\mu\| (E)$. Но это неравенство непосредственно вытекает из определения полуизменения и из того обстоятельства, что $\lambda(F) = \mu(F)$ для $F \in \mathbf{R}$, $F \subset E$.

Теорема 2.4. *Если последовательность $\{f_n\}$ интегрируемых функций сходится в среднем к функции f, то она сходится к этой функции и по μ.*

Прежде чем мы выскажем следующую теорему, введем одно определение.

Псуть J — какое-то множество. Пусть для каждого $\iota \in J$ задана векторная мера ν_ι, определенная на множественном кольце $\mathbf{T}$. Мы скажем, что меры ν_ι, $\iota \in J$, равномерно σ-аддитивны, если для каждой невозрастающей последовательности $\{E_m\}$ множеств из $\mathbf{T}$, пересечение которых пусто, $\bigcap_{m=1}^{\infty} E_m = \emptyset$, будет $\lim_m \|\nu_\iota\| (E_m) = 0$ равномерно относительно $\iota \in J$.

Теорема 2.5. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность интегрируемых функций, которые или по μ или почти всюду сходятся к функции f. Пусть, далее, неопределенные интегралы функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$ равномерно абсолютно непрерывны по отношению к μ и равномерно σ-аддитивны. Тогда f является интегрируемой функцией, и последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в среднем.*

Доказательство. (По [1], теорема 3, § 26). Пусть ν_n — неопределенный интеграл функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$. Выберем $\delta > 0$. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует множество $Q_n \in \mathbf{S}$ так, что $\nu_n(E - Q_n) = 0$ для каждого $E \in \mathbf{S}$. Положим $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Следовательно, $Q \in \mathbf{S}$. Существует поэтому также неубывающая последовательность $\{E_i\}$ множеств из $\mathbf{R}$, что $Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Положим $F_i = Q - E_i$. Последовательность $\{F_i\}$ не возрастает, и $\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i = \emptyset$. По предположению существует такое натуральное число k, что $\|\nu_n\| (F_k) < \frac{1}{2}\delta$ для $n = 1$, $2, \ldots$ и, следовательно,

$$\|\nu_m - \nu_n\| (F_k) \leqq \|\nu_m\| (F_k) + \|\nu_n\| (F_k) < \delta .$$

На множестве E_k сходится последовательность $\{f_n\}$ к функции f по μ согласно предположению или вследствие сходимости почти всюду (смотри теорему 1.6 и 1.1).

Выберем произвольно $\varepsilon > 0$. Положим $G_{mn} = \{s : |f_m(s) - f_n(s)| \geqq \varepsilon\}$. Тогда

$$\|\nu_m - \nu_n\| (E_k) \leqq \|\nu_m - \nu_n\| (E_k - G_{mn}) + \|\nu_m - \nu_n\| (E_k \cap G_{mn}) \leqq$$
$$\leqq \varepsilon\|\mu\| (E_k - G_{mn}) + \|\nu_m - \nu_n\| (E_k \cap G_{mn}) \leqq \varepsilon\|\mu\| (E_k) + \|\nu_m - \nu_n\| (E_k \cap G_{mn}) .$$

Но вследствие сходимости по мере последовательности $\{f_n\}$ для $n \to \infty$, $m \to \infty$ будет $\|\mu\| (E_k \cap G_{mn}) \to 0$. Потому что v_n, $n = 1, 2, \ldots$, равномерно абсолютно непрерывны по отношению к μ, будет выражение $\|v_m - v_n\| (E_k \cap G_{mn})$ для достаточно больших m и n произвольно малым. Следовательно,

$$\lim_m (\sup_{n \geqq m} \|v_m - v_n\| (E_k)) \leqq \varepsilon \|\mu\| (E_k) .$$

Так как $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то

$$\lim_m (\sup_{n \geqq m} \|v_m - v_n\| (E_k)) = 0 .$$

Из неравенства

$$\varrho(f_m, f_n) = \|v_m - v_n\| (Q) \leqq \|v_m - v_n\| (E_k) + \|v_m - v_n\| (F_k)$$

вытекает, что $\lim_m (\sup_{n \geqq m} \varrho(f_m, f_n)) < \delta$.

Потому что $\delta > 0$ было выбрано произвольно, последнее соотношение означает ни что иное, как то обстоятельство, что последовательность $\{f_n\}$ является фундаментальной в среднем. Значит, существует интегрируемая функции g, к которой последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем. Но из сходимости в среднем вытекает сходимость по μ, и поэтому, если $\{f_n\}$ сходится к f по μ, будет почти всюду, согласно теореме 1.3, $f(s) = g(s)$. Если $\{f_n\}$ сходится к f почти всюду, учтем, что из $\{f_n\}$ можно выбрать частичную последовательность, сходящуюся почти равномерно к g (теорема 1.1), следовательно, и почти всюду. Отсюда мы опять получаем $f(s) = g(s)$ почти всюду.

Теперь уже легко докажем следующую „теорему Лебега" о пределе мажорированной последовательности.

Теорема 2.6. *Пусть $\{f_n\}$ — последовательность интегрируемых функций, сходящаяся по μ или почти всюду к функции f. Пусть g — интегрируемая функция, и пусть $|f_n| \leqq g$ для $n = 1, 2, \ldots$. Тогда последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в среднем.*

Доказательство. Обозначим через v_n неопределенный интеграл функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$ и через λ неопределенный интеграл функции g.

По теореме 2.3 $\|v_n\| (E) \leqq \|\lambda\| (E)$ для каждого $E \in \mathbf{S}$ и $n = 1, 2, \ldots$. Так как λ абсолютно непрерывна по отношению к μ, то векторные меры v_n, $n = 1, 2, \ldots$ равномерно абсолютно непрерывны по отношению к μ.

Пусть, далее, π — такая конечная неотрицательная мера на $\mathbf{S}$ что $\|\lambda\| (E) \to 0$ для $\pi(E) \to 0$ (смотри [2] или же [3], лемма IV.10.5, стр. 321). Пусть $\{E_m\}$ — невозрастающая последовательность множеств из $\mathbf{S}$, пересечение которых пусто. Так как $\lim_m \pi(E_m) = 0$, то и $\lim_m \|\lambda\| (E_m) = 0$ и, следовательно, $\lim_m \|v_n\| (E_m) = 0$ равномерно по отношению к $n = 1, 2, \ldots$. Это значит, что меры v_n, $n = 1, 2, \ldots$ равномерно σ-аддитивны. Утверждение теоремы теперь уже вытекает из теоремы 2.5.

Следующая теорема является в определенном смысле обобщением теоремы Беппо Леви о пределе монотонной последовательности. Ее доказательство сведется к теореме 2.5.

Теорема 2.7. *Пусть последовательность $\{f_n\}$ интегрируемых функций сходится по μ или почти всюду к функции f. Пусть ν_n — неопределенный интеграл функции f_n, $n = 1, 2, \ldots$, и пусть для каждого $E \in \mathbf{S}$ существует $\lim\limits_n \nu_n(E)$. Тогда f является интегрируемой функцией, и последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в среднем.*

Доказательство. Пусть $Q \in \mathbf{S}$ — такое множество, что $\nu_n(E - Q) = 0$ для $E \in \mathbf{S}$ и $n = 1, 2, \ldots$. Пусть $\mathbf{T}$ — система множеств $E \in \mathbf{S}$, $E \subset Q$. Следовательно, $\mathbf{T}$ является σ-алгеброй подмножеств множества Q. По лемме IV. 10. 5 в [3] на стр. 321 существует для каждого n конечная неотрицательная мера $\lambda_n \leqq \|\nu_n\|$ на $\mathbf{T}$ так, что $\lim\limits_{\lambda_n(E)\to 0} \|\nu_n\|(E) = 0$. Если меру λ определить соотношением

$$\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}[1 + \lambda_n(Q)]^{-1} \lambda_n(E)$$

(смотри [2], или же доказательство теоремы IV. 10. 6 на стр. 321 в [3]), то из теоремы Витали-Хана-Сакса ([3], стр. 158) вытекает, что $\lim\limits_{\lambda(E)\to 0} \nu_n(E) = 0$ равномерно относительно n. Отсюда уже ясно видно, что ν_n равномерно σ-аддитивны (смотри также теорему на стр. 321 в [3]). Далее можно легко убедиться, что $\lim\limits_{\|\mu\|(E)\to 0} \lambda(E) = 0$, так как $\lim\limits_{\|\mu\|(E)\to 0} \lambda_n(E) = 0$ для каждого n. Итак, ν_n равномерно абсолютно непрерывны по отношению к μ.

3. ВЕКТОРНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДАНИЭЛЛЯ

Пусть P — абстрактное множество. Пусть $\mathscr{E}$ — линейная решетка действительных функций, определенных на P. Это значит:

Если $f, g \in \mathscr{E}$, α, β — действительные числа, то $\alpha f + \beta g \in \mathscr{E}$; если $f \in \mathscr{E}$, то $|f| \in \mathscr{E}$.

Векторный интеграл Даниэлля (коротко векторный интеграл) на $\mathscr{E}$ есть функция (оператор) I, определенная на $\mathscr{E}$ и принимающая значения из пространства Банаха X, обладающая следующими свойствами:

I. *$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g)$ для произвольных $f, g \in \mathscr{E}$ и произвольных действительных чисел α, β.*

II. *Если $\{f_n\}$ — невозрастающая последовательность функций из $\mathscr{E}$, и если $\lim\limits_n f_n(s) = 0$, для каждого $s \in P$, то $\lim\limits_n I(f_n) = 0$.*

Очевидно, что векторный интеграл I обладает следующими двумя свойствами:

III. *Если* $\{f_n\}$ — *монотонная последовательность функций из* $\mathscr{E}, f \in \mathscr{E}$ *и* $f(s) = \lim_n f_n(s)$ *для каждого* $s \in P$, *то* $I(f) = \lim_n f_n(s)$.

IV. *Если* $f_n \in \mathscr{E}$, $f_n \geqq 0$, $n = 1, 2, \ldots, f \in \mathscr{E}$, *и если* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) = f(s)$ *для каждого* $s \in P$, *то* $I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$.

Очевидно и следующее утверждение:

Если I — функция, определенная на линейной решетка обладающая свойствами I и III или I и IV, то I есть векторный интеграл Даниэлля.

Если пространство X, из которого берутся значения векторного интеграла, представляет собой множество действительных или комплексных чисел, то мы называем этот векторный интеграл обобщенным интегралом Даниэлля или интегралом Даниэлля-Стильтьеса (коротко обобщенным интегралом). Если обобщенный интеграл принимает только действительные значения и для каждой неотрицательной функции принимает неотрицательное значение, то мы называем его интегралом Даниэлля, или стремясь подчеркнуть его свойства — неотрицательным интегралом.

Теорема 3.1. *Пусть* I — *векторный интеграл Даниэлля, определенный на линейной решетке функций* $\mathscr{E}$, *значения которого лежат в пространстве Банаха* X. *Пусть* U — *непрерывное линейное преобразование из пространства* X *в пространство Банаха* Y. *Пусть* UI — *функция, определенная на* $\mathscr{E}$ *равенством* $UI(f) = U(I(f))$ *для каждого* $f \in \mathscr{E}$. *Тогда* UI *является векторным интегралом Даниэлля со значениями в* Y.

Доказательство очевидно.

Из теоремы 3.1, помимо прочего, вытекает, что в случае, когда I представляет собой векторный интеграл со значениями в X, то x^*I является для каждого $x^* \in X^*$ обобщенным интегралом.

Пусть I — векторный интеграл, определенный на линейной решетке $\mathscr{E}$. Мы говорим, что векторный интеграл I является насыщенным по Лебегу (коротко: насыщенным), если для его области определения $\mathscr{E}$ справедливо утверждение:

V. *Если* $g \in \mathscr{E}$, $f_n \in \mathscr{E}$, $|f_n| \leqq g$ *для* $n = 1, 2, \ldots$ *и* $f(s) = \lim_n f_n(s)$ *для каждого* $s \in P$, *то* $f \in \mathscr{E}$.

Нетрудно показать, что это определение можно высказать и так: Векторный интеграл I является насыщенным по Лебегу, если линейная решетка $\mathscr{E}$, которая служит ему областью определения, является условно σ-полной. Это определение подсказывается тем, что для насыщенных интегралов справдливо, как мы докажем позже, утверждение аналогичное классической теореме Лебега (см. теорему 4.2).

Очевидно, что не всякий векторный интеграл является насыщенным по Лебегу. Но важной оказывается задача установить, можно ли данный интеграл расширить до насыщенного интеграла, т.е. установить, существует ли для данного векторного интеграла I, определенного на линейной решетке $\mathscr{E}$, насыщенный векторный интеграл J, определенный на линейной решетке $\mathscr{F}$, причем $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$ и $J(f) = I(f)$ для $f \in \mathscr{E}$.

Эту задачу мы будем решать в отделах 5 и 6. В отделе 5 найдем необходимое и достаточное условие и в отделе 6•дадим разного рода достаточные условия для возможности такого расширения. Для этого нам понадобится следующая

Теорема 3.2. *Пусть $\mathscr{E}$ — линейная решетка функций на множестве P, для которой выполняется условие V. Пусть I — такая функция, определенная на $\mathscr{E}$ со значениями из пространства Банаха X, что x^*I является обобщенным интегралом на $\mathscr{E}$ для каждого $x^* \in X^*$. Тогда I является векторным интегралом, насыщенным по Лебегу.*

Доказательство. Очевидно, что I обладает свойством I. Докажем, что I имеет и свойстов IV.

Пусть $f_n \in \mathscr{E}$, $f_n \geqq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и пуст $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathscr{E}$. Если $\{n_i\}$ — произвольная простая последовательность натуральных чисел, то сумма ряда $\sum_{i=1}^{\infty} f_{n_i}$ принадлежит $\mathscr{E}$, потому что все частичные суммы этого ряда ограничены функцией f и потому что по предположению справедливо V. Отсюда вытекает, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} I(f_{n_i})$ является слабо сходящимся. Так как $\{n_i\}$ — произвольная простая последовательность натуральных чисел, последнее обстоятельство означает, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$ является слабо совершенно сходящимся. Это по лемме Орлича-Петтиса (смотри [4], стр. 60) означает, что он является и сильно сходящимся. Отсюда уже ясно, что I имеет свойство IV и является, следовательно, векторным интегралом.

Свойство V очевидно по предположениям.

Введем еще несколько понятий, которые позволят нам сократить наши высказывания.

Пусть X — пространство Банаха. Пусть P — абстрактное множество, $\mathscr{E}$ — линейная решетка функций, определенных на P, и I — векторный интеграл Даниэлля, определенный на $\mathscr{E}$, со значениями в X. Тройку $(P, \mathscr{E}, I)$ назовем пространством с векторным интегралом. Если нам понадобится указать и пространство X, в котором лежат значения интеграла I, будем писать более подробно $(P, \mathscr{E}, I)_X$. Если интеграл I является насыщенным по Лебегу, то и пространство $(P, \mathscr{E}, I)$ будем называть насыщенным по Лебегу.

Теорема 4.1. *Пусть* $(P, \mathscr{E}, I)$ — *насыщенное по Лебегу пространство с векторным интегралом. Пусть для каждой функции* $f \in \mathscr{E}$ *также и функция* $\min\{f, 1\}$ *принадлежит* $\mathscr{E}$. *Тогда существует* δ-*кольцо* $\mathbf{R}$ *подмножеств множества* P *и векторная мера* μ *на* $\mathbf{R}$ *так, что каждая функция* $f \in \mathscr{E}$ *интегрируема в пространстве* $(P, \mathbf{R}, \mu)$ *и* $I(f) = \int f \, \mathrm{d}\mu$.

Доказательство. 1. Обозначим через $\mathbf{R}$ систему тех множеств $E \subset P$, для которых $\chi_E \in \mathscr{E}$. Легко можно доказать, что $\mathbf{R}$ представляет собой множественное кольцо. Пусть $\{E_n\}$ — невозрастающая последовательность множеств из $\mathbf{R}$. Последовательность $\{\chi_{E_n}\}$ является, следовательно, невозрастающей последовательностью функций из $\mathscr{E}$. Так как I — насыщеный по Лебегу и $\chi_{E_n} \leqq \chi_{E_1}$ для $n = 1, 2, \ldots$, то функция $\chi_E = \lim\limits_n \chi_{E_n}$ также принадлежит $\mathscr{E}$. Это значит, что множество $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ принадлежит $\mathbf{R}$. Отсюда вытекает, что $\mathbf{R}$ — множественное δ-кольцо.

2. Для каждого множества $E \in \mathbf{R}$ положим $\mu(E) = I(\chi_E)$. Мы покажем, что μ — векторная мера на $\mathbf{R}$. Пусть E, F — непересекающиеся множества из $\mathbf{R}$. Очевидно, $\chi_{E \cup F} = \chi_E + \chi_F$. Следовательно, $\mu(E \cup F) = I(\chi_{E \cup F}) = I(\chi_E) + I(\chi_F) = \mu(E) + \mu(F)$. Значит, μ есть аддитивная функция на $\mathbf{R}$. Пусть $\{E_n\}$ — невозрастающая последовательность множеств из $\mathbf{R}$ и пусть $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$. Это значит, что $\{\chi_{E_n}\}$ является невозрастающей последовательностью функций из $\mathscr{E}$ и что $\lim\limits_n \chi_{E_n}(s) = 0$ для каждого $s \in P$. Согласно свойству II из предыдущего отдела

$$\lim_n \mu(E_n) = \lim_n I(\chi_{E_n}) = 0 .$$

Отсюда уже вытекает, что μ — векторная мера.

3. Пусть $f \in E$, $f \geqq 0$. Пусть $a > 0$. Положим $A = \{s : f(s) > a\}$. Далее для $n = 1, 2, \ldots$ положим $f_n = \min\{n(f - \min\{f, a\}), 1\}$. Легко можно видеть, что $0 \leqq f_n \leqq f/a$ для $n = 1, 2, \ldots$ и что $\chi_A = \lim\limits_n f_n$. Это значит, что $A \in \mathbf{R}$. Далее очевидно, что для двух произвольных чисел a, b, $0 < a < b$, множество $\{s : a < f(s) \leqq b\}$ принадлежит $\mathbf{R}$.

4. Пусть $f \in \mathscr{E}$, $f \geqq 0$. Положим

$$E_n^i = \{s : 2^{i2^{-n}} < f(s) \leqq 2^{(i+1)2^{-n}}\} .$$

Согласно 3 — $E_n \in \mathbf{R}$ для каждого натурального n и целого i.

Отсюда вытекает, что функции $f_n = \sum\limits_{i=-2^{2n}}^{2^{2n}} 2^{i2^{-n}} \chi_{E_n^i}$ являются пострыми интегрируемыми функциями в пространстве $(P, \mathbf{R}, \mu)$ и что они, следовательно, принадлежат одновременно $\mathscr{E}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Для $n = 1, 2, \ldots$ имеем $0 \leqq f_n \leqq f$, и последовательность $\{f_n\}$ не убывает. Далее, $\lim_n f_n(s) = f(s)$ для каждого $s \in P$, так что согласно III $I(f) = \lim_n I(f_n)$.

Обозначим через $\mathbf{S}$ наименьшее σ-кольцо над $\mathbf{R}$. Мы знаем, что для каждого множества $E \in \mathbf{S}$ функция $f_n\chi_E$ является простой интегрируемой функцией в пространстве $(P, \mathbf{R}, \mu)$ и поэтому принадлежит $\mathscr{E}$. Последовательность $\{f_n\chi_E\}$ не убывает, и так как $0 \leqq f_n\chi_E \leqq f$ для $n = 1, 2, \ldots$, имеет предел, принадлежащий $\mathscr{E}$ (этим пределом служит функция $f\chi_E$, и то, что он принадлежит $\mathscr{E}$, вытекает из предположения насыщенности интеграла I). Но это значит, что последовательность $\{I(f_n\chi_E)\}$ сходится для каждого $E \in \mathbf{S}$. Но, очевидно,

$$I(f_n\chi_E) = \int_E f_n \,\mathrm{d}\mu \quad \text{и} \quad I(f_n) = \int f_n \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Это по теореме 2.7 значит, что последовательность $\{f_n\}$ сходится в среднем к функции f в пространстве $(P, \mathbf{R}, \mu)$, что функция f интегрируема и что $I(f) = \lim_n I(f_n) = \lim_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$ (смотри теорему 2.1).

5. Пусть $f \in E$. Тогда $f = f_1 - f_2$, где $f_1, f_2 \in E$ и $f_1 \geqq 0, f_2 \geqq 0$. Тогда согласно 4:

$$I(f) = I(f_1) - I(f_2) = \int f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int f_2 \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu\,.$$

Приведенная теорема была доказана для случая неотрицательных интегралов в работе [5] и для случая обобщенных интегралов в [6]. Заметим еще, что из доказательства теоремы вытекает следующее

Следствие. *Если при условиях, приведенных в теореме 4.1, еще и ненулевые постоянные функции принадлежат $\mathscr{E}$, то δ-кольцо, о котором идет в этой теореме речь, является σ-алгеброй.*

Теорема 4.2. *Пусть $(P, \mathscr{E}, I)_X$ — насыщенное по Лебегу пространство с векторным интегралом. Пусть $h \in \mathscr{E}$, $h \geqq 0$.*

1. *Если $|f_n| \leqq h$ для $n = 1, 2, \ldots$ и если $f(s) = \lim_n f_n(s)$ для каждого $s \in P$, то $f \in \mathscr{E}$ и $I(f) = \lim_n I(f_n)$.*

2. *Множество $\{I(f) : f \in E, |f| \leqq h\}$ слабо компактно.*

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{E}_h$ множество тех функций $f \in \mathscr{E}$, для которых существует число c_f так, что $|f| \leqq c_f h$. Очевидно, что $\mathscr{E}_h$ — линейная решетка. I является на множестве $\mathscr{E}_h$ насыщенным по Лебегу векторным интегралом. Положим $P_h = \{s : s \in P,\ h(s) \neq 0\}$. Каждой функции $f \in \mathscr{E}_h$ поставим в соответствие функцию f^h, опеределенную на P_h равенством $f^h(s) = f(s)/h(s)$. Положим

$$\|f^h\| = \sup_{s \in P_h} |f^h(s)|\,.$$

Множество всех функций f^h для $f \in \mathscr{E}_h$ с определенной таким образом нормой, образует пространство Банаха. Обозначим его символом $\mathscr{B}$.

Для каждого $f^h \in \mathscr{B}$ положим $J(f^h) = I(f)$. Для доказательства утверждения 1 достаточно, очевидно, проверить, что $(P_h, \mathscr{B}, J)$ выполняет предположения теоремы 4.1 (смотри также теорему 2.6). Очевидно, что J — линейный непрерывный оператор, определенный на $\mathscr{B}$, со значениями из X. Кроме того, J является насыщенным по Лебегу векторным интегралом на $\mathscr{B}$ ($\mathscr{B}$ теперь рассматриваем как линейную решетку функций). Функция h^h является постоянной функцией, равной 1 и принадлежащей $\mathscr{B}$.

Чтобы доказать, что множество $\{I(f) : f \in \mathscr{E}, |f| \leqq h\}$ является слабо компактным, достаточно доказать, что множество $\{J(f)^h : \|f^h\| \leqq 1\}$ слабо компактно, или же что изображение единичной сферы пространства $\mathscr{B}$ является при отображении J слабо компактным. Это значит, что достаточно доказать, что оператор J слабо компактен, т.е. что он отображает ограниеченные множества пространства $\mathscr{B}$ в слабо компактные множества пространства X. Но согласно теореме В. Гантмахер (смотри [4], стр. 54) достаточно для этого доказать, что оператор J^* является слабо компактным. (Оператор J^* определен на X^* так, что он элементу x^* ставит в соответствие тот элемент $y^* \in \mathscr{B}^*$, для которого $y^*(f^h) = x^*(J(f^h))$ при любом $f^h \in \mathscr{B}$.)

Пусть $(P_h, \boldsymbol{R}, \mu)$ – пространство с векторной мерой отвечающее пространству $(P_h, \mathscr{B}, J)$ с векторным интегралом в смысле теоремы 4.1.

Обозначим через ca $(\boldsymbol{R})$ множество всех обобщенных мер на $\boldsymbol{R}$. Для каждого $v \in$ ca $(\boldsymbol{R})$ положим $\|v\| = |v|(P_h)$. При таком определении нормы и при обычных определениях сложения и умножения на число ca $(\boldsymbol{R})$ является пространством Банаха. Обратим внимание на то, что можем писать ca $(\boldsymbol{R}) \subset \mathscr{B}^*$ в том смысле, что каждая обобщенная мера $v \in$ ca $(\boldsymbol{R})$ представляет элемент $y_v^* \in \mathscr{B}^*$, причем $y_v^*(f^h) = \int f^h \, \mathrm{d}v$ для каждого $f^h \in \mathscr{B}$ и $\|y_v^*\| = \|v\| = |v|(P_h)$.

Ввиду равенства $x^*(\int f^h \, \mathrm{d}\mu) = \int f^h \, \mathrm{d}x^*\mu$, которое нетрудно проверить (смотри также [3], теорема IV. 10. 6, стр. 321), оператор J^* ставит произвольному элементу $x^* \in X^*$ в соответствие элемент $y^* \in \mathscr{B}^*$, представленный обобщенной мерой $x^*\mu$. Согласно [2] множество $\{x^*\mu : \|x^*\| \leqq 1\}$ слабо компактно в пространстве ca $(\boldsymbol{R})$, следовательно, оно слабо компактно и в $\mathscr{B}^*$. Это значит, что оператор J^* слабо компактен, чем и доказано утверждение 2.

5. РАСШИРЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ИНТЕГРАЛА

Теперь мы будем заниматься вопросом расширения векторного интеграла до насыщенного по Лебегу. Этот вопрос разрешили для случая неотрицательного интеграла довольно многие авторы (смотри [7], [8], [5], [6]) таким образом, что они указали методы, как к данному неотрицательному интегралу построить его насыщенное по Лебегу расширение (притом строится даже больше, а именно интеграл, насыщенный в смысле теоремы Б. Леви). В работе [6] доказано, что каждый обобщенный интеграл Даниэлля, который принимает только действительные значения, является разностью двух неотрицательных интегралов, следовательно, его можно расширить до насыщенного по Лебегу интеграла. Но из этого вытекает, очевидно, следующее утверждение, которое нам понадобится при доказательстве теоремы 5.1:

Если I — обобщенный интеграл на линейной решетке $\mathscr{E}$, то существует линейная решетка $\mathscr{F}$ и обобщенный интеграл J на $\mathscr{F}$ так, что $\mathscr{E} \subset \mathscr{F}$, $J(f) = I(f)$ для каждого $f \in \mathscr{E}$ и J является насыщенным по Лебегу.

Если K_1, соотв. K_2 — функция, определенная на линейной решетке функций $\mathscr{D}(K_1)$, соотв. $\mathscr{D}(K_2)$, мы пишем $K_1 \prec K_2$ если $\mathscr{D}(K_1) \subset \mathscr{D}(K_2)$ и если $K_1(f) = K_2(f)$ для каждого $f \in \mathscr{D}(K_1)$.

Если K — какая-то функция, определенная на некоторой линейной решетке функций, то под знаком $\mathscr{D}(K)$ мы будем разуметь ее область определения.

Теорема 5.1. *Пусть $\mathscr{E}$ — линейная решетка функций, определенных на множестве P. Пусть I — функция, определенная на $\mathscr{E}$ со значениями в пространстве Банаха X, такая, что x^*I является для каждого $x^* \in X^*$ обобщенным интегралом. Пусть для каждой функции $h \in E$, $h \geqq 0$ множество $\{I(f) : f \in \mathscr{E}, |f| \leqq h\}$ является слабо компактным в X. Тогда I есть векторный интеграл. Далее, существует насыщенное по Лебегу пространство $(P, \mathscr{F}, J)$ с векторным интегралом, причем $I \prec J$.*

Доказательство. Для каждой функции $h \in \mathscr{E}$, $h \geqq 0$ обозначим $Z_h = \{I(f) : f \in \mathscr{E}, |f| \leqq h\}$.

По предположению x^*I является для каждого $x^* \in X^*$ обобщенным интегралом. Поэтому существует его насыщенное по Лебегу расширение $\overline{x^*I}$. Обозначим $\mathscr{D} = \bigcap_{x^* \in X^*} \mathscr{D}(\overline{x^*I})$. На линейной решетке $\mathscr{D}$ является каждый интеграл $\overline{x^*I}$ насыщенным по Лебегу.

Пусть Λ — система всех функций, области определения которых являются линейными решетками функций на P и значения которых лежат в X, причем для каждого $K \in \Lambda$ выполняется следующее:

1. $\mathscr{D}(K) \subset \mathscr{D}$. 2. $I \prec K$.

3. Для каждого $x^* \in X^*$ x^*K является обобщенным интегралом.

4. Для каждого $f \in \mathscr{D}(K)$ существует $h \in \mathscr{E}$ так, что $|f| \leqq h$.

5. Если $f \in \mathscr{D}(K)$, $h \in \mathscr{E}$ и $|f| \leqq h$, то $K(f) \in \bar{Z}_h$ (горизонтальная черточка означает слабое замыкание в X).

Система Λ является посредством соотношения $\prec$ частично упорядоченной; если Λ_1 — цепь в Λ (линейно упорядоченное множество), то существует ее верхняя грань в Λ. Служит ею функция K_0, определенная на линейной решетке $\mathscr{D}(K_0) = \bigcup_{K \in \Lambda_1} \mathscr{D}(K)$ значения которой получаются из соотношения $K \prec K_0$, справедливого для каждого $K \in \Lambda_1$. По лемме Цорна существует в Λ максимальный элемент. Обозначим его через J, и пусть $\mathscr{F}$ означает его область определения (т.е. $\mathscr{F} = \mathscr{D}(J)$).

О J мы докажем, что это насыщенный по Лебегу векторный интеграл. Согласно теореме 3.2 достаточно доказать, что если $g \in \mathscr{F}$, $f_n \in \mathscr{F}$, $|f_n| \leqq g$ для $n = 1, 2, \dots$ и $f = \lim\limits_n f_n$, то $f \in \mathscr{F}$. Но так как для каждого $g \in \mathscr{F}$ существует $h \in \mathscr{E}$ так, что $|g| \leqq h$, достаточно доказать утверждение:

(а) Если $h \in \mathscr{E}, f_n \in \mathscr{F}$, $|f_n| \leqq h$ для $n = 1, 2, \dots$ и $f = \lim\limits_n f_n$, то $f \in \mathscr{F}$.

Пусть $\mathscr{F}_1$ — множество всех функций f, обладающих свойствами: Существует последовательность $\{f_n\}$ и функция $h \in \mathscr{E}$ так, что $f_n \in \mathscr{F}$, $|f_n| \leqq h$, $n = 1, 2, \dots$ и $f = \lim\limits_n f_n$.

Очевидно, что $\mathscr{F}_1$ — линейная решетка и $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_1$. Далее, предел $\lim\limits_n x^*(J(f_n))$ существует для каждого $x^* \in X^*$. Но $J(f_n) \in \bar{Z}_h$ для $n = 1, 2, \dots$. Множество $\bar{Z}_h$ является слабым замыканием слабо компкатного множества, значит, оно является само слабо компактным (смотри [4], стр. 52). Поэтому существует элемент $J_1(f) \in \bar{Z}_h$ так, что $x^*(J_1(f)) = \lim\limits_n x^*(J(f_n))$ для каждого $x^* \in X^*$. Элемент $J_1(f)$ однозначно определен функцией f, потому что x^*J является обобщенным интегралом для каждого $x^* \in X^*$, и если $\overline{x^*J}$ — его насыщенное по Лебегу расширение, то $\overline{x^*J}(f) = x^*(J_1(f))$. Очевидно, также $J \prec J_1$, или же $I \prec J_1$. Из построения функции J_1 тоже вытекает, что она обладает свойством 5. Это значит, что $J_1 \in \Lambda$. Так как J — максимальный элемент в Λ и $J \prec J_1$, должно быть $J = J_1$. Но это значит, что утверждение (а) доказано.

Из доказанной теоремы и из теоремы 4.2 вытекает следующая теорема.

Теорема 5.2. *Пусть $(P, \mathscr{E}, I)_X$ — пространство с векторным интегралом. Насыщенное по Лебегу расширение интеграла I существует тогда и только тогда, когда для каждой функции $h \in \mathscr{E}$, $h \geqq 0$ множество $\{I(f) : f \in \mathscr{E},\ |f| \leqq h\}$ (относительно) слабо компактно в пространстве X.*

Из доказанных теорем получим в качестве следствия теорему о представлении линейных непрерывных преобразований из пространства непрерывных функций в данное пространство Банаха. В следующей теореме мы будем предполагать, что P — произвольное топологическое пространство. Далее, символ $C(P)$ будет означать множество всех непрерывных функций на P с компактным носителем (т.е. каждая из функций $f \in C(P)$ равна нулю за исключением точек какого-то компактного множества). Топологию в $C(P)$ введем при помощи нормы

$$\|f\| = \sup_{s \in P} |f(s)| .$$

Теорема 5.3. *Пусть I — линейное непрерывное преобразование из пространства $C(P)$ в пространство Банаха X. Существует δ-кольцо $\mathbf{R}$ подмножеств множества P и векторная мера μ на $\mathbf{R}$ так, что каждая функция $f \in C(P)$ интегрируема в $(P, \mathbf{R}, \mu)$ и $I(f) = \int f \, d\mu$ тогда и только тогда, когда множество $\{I(f) : : |f| \leqq g, f \in C(P)\}$ слабо компактно в X для каждого $g \in C(P)$.*

Доказательство. Из известной теоремы Дини вытекает, что если последовательность $\{f_n\}$ функций из $C(P)$ не возрастает и $\lim_n f_n(s) = 0$ для каждого $s \in P$, то $\lim_n f(s) = 0$ равномерно. Отсюда и из непрерывности преобразования I вытекает, что I является векторным интегралом на $C(P)$, и, следовательно, можно применить теоремы 4.1 и 5.2.

6. РАСШИРЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ИНТЕГРАЛА (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

В настоящем отделе мы приведем некоторые достаточные условия для того, чтобы можно было данный векторный интеграл расширить до насыщенного по Лебегу интеграла.

Теорема 6.1. *Пусть $\mathscr{E}$ — линейная решетка функций, определенных на множестве P. Пусть I — такая функция со значениями в слабо полном пространстве Банаха X, что x^*I является для каждого $x^* \in X^*$ обобщенным интегралом. Тогда I является векторным интегралом и существует такое пространство $(P, \mathscr{F}, J)$ с векторным интегралом насыщенное по Лебегу, что $I \prec J$.*

Доказательство ведется аналогично, как доказательство теоремы 5.1, поэтому обозначения, которые мы не введем в процессе самого доказательства, имеют то же значение, как в доказательстве теоремы 5.1.

Пусть Γ — система всех функций, области определения которых представляют собой линейные решетки функций на P и значения которых расположены в X, причем для каждого $K \in \Gamma$ имеем:

1. $\mathscr{D}(K) \subset \mathscr{D}$, $I \prec K$.
2. $x^*(K(f)) = \overline{x^*I}(f)$ для каждого $x^* \in X^*$ и $f \in \mathscr{D}(K)$.

Система Γ частично упорядочена соотношением $\prec$. Легко можно видеть, что она выполняет условия леммы Цорна, поэтому в ней имеется максимальный элемент, который мы обозначим через J. Пусть областью определения элемента J является $\mathscr{F}$.

Об элементе J мы докажем, что это насыщенный по Лебегу векторный интеграл. По теореме 3.2 достаточно доказать следующее утверждение: Если $g \in \mathscr{F}$, $f_n \in \mathscr{F}$, $|f_n| \leqq g$ для $n = 1, 2, \ldots$ и $f = \lim_n f_n$, то $f \in \mathscr{F}$.

Пусть $\mathscr{F}_1$ — множество всех функций f, обладающих свойством: Существует последовательность $\{f_n\}$ функций из $\mathscr{F}$ и функция $g \in \mathscr{F}$ так, что $|f_n| \leqq g$ для $n = 1, 2, \ldots$ и $f = \lim_n f_n$.

Очевидно, что $\mathscr{F}_1$ — линейная решетка и $\mathscr{F} \subset \mathscr{F}_1$. Для каждой такой функции f и последовательности $\{f_n\}$ с описанными свойствами существует предел $\lim_n x^*(J(f_n))$ для каждого $x^* \in X^*$, а именно потому, что $x^*(J(f_n)) = \overline{x^*I}(f_n)$ для каждого $x^* \in X^*$ и $\overline{x^*I}$ являются насыщенными по Лебегу обобщенными интегралами. Из предположения слабой полноты пространства X вытекает существование элемента $J_1(f) \in X$, для которого $x^*(J_1(f)) = \lim_n x^*(J(f_n))$ при любом $x^* \in X^*$. Легко можно обнаружить, что элемент $J_1(f)$ однозначно определен функцией f и что функция J_1 принадлежит Γ. Далее, очевидно, что $J \prec J_1$, и так как J был максимальным элементом множества Γ, должно быть $J = J_1$. Этим доказано, что J является насыщенным по Лебегу векторным интегралом.

Утверждение, что I является векторным интегралом сразу же вытекает из соотношения $I \prec J$.

Теорема 6.2. *Пусть $\mathscr{E}$ — линейная решетка функций, определенных на множестве P. Пусть I — линейная функцид на $\mathscr{E}$ со значениями в пространстве Банаха X. Пусть K — неотрицательный интеграл на E. Пусть к любому числу $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ так, что $\|I(f)\| < \varepsilon$ для каждой функции $f \in \mathscr{E}$, для которой $K(|f|) < \delta$. Тогда I является векторным интегралом, и существует пространство $(P, \mathscr{F}, J)_X$ с векторным насыщенным по Лебегу интегралом так, что $I \prec J$.*

Доказательство. Существует линейная решетка функций $\mathscr{F}, \mathscr{E} \prec \mathscr{F}$, и неотрицательный интеграл K_1 на $\mathscr{F}$ так, что K_1 является насыщенным по Лебегу, $K_1(f) = K(f)$ для $f \in \mathscr{E}$, и для каждой функции $f \in \mathscr{F}$ и $\delta > 0$ существует $g \in \mathscr{E}$ так, что $K_1(|f - g|) < \delta$. Это утверждение известно (смотри, например, [5]). Далее, если $f_n \in \mathscr{F}$, $g \in \mathscr{F}$, $|f_n| \leqq g$ для $n = 1, 2, \ldots$ и $f = \lim_n f_n$, то будет $\lim_n K_1(|f - f_n|) = 0$.

Две функции $f_1, f_2 \in \mathscr{F}$ мы назовем эквивалентными, если $K_1(|f_1 - f_2|) = 0$. Множество всех функций, эквивалентных функции f, обозначим через $[f]$. Если положить $\varrho([f], [g]) = K_1(|f - g|)$, то функция ϱ будет метрикой в множестве $[\mathscr{F}]$ всех классов $[f]$ для $f \in \mathscr{F}$. Обозначим через $[\mathscr{E}]$ множество всех классов, в которых лежит по крайней мере одна функция из $\mathscr{E}$. Согласно цитированному утверждению множество $[\mathscr{E}]$ плотно в $[\mathscr{F}]$ при метрике ϱ.

Определим функцию φ на $[\mathscr{E}]$ равенством $\varphi([\mathscr{F}]) = I(f)$ для каждого $f \in \mathscr{E}$. Из предположений вытекает, что φ является функцией на $[\mathscr{E}]$ и что она равномерно непрерывна на $[\mathscr{E}]$. Следовательно, существует только одна равномерно непрерывная функция $\bar{\varphi}$ на $[\mathscr{F}]$ такая, что $\bar{\varphi}([f]) = \varphi([f])$ для $[f] \in [\mathscr{E}]$.

Для каждого $f \in \mathscr{F}$ положим $J(f) = \bar{\varphi}([f])$. Очевидно, $J(f) = I(f)$ если $f \in \mathscr{E}$. Так как функция φ линейна на $[\mathscr{E}]$, то функция $\bar{\varphi}$ линейна на $[\mathscr{F}]$ и, следовательно, J является линейной функцией на $\mathscr{F}$. Если $f_n \in \mathscr{F}$, $g \in \mathscr{F}$, $|f_n| \leqq g$ для $n = 1, 2, \ldots$ и $f = \lim_n f_n$, то $f \in \mathscr{F}$, $\lim_n \varrho([f_n], [f]) = 0$ и, следовательно, $\lim_n \bar{\varphi}([f_n]) = \bar{\varphi}([f])$ или же $\lim_n J(f_n) = J(f)$. Отсюда непосредственно вытекает, что J является насыщенным по Лебегу векторным интегралом.

Теорема 6.3. *Пусть* $(P, \mathscr{E}, I)$ — *пространство с векторным интегралом. Пусть для каждого* $f \in \mathscr{E}$, $f \geqq 0$, *множество*

$$\{ \sum_{n=1}^{\infty} \|I(f_n)\| : \sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f, \ f_n \geqq 0, \ f_n \in E, \ n = 1, 2, \ldots\}$$

ограничено. Тогда существует насыщенное по Лебегу расширение интеграла I.

Доказательство. Для каждой функции $f \in \mathscr{E}$ положим

$$|I|(f) = \sup \{ \sum_{n=1}^{\infty} \|I(f_n)\| : \sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f, \ f_n \geqq 0, \ f_n \in E, \ n = 1, 2, \ldots\} .$$

По предположению $|I|(f)$ — действительное неотрицательное число для каждой функции $f \in \mathscr{E}$, $f \geqq 0$.

Сначала докажем утверждение

(1) Если $f \in \mathscr{E}, f \geqq 0, f_n \in \mathscr{E}, f_n \geqq 0, n = 1, 2, \ldots$ и $f \leqq \sum_{i=1}^{\infty} f_n$, то $|I|(f) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} |I|(f_n)$.

Выберем $\varepsilon > 0$. Тогда существую такие неотрицательные функции $g_1, g_2, \ldots, \ldots, g_l \in \mathscr{E}$, что

$$\sum_{i=1}^{l} g_i \leqq f \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{l} \|I(g_i)\| > |I|(f) - \varepsilon .$$

Построим функции

$$h_i^n = \min \left\{ g_i - \sum_{j=1}^{n-1} h_i^j, \ f_n - \sum_{k=1}^{i-1} h_k^n \right\}$$

для $i = 1, 2, \ldots, l$; $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно,

$$h_i^n \in \mathscr{E} , \quad h_i^n \geqq 0 .$$

Из этого, что $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \geqq \sum_{i=1}^{l} g_i$, вытекает, что $\sum_{n=1}^{\infty} h_i^n = g_i$. Далее, $\sum_{i=1}^{l} h_i^n \leqq f_n$, следовательно,

$$|I|(f) - \varepsilon \leqq \sum_{i=1}^{l} \|I(g_i)\| \leqq \sum_{i=1}^{l} \sum_{n=1}^{\infty} \|I[h_i^n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{l} \|I(h_i^n)\| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |I|(f_n) \cdot$$

Этим доказано утверждение (1).

Далее очевидно, что если $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f$, $f \in \mathscr{E}$, $f_n \in \mathscr{E}$, $f_n \geqq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ то $\sum_{n=1}^{\infty} |I|(f_n) \leqq |I|(f)$.

Отсюда вытекает утверждение:

(2) Если $f_n \in \mathscr{E}, f_n \geqq 0, n = 1, 2, \ldots$ и $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathscr{E}$, то $|I|(f) = \sum_{n=1}^{\infty} |I|(f_n)$. В частности, $|I|(f + g) = |I|(f) + |I|(g)$ для $f, g \in \mathscr{E}$, $f \geqq 0$, $g \geqq 0$. Отсюда по индук-

ции получаем, что для $f \in \mathscr{E}$, $f \geqq 0$ и натуральное n будет $|I|(nf) = n|I|(f)$. Из этого легко вывести, что для любого рационального числа $r > 0$ будет $|I|(rf) = r|I|(f)$. Пусть $c \geqq 0$ — произвольное действительное число. Существуют рациональные числа $r_n \geqq 0$, $n = 1, 2, \ldots$ так, что $c = \sum_{n=1}^{\infty} r_n$. Тогда для любой функции $f \in \mathscr{E}$, $f \geqq 0$

$$|I|(cf) = \sum_{n=1}^{\infty} |I|(r_n f) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n |I|(f) = c|I|(f).$$

Для каждой функции $f \in \mathscr{E}$ теперь положим $|I|(f) = |I|(f^+) - |I|(f^-)$, где $f^+ = \max\{f, 0\}$ и $f^- = -\min\{f, 0\}$. Из доказанных утверждений теперь уже легко вытекает, что $|I|$ есть неотрицательный интеграл на $\mathscr{E}$. Интеграл $|I|$ мы называем изменением векторного интеграла.

Так как $\|I(f)\| \leqq |I|(|f|)$ для каждого $f \in \mathscr{E}$, то утверждение доказываемой теоремы сразу же вытекает из теоремы 6.2.

Из теорем 6.1, 6.2 и 6.3 вытекает следующая теорема:

Теорема 6.4. *Пусть символы P, $C(P)$ и I имеют то же значение, как в теореме 5.3. Каждое из ниже следующих утверждений* (1), (2), (3) *является достаточным условием для того, чтобы преобразование I можно было представить при помощи интеграла по векторной мере.*

(1) *Значения преобразования I лежат в слабо полном пространстве Банаха.*

(2) *Существует такой линейный функционал K на $C(P)$, что $K(f) \geqq 0$, если $f \geqq 0$ и $\lim\limits_{K(|f|) \to 0} I(f) = 0$.*

(3) *Изменение преобразования I ограничено, т.е.*

$$\sup\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \|I(f_n)\| : \sum_{n=1}^{\infty} f_n \leqq f,\ f_n \in C(P),\ f_n \geqq 0,\ n = 1, 2, \ldots\right\} < \infty$$

для каждой функции $f \in C(P)$.

Литература

[1] *P. R. Halmos*: Measure Theory. New York 1950 (русский перевод *П. Р. Халмош,* Теория меры, Москва 1955).

[2] *R. G. Bartle, N. Dunford, J. Schwartz*: Weak compactness and vector measures. Canadian J. Math. *7* (1955), 289—305.

[3] *N. Dunford, J. Schwartz*: Linear Operators. Part I. New York 1958.

[4] *M. M. Day*: Normed Linear Spaces. Ergebnisse der Mathematik, Berlin 1958.

[5] *M. H. Stone*: Notes on integration, I. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. *34* (1948), 336—342; Notes on integration, II. Ibid. *34* (1948), 447—455.

[6] *Ян Маржик* (J. Mařík): Представление функционала в виде интеграла. Чехосл. мат. журнал *5* (*80*) (1955), 467—487.

[7] *P. J. Daniell*: A general form of integral. Ann. of Math. (2) *19* (1917—1918), 279—294.

[8] *F. Riesz, B. Sz.-Nagy*: Leçons d'analyse fonctionelle. Budapest 1952.

Summary

SOME GENERALIZATIONS OF THE RIESZ-KAKUTANI THEOREM

IGOR KLUVÁNEK, Bratislava

Let P be an abstract set and let $\mathbf{R}$ be a δ-ring of subsets of P (*i.e.* a ring closed with respect to countable intersections). A vector measure is a σ-additive set function μ defined on $\mathbf{R}$ with values in a Banach space X. The introductory part of this paper is concerned with the definition and exposition of the basic properties of the integral $\int f \, d\mu$, where f is a scalar-valued function on P and μ is a vector measure. This theory of integration is simultaneously a natural generalization of the theory of integration with respect to a vector measure defined on a σ-algebra (see [2], [3]) and the theory of integration with respect to an extended real-valued non-negative measure defined on a σ-ring (see *e.g.* [1]). In such a theory many theorems analogous to the classical theory hold, especially the Vitali convergence theorem, the Lebesgue dominated convergence theorem and a certain analogue of the Beppo Levi monotone convergence theorem.

The main part of the paper is devoted to the theory of the *vector Daniell integral*:

Let $\mathscr{E}$ be a linear lattice of real-valued functions defined on P. The vector Daniell integral on $\mathscr{E}$ with values in X is a linear transformation I of $\mathscr{E}$ to X satisfying the following condition:

$$f_n \in \mathscr{E}\,, \quad f_n \searrow 0 \Rightarrow I(f_n) \to 0\,.$$

The vector Daniell integral I is called *complete* (more precisely Lebesgue complete) if the following holds for its domain $\mathscr{E}$:

$$f_n \in \mathscr{E}\,, \quad |f_n| \leqq g \in \mathscr{E}\,, \quad f_n \to f \Rightarrow f \in \mathscr{E}\,.$$

For a complete vector Daniell integral an assertion analogous to the Lebesgue convergence theorem is valid.

If I is a complete vector Daniell integral on $\mathscr{E}$ and if the Stone condition, $f \in \mathscr{E} \Rightarrow \Rightarrow \min\{f, 1\} \in \mathscr{E}$ holds in $\mathscr{E}$, then there exists a δ-ring $\mathbf{R}$ and a vector measure μ on $\mathbf{R}$ such that every $f \in \mathscr{E}$ is μ-integrable and $I(f) = \int f \, d\mu$. If the non-zero constant functions belong to $\mathscr{E}$, this δ-ring $\mathbf{R}$ is a σ-algebra.

A vector Daniell integral I in $\mathscr{E}$ has a complete extension (*i.e.* there exists a linear vector lattice $\mathscr{F} \supset \mathscr{E}$ and a complete vector Daniell integral J on $\mathscr{F}$, such that $J(f) = I(f)$ for $f \in \mathscr{E}$) if and only if for every $g \in \mathscr{E}$ the set $\{I(f): |f| \leqq |g|, f \in \mathscr{E}\}$ is relatively weakly compact in X.

From these theorems there follows as a corollary the following *generalization of the* well-known *Riesz-Kakutani theorem*:

Let $C(S)$ be the space of continuous functions with compact supports defined on a topological space S and let I be a linear transformation from $C(S)$ to a Banach space X, continuous in the uniform-norm topology of $C(S)$. Then I is representable as the integral with respect to some vector measure μ if and only if for every $g \in C(S)$ the set $\{I(f): |f| \leqq |g|, f \in C(S)\}$ is weakly compact in X.

This theorem is a generalization of a similar result in [2], where the space S is supposed to be compact Hausdorff.

Sufficient conditions are proved for a vector Daniell integral to have a complete extension, and for a continuous linear transformation from $C(S)$ to a Banach space to be representable as an integral.