Czechoslovak Mathematical Journal

Ladislav Procházka

Bemerkung über den p-Rang torsionsfreier abelscher Gruppen unendlichen Ranges

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 1, 1–23

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100549

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *13* (*88*) ПРАГА 12. III. 1963 г., No 1

BEMERKUNG ÜBER DEN p-RANG TORSIONSFREIER ABELSCHER GRUPPEN UNENDLICHEN RANGES

LADISLAV PROCHÁZKA, Praha

(Eingegangen am 7. Mai 1960)

Diese Bemerkung knüpft an die Arbeit [3] des Verfassers an, in welcher, ausser anderem, eine gruppentheoretische Charakterisation des p-Ranges torsionsfreier abelscher Gruppen endlichen Ranges dargestellt wurde. In vorliegender Abhandlung wird die in der Definition des p-Ranges auftretende Derry'sche Konstruktion auf beliebige torsionsfreie abelsche Gruppen übergetragen, weiter werden für den p-Rang einige einfache Relationen abgeleitet und schliesslich wird wieder eine rein gruppentheoretische Charakterisation des p-Ranges abzählbarer torsionsfreier Gruppen gegeben, welche der in [3] angegebenen Charakterisation analog ist.

Zuerst vereinbaren wir, dass mit dem Wort „Gruppe" immer eine additiv geschriebene abelsche Gruppe gemeint wird; das Nullelement jeder solchen Gruppe bezeichnen wir mit dem Symbol $\mathit{0}$. Für die direkte Summe von Gruppen wollen wir die Symbole $\sum_d$ und $\dotplus$ verwenden. Mit dem Buchstabe p wird überall eine fest gewählte Primzahl bezeichnet.

Es sei P eine periodische Gruppe und $U^{(p)}$ sei die maximale vollständige Untergruppe des p-primären Summanden $P^{(p)}$ der Gruppe P. Mit dem Symbol $r_p^*(P)$ bezeichnen wir den D-rang der Gruppe $U^{(p)}$, d. h. diejenige Kardinalzahl, die die „Anzahl" aller in einer direkten Zerlegung der Gruppe $U^{(p)}$ auftretenden direkten Summanden vom Type $\mathscr{C}(p^\infty)$ bestimmt.

Nun beweisen wir das folgende einfache Lemma, welches über das eben eingeführte Symbol $r_p^*(P)$ handelt.

Lemma 1. *Es sei P eine periodische p-primäre Gruppe und Q irgendeine ihre Untergruppe, die als direkte Summe zyklischer Gruppen darstellbar ist. Dann gilt die Ungleichung*

$$r_p^*(P) \leqq r_p^*(P/Q)\,.$$

Beweis. Wir stellen die Gruppe P in der Form der direkten Summe $P = U \dotplus R$ dar, wobei U die maximale vollständige Untergruppe der Gruppe P ist und deshalb gilt die Relation

$$r_p^*(P) = r_p^*(U)\,. \tag{1}$$

Die Gruppe $\tilde{U} = \{U, Q\}/Q$ ist natürlich eine vollständige Untergruppe der Gruppe $\tilde{P} = P/Q$, und daraus ergibt sich

$$r_p^*(\tilde{U}) \leqq r_p^*(\tilde{P}) . \tag{2}$$

Nach dem ersten Isomorphiesatz gilt jedoch

$$\{U, Q\}/Q = \tilde{U} \cong U/(U \cap Q) . \tag{3}$$

Die Gruppe $U \cap Q$ als Untergruppe einer direkten Summe zyklischer Gruppen muss selbst als eine direkte Summe zyklischer Gruppen darstellbar sein; also

$$U \cap Q = \sum_{\lambda \in \Lambda d} \mathscr{C}_\lambda ,$$

wo $\mathscr{C}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ zyklische p-primäre Gruppen sind. Zu jeder zyklischen Gruppe $\mathscr{C}_\lambda$ wählen wir eine solche Untergruppe $\mathscr{Z}_\lambda$ der Gruppe U, dass die Relationen $\mathscr{C}_\lambda \subsetneqq \mathscr{Z}_\lambda$ und $\mathscr{Z}_\lambda \cong \mathscr{C}(p^\infty)$ $(\lambda \in \Lambda)$ erfüllt sind. Dann muss notwendigerweise

$$\{\mathscr{Z}_\lambda(\lambda \in \Lambda)\} = \sum_{\lambda \in \Lambda d} \mathscr{Z}_\lambda$$

sein, und wir haben zugleich

$$\sum_{\lambda \in \Lambda d} \mathscr{C}_\lambda \subsetneqq \sum_{\lambda \in \Lambda d} \mathscr{Z}_\lambda \subseteqq U .$$

Die Untergruppe $\sum_{\lambda \in \Lambda d} \mathscr{Z}_\lambda$, als eine vollständige Gruppe, bildet einen direkten Summand von U, und deshalb besteht für eine geeignete Untergruppe U_1 die direkte Zerlegung

$$U = \sum_{\lambda \in \Lambda d} \mathscr{Z}_\lambda \dotplus U_1 .$$

Aus der Konstruktion der Gruppen $\mathscr{Z}_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ folgt unmittelbar der Isomorphismus

$$U/(U \cap Q) \cong \sum_{\lambda \in \Lambda d} \mathscr{Z}_\lambda/\mathscr{C}_\lambda \dotplus U_1 \cong \sum_{\lambda \in \Lambda d} \mathscr{Z}_\lambda \dotplus U_1 = U$$

und daher nach (3) auch der Isomorphismus $\tilde{U} \cong U$. Die letzte Relation, die Ungleichung (2) und die Formel (1) führen gleichzeitig zu der Ungleichung

$$r_p^*(P) \leqq r_p^*(\tilde{P}) = r_p^*(P/Q) ,$$

womit das Lemma bewiesen ist.

Das vorhergehende Lemma kann noch gewissermassen verallgemeinert werden:

Lemma 2. *Es sei P eine periodische Gruppe und Q irgendeine ihre Untergruppe, die als direkte Summe zyklischer Gruppen darstellbar ist. Dann besteht für jede Primzahl p die Ungleichung*

$$r_p^*(P) \leqq r_p^*(P/Q) .$$

Beweis. Ist $P^{(p)}$ (bezw. $Q^{(p)}$) der p-primäre Summand der Gruppe P (bezw. Q), wo p eine beliebige Primzahl ist, dann haben wir für den p-primären Summand $\tilde{P}^{(p)}$ der Faktorgruppe P/Q den Isomorphismus $\tilde{P}^{(p)} \cong P^{(p)}/Q^{(p)}$; d. h.

$$r_p^*(P/Q) = r_p^*(P^{(p)}/Q^{(p)}) .$$

Die Gruppe $Q^{(p)}$, als eine Untergruppe der direkten Summe zyklischer Gruppen, lässt sich auch als direkte Summe zyklischer Gruppen darstellen und daraus ergibt sich nach Lemma 1 die Ungleichung, die wir beweisen wollen.

Damit ist schon dieses Lemma vollständig bewiesen.

Fast alle Definitionen, die jetzt folgen werden, werden gemeinsam mit Bezeichnungen aus [1] übergenommen.

Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und g irgendein Element von G. Ist die Gleichung $nx = g$ in G lösbar, wobei n eine natürliche Zahl bezeichnet, so wollen wir die Schreibweise

$$g \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ n)_G$$

verwenden. Ist dabei $ng_1 = g$, so werden wir manchmal auch $g_1 = (1/n) \, . \, g$ schreiben. Ein Missverständnis ist ganz ausgeschlossen, da, falls in einer torsionsfreien Gruppe die Gleichung $nx = g$ lösbar ist, so ist ihre Lösung eindeutig bestimmt.

Definition 1. Es sei n eine natürliche Zahl. Die Elemente $g_1, g_2, \ldots, g_r$ einer torsionsfreien Gruppe G heissen p^n-abhängig in G, wenn es ganze rationale Zahlen k_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ gibt, die nicht alle durch die Primzahl p teilbar sind, und für die die Relation

$$k_1 g_1 + k_2 g_2 + \ldots + k_r g_r \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^n)_G \tag{4}$$

erfüllt ist. Die Elemente $g_1, g_2, \ldots, g_r$ heissen p^n-unabhängig in G, falls sie nicht p^n-abhängig in G sind.

Bemerkung. Aus der vorhergehenden Definition folgt unmittelbar, dass falls die Elemente $g_1, g_2, \ldots, g_r$ (einer torsionsfreien Gruppe G) linear abhängig sind, so sind sie schon p^n-abhängig in G für jede Primzahl p und jede natürliche Zahl n.

Ist G eine torsionsfreie Gruppe, so verstehen wir unter einer Basis der Gruppe G irgendeine maximale linear unabhängige Menge von Elementen aus G. Bekanntlich besitzen alle Basen der Gruppe G dieselbe Mächtigkeit, die als Rang der Gruppe G genannt wird; den Rang der Gruppe G wollen wir mit dem Symbol $r(G)$ bezeichnen.

Definition 2. Es seien vorgegeben: irgendwelche Elemente $g_1, g_2, \ldots, g_r$ einer torsionsfreien Gruppe G und ganze p-adische Zahlen $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, die als p-adisch konvergente Folgen ganzer rationalen Zahlen ausgedrückt sind:

$$\mathfrak{a}_i = (a_i^{(k)})_{k=1}^{\infty} \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \, .$$

Sind die Relationen

$$\sum_{i=1}^{r} a_i^{(k)} g_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^k)_G \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

erfüllt, so schreiben wir die Formel

$$\sum_{i=1}^{r} \mathfrak{a}_i g_i \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^{\infty})_G \, . \tag{5}$$

Wenn mindestens eine in der Relation (5) auftretende ganze p-adische Zahl $\mathfrak{a}_i$ ($1 \leqq i \leqq r$) von Null verschieden ist, so sagen wir, dass die Elemente g_i ($i = 1, 2, \ldots, r$) p^∞-abhängig in G sind. Falls die Elemente g_i ($i = 1, 2, \ldots, r$) nicht in der Gruppe G p^∞-abhängig sind, so heissen sie p^∞-unabhängig in G. (Vergl. mit [1], § 1.)

Es sei M eine nichtleere Menge von Elementen einer torsionsfreien Gruppe G. Wir sagen, dass die Menge M in G p^n-unabhängig (bezw. p^∞-unabhängig) ist, wenn jede endliche Teilmenge von M in G p^n-unabhängig (bezw. p^∞-unabhängig) ist. Es lässt sich mühelos zeigen, dass die Vereinigungsmenge jeder wachsenden Folge p^n-unabhängiger (bezw. p^∞-unabhängiger) Mengen wieder p^n-unabhängig (bezw. p^∞-unabhängig) ist. Daraus ergibt sich, dass in der Gruppe G mindestens ein maximales p^n-unabhängiges (bezw. p^∞-unabhängiges) System von Elementen existiert. Man kann also die folgende Definition formulieren.

Definition 3. Jedes maximale p^n-unabhängige (bezw. p^∞-unabhängige) System von Elementen einer torsionsfreien Gruppe G heisst p^n-Basis (bezw. p^∞-Basis) von G.

Sind A, B zwei beliebige Mengen, so bezeichnen wir mit dem Symbol $A \dot{-} B$ die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B angehören; das Symbol moh A stellt immer die Mächtigkeit der Menge A dar.

Lemma 3. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und B irgendeine ihre Basis. Ist A eine in G p^∞-unabhängige maximale Teilmenge von B, so gilt die Ungleichung*

$$\operatorname{moh}(B \dot{-} A) \leqq r_p^*(G/\{B\}) .$$

Beweis. Die Basis B stellen wir in der Form

$$B = E(x_\iota; \iota \in I)$$

dar, wobei I eine geeignete Indexmenge ist. Es sei I^* solche Teilmenge von I, für die genau $B \dot{-} A = E(x_\iota; \iota \in I^*)$ ist. Nach Voraussetzung ist A eine maximale p^∞-unabhängige Teilmenge von B und deshalb für jedes $\iota \in I^*$ ist die Menge (A, x_ι) schon p^∞-abhängig (sie ist nicht p^∞-unabhängig) in G. Das bedeutet, dass eine Relation der Form

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{n_\iota} \mathfrak{a}'_{\iota i} x'_{\iota i} + \mathfrak{a}'_\iota x_\iota \equiv \boldsymbol{0} \pmod{p^\infty}_G$$

erfüllt ist, wobei $\mathfrak{a}'_\iota$, $\mathfrak{a}'_{\iota i}$ ($i = 1, 2, \ldots, n_\iota$) ganze p-adische Zahlen sind, $\mathfrak{a}'_\iota \neq 0$ und $x_{\iota i} \in A$ ($i = 1, 2, \ldots, n_\iota$); dabei kann auch $n_\iota = 0$ sein. Die ganze p-adische Zahlen $\mathfrak{a}_\iota$ stellen wir in der Form $p^{\lambda_\iota}\mathfrak{b}_\iota$ dar, wobei $\mathfrak{b}_\iota$ eine zu p teilerfremde ganze p-adische Zahl ist. Dann ist die p-adische Zahl $\mathfrak{b}_\iota^{-1}$ wieder ganz und darum folgt aus der Relation (6) auch die Formel

$$\sum_{i=1}^{n_\iota} \mathfrak{b}_\iota^{-1} \mathfrak{a}'_{\iota i} x_{\iota i} + p^{\lambda_\iota} x_\iota \equiv \boldsymbol{0} \pmod{p^\infty}_G .$$

Für jedes $\iota \in I^*$ setzen wir jetzt $p^{\lambda_\iota} x_\iota = x'_\iota$ und ausserdem schreiben wir $\mathfrak{a}_{\iota i} = \mathfrak{b}_\iota^{-1} \mathfrak{a}'_{\iota i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n_\iota)$. Dann gilt für jedes $\iota \in I^*$ die Relation

$$\sum_{i=1}^{n_\iota} \mathfrak{a}_{\iota i} x_{\iota i} + x'_\iota \equiv \boldsymbol{0} \pmod{p^\infty}_G . \tag{7}$$

Es ist klar, dass die Menge $B' = E(x_\iota; \iota \in I \dot{-} I^*) \cup E(x'_\iota; \iota \in I^*)$ wiederum eine Basis der Gruppe G bildet; dabei ist $\{B'\} \subseteq \{B\}$ erfüllt.

Jetzt wollen wir den Beweis so fortsetzen, dass wir vor allem die Ungleichung

$$\operatorname{moh}(B' \dot{-} A) \leqq r_p^*(G/\{B'\}) \tag{8}$$

beweisen.

Es seien

$$\mathfrak{a}_{\iota i} = (a_{\iota i}^{(k)})_{k=1}^{\infty} \quad (i = 1, \ldots, n_\iota; \iota \in I^*)$$

die Darstellungen der entsprechenden ganzen p-adischen Zahlen in der Form der p-adisch konvergenten Folgen ganzer rationalen Zahlen, die den Ungleichungen

$$0 \leqq a_{\iota i}^{(k)} < p^k \quad (k = 1, 2, \ldots; \ i = 1, 2, \ldots, n_\iota; \ \iota \in I^*)$$

genügen. Nach (7) haben wir dann für jede natürliche Zahl k die Formel

$$\sum_{i=1}^{n_\iota} a_{\iota i}^{(k)} x_{\iota i} + x'_\iota \equiv \boldsymbol{0} \pmod{p^k}_G$$

und das heisst, dass es solche Elemente $y_\iota^{(k)} \in G$ gibt, für welche die Relationen

$$p^k y_\iota^{(k)} = \sum_{i=1}^{n_\iota} a_{\iota i}^{(k)} x_{\iota i} + x'_\iota \quad (k = 1, 2, \ldots, ; \ \iota \in I^*) \tag{9}$$

gelten. Da $\mathfrak{a}_{\iota i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n_\iota; \iota \in I^*)$ ganze p-adische Zahlen sind, bestehen die Kongruenzen

$$a_{\iota i}^{(k+1)} \equiv a_{\iota i}^{(k)} \pmod{p^k} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

und darum können wir schreiben

$$a_{\iota i}^{(k+1)} = a_{\iota i}^{(k)} + h_{\iota i}^{(k)} p^k \quad (k = 1, 2, \ldots) .$$

Also, nach (9) kann man auch schreiben

$$p^{k+1} y_\iota^{(k+1)} = p^k y_\iota^{(k)} + p^k \sum_{i=1}^{n_\iota} h_{\iota i}^{(k)} x_{\iota i} ,$$

d. h. es muss

$$p y_\iota^{(k+1)} - y_\iota^{(k)} = \sum_{i=1}^{n_\iota} h_{\iota i}^{(k)} x_{\iota i} \in \{B'\}$$

sein. Setzen wir jetzt

$$\tilde{y}_\iota^{(k)} = y_\iota^{(k)} + \{B'\} \in G/\{B'\} \quad (k = 1, 2, \ldots) ,$$

so gilt nach der letzten Relation

$$p \tilde{y}_\iota^{(k+1)} = \tilde{y}_\iota^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots; \ \iota \in I^*) . \tag{10}$$

Setzen wir weiter noch

$$py_\iota^{(1)} = \sum_{i=1}^{n_\iota} a_{\iota i}^{(1)} x_{\iota i} + x_\iota' = g_\iota^{(1)},$$

so besitzt die Gleichung $px = g_\iota^{(1)}$ keine Lösung in der Untergruppe $\{B'\}$ und deshalb $y_\iota^{(1)} \notin \{B'\}$; dabei ist aber $py_\iota^{(1)} \in \{B'\}$. Bezeichnet man also mit $O(g)$ die Ordnung des Elementes g, so gelten die Formeln

$$O(\tilde{y}_\iota^{(1)}) = p \quad (\iota \in I^*). \tag{11}$$

Aus der Relationen (10) und (11) erhält man schon den Isomorphismus

$$\tilde{\mathscr{Y}}_\iota = \{\tilde{y}_\iota^{(k)} \ (k = 1, 2, \ldots)\} \cong \mathscr{C}(p^\infty) \quad (\iota \in I^*). \tag{12}$$

Nun bilden wir die Gruppe

$$\tilde{U}^{(p)} = \{\tilde{\mathscr{Y}}_\iota \ (\iota \in I^*)\};$$

diese Gruppe ist offenbar eine vollständige Untergruppe des p-primären Summanden $\tilde{G}^{(p)}$ der Faktorgruppe $G/\{B'\}$. Das bedeutet jedoch, dass die Ungleichung

$$r_p^*(\tilde{U}^{(p)}) \leqq r_p^*(G/\{B'\}) \tag{13}$$

gelten muss. Jetzt beweisen wir, dass die Gruppe $\tilde{U}^{(p)}$ als direkte Summe aller Gruppen $\tilde{\mathscr{Y}}_\iota$ $(\iota \in I^*)$ dargestellt werden kann. Dazu genügt es zu zeigen, dass die folgende Formel gilt:

$$\{\tilde{y}_\iota^{(1)} \ (\iota \in I^*)\} = \sum_{\iota \in I^*}{}_d \{\tilde{y}_\iota^{(1)}\}.$$

Es sei vorausgesetzt, dass die vorhergehende Relation nicht erfüllt ist. Es gibt also geeignete Indizes $\iota_i \in I^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und ganze rationale Zahlen a_i $(i = 1, 2, \ldots, \ldots, n)$, die gleichzeitig den Bedingungen

a) $0 < a_i < p$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$,

b) $\sum_{i=1}^{n} a_i \tilde{y}_{\iota_i}^{(1)} = 0$

genügen. Dies bedeutet aber nichts anderes, als dass

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_{\iota_i}^{(1)} \in \{B'\},$$

d. h. dass eine Relation der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y_{\iota_i}^{(1)} = \sum_{j=1}^{r} b_j x_{\lambda_j}$$

erfüllt ist, wo $x_{\lambda_j} \in B'$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ ist und b_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ ganze rationale Zahlen sind. Wenn wir die letzte Gleichheit mit der Primzahl p multiplizieren und wenn wir (9) berücksichtigen, so erhalten wir die Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \Big(\sum_{j=1}^{n_{\iota_i}} a_{\iota_i j}^{(1)} x_{\iota_i j} + x_{\iota_i}'\Big) = \sum_{j=1}^{r} p b_j x_{\lambda_j}.$$

Dies führt aber zu einem Widerspruch, denn die Zahlen a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, die auf der linken Seite der vorhergehenden Gleichheit als Koeffizienten bei x'_{ι_i} $(i = 1, 2, \ldots, \ldots, n)$ auftreten, alle zu p teilerfremd sind, während alle auf der rechten Seite derselben Gleichheit auftretenden Koeffizienten durch p teilbar sind. Diese Gleichheit muss dabei eine Identität sein, denn offenbar $\{B'\} = \sum_{d\, x_\iota \in B'} \{x_\iota\}$ ist.

Somit haben wir bewiesen, dass die Relation

$$\tilde{U}^{(p)} = \sum_{d\, \iota \in I^*} \tilde{\mathscr{X}}_\iota$$

gilt und daraus folgt die Formel

$$\operatorname{moh} I^* = r_p^*(\tilde{U}^{(p)}) \leqq r_p^*(G/\{B'\}) .$$

Da die Gleichheit $\operatorname{moh} I^* = \operatorname{moh}(B' \dot{-} A)$ besteht, ist damit die Ungleichung (8) schon bewiesen.

Nach dem zweiten Isomorphiesatz gilt

$$G/\{B\} \cong (G/\{B'\})/(\{B\}/\{B'\}) .$$

Aus der Konstruktion der Basis B' folgt, dass die Faktorgruppe $\{B\}/\{B'\}$ eine periodische p-primäre Gruppe ist, die als direkte Summe zyklischer Gruppen dargestellt werden kann. Nach Lemma 1 gewinnen wir also die Ungleichung

$$r_p^*(G/\{B'\}) \leqq r_p^*(G/\{B\}) .$$

Aus (8) folgt dann die Formel

$$\operatorname{moh}(B \dot{-} A) = \operatorname{moh}(B' \dot{-} A) \leqq r_p^*(G/\{B\})$$

und somit ist die Behauptung bewiesen.

Jetzt gehen wir zur Untersuchung des p-Ranges torsionsfreier Gruppen über. Dabei wird zu Definition des p-Ranges solcher Gruppen die Derry'sche Konstruktion angewendet, die man z. B. in [2], § 45 finden kann.

Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und sei

$$B = E(x_\iota; \iota \in I)$$

irgendeine ihre Basis. Ist g ein beliebiges Element der Gruppe G, so gibt es eindeutig bestimmte Inzizes $\iota_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ und ganze rationale Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_r, n$ $(n \neq 0)$, so dass die Relation

$$ng = \sum_{i=1}^{r} a_i x_{\iota_i}$$

erfüllt ist; die rationalen Zahlen a_i/n $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sind dabei auch durch das Element g eindeutig bestimmt. Wir können also rein formal schreiben

$$g = \sum_{i=1}^{r} \frac{a_i}{n} x_{\iota_i} .$$

Somit betten wir die Gruppe G folgendermassen in eine vollständige Gruppe $\mathscr{R}^*$ ein:

$$G \subseteq \mathscr{R}^* = \sum_{d\, \iota \in I} \mathscr{R} x_\iota ,$$

wobei $\mathscr{R}$ den Körper der rationaler Zahlen bezeichnet; $\mathscr{R}^*$ ist also eine Linearformengruppe über dem Körper der rationalen Zahlen. Man kann noch die Gruppe $\mathscr{R}^*$ als eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{P}_p^*$ aller Linearformen mit p-adischen Koeffizienten betrachten, das heisst, als eine Untergruppe der Gruppe

$$\mathfrak{P}_p^* = \sum_{\iota \in I}{}_d \, \mathfrak{P}_p x_\iota \,, \tag{14}$$

wobei $\mathfrak{P}_p$ den Körper der p-adischen Zahlen darstellt. Die Gruppe $\mathfrak{P}_p^*$ ist offenbar eine vollständige Operatorgruppe, für die der Ring der ganzen p-adischen Zahlen $\mathfrak{J}_p$ als Operatorenbereich dient. Mit Hilfe der „lokalen Konvergenz" (vergl. mit [2], § 45) führen wir eine Topologie in die Gruppe $\mathfrak{P}_p^*$ folgendermassen ein: Das Element g soll der Grenzwert einer Folge von Elementen g_n $(n = 1, 2, \ldots)$ heissen, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

1) alle Elemente g_n $(n = 1, 2, \ldots)$ gehören einer Untergruppe von endlichem Range an, d. h., es gibt solche Indizes $\iota_i \in I$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ und p-adische Zahlen $\mathfrak{p}_{in}$ $(i = 1, 2, \ldots, r;\ n = 1, 2, \ldots)$, so dass

$$g_n = \mathfrak{p}_{1n} x_{\iota_1} + \mathfrak{p}_{2n} x_{\iota_2} + \ldots + \mathfrak{p}_{rn} x_{\iota_r} \quad (n = 1, 2, \ldots)\,;$$

2) ist für jedes i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ die Zahl $\mathfrak{p}_i$ der (p-adische) Grenzwert der Folge $(\mathfrak{p}_{in})_{n=1}^{\infty}$, so muss genau sein

$$g = \mathfrak{p}_1 x_{\iota_1} + \mathfrak{p}_2 x_{\iota_2} + \ldots + \mathfrak{p}_r x_{\iota_r} \,.$$

Die abgeschlossene Hülle einer Menge M in der topologischen Gruppe $\mathfrak{P}_p^*$ wollen wir mit dem Symbol $\overline{M}$ bezeichnen.

Es sei $\mathscr{R}_{(p)}$ der Ring aller rationalen Zahlen, die zu p teilerfremde Nenner haben. Wir setzen

$$G_{(p)} = \mathscr{R}_{(p)} G \subseteq \mathfrak{P}_p^*$$

und bilden die abgeschlossene Hülle $\overline{G}_{(p)}$ der Menge $G_{(p)}$ in der Gruppe $\mathfrak{P}_p^*$. Man erkennt leicht, dass $\overline{G}_{(p)}$ eine zulässige Untergruppe der Operatorgruppe $\mathfrak{P}_p^*$ ist, deren Struktur nur von der Struktur der Gruppe G und von der Primzahl p abhängt. Nun kann man die Gruppe $\overline{G}_{(p)}$ als direkte Summe

$$\overline{G}_{(p)} = \mathfrak{U} \dotplus \mathfrak{R}$$

darstellen, wobei $\mathfrak{U}$ die maximale vollständige zulässige Untergruppe der Operatorgruppe $\overline{G}_{(p)}$ ist. Dann ist die Gruppe $\mathfrak{U}$ (da sie in der Tat ein Modul über dem Körper $\mathfrak{P}_p$ ist) als direkte Summe der Gestalt

$$\mathfrak{U} = \sum_{\kappa \in K}{}_d \, \mathfrak{P}_p y_\kappa$$

darstellbar, wobei die Menge $E(y_\kappa;\ \kappa \in K)$ eine (beliebige) Basis der Gruppe $\mathfrak{U}$ bildet. Die Kardinalzahl moh $K = r(\mathfrak{U})$ ist eine Invariante der Gruppe G und deshalb ist die folgende Definition berechtigt.

Definition 4. Ist G eine torsionsfreie Gruppe, so wollen wir die in dem vorhergehenden Absatz definierte Kardinalzahl moh $K = r(\mathfrak{U})$ den p-Rang von G nennen und mit dem Symbol $r_p(G)$ bezeichnen.

Nun beweisen wir das folgende Lemma.

Lemma 4. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und $B = E(x_\iota; \iota \in I)$ irgendeine ihre Basis. Es sei weiter die Gruppe G mit Hilfe der Basis B in die $\mathfrak{J}_p$-vollständige Gruppe $\mathfrak{P}_p^*$ der Form (14) eingebettet. Dann liegt das Element $y \in \mathfrak{P}_p^*$ der Gestalt*

$$y = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i x_{\iota_i}, \tag{15}$$

wo $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ganze p-adische Zahlen sind, in der maximalen $\mathfrak{J}_p$-vollständigen Untergruppe $\mathfrak{U}$ der Gruppe $\overline{G}_{(p)}$ genau dann, falls die Relation

$$\sum_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i x_{\iota_i} \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G \tag{16}$$

erfüllt ist.

Beweis. Den Beweis dieses Lemma führen wir in zwei Teilen durch.

a) Zunächst setzen wir voraus, dass die Relation (16) erfüllt ist; dabei wollen wir beweisen, dass das Element y der Gestalt (15) in der Untergruppe $\mathfrak{U}$ liegt.

Ist $\mathfrak{a}_i = (a_i^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, so liegen oflensichtlich sämtliche Elemente

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} x_{\iota_i} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

in der Gruppe G. Gleichzeitig ist die Folge der Elemente $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ in $\mathfrak{P}_p^*$ konvergent und es ist sogar $y = \lim_{k \to \infty} y_k$ (in $\mathfrak{P}_p^*$). Da $y_k \in G \subseteq G_{(p)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist, so muss auch $y \in \overline{G}_{(p)}$ sein. Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass $y \in \mathfrak{U}$ ist und, wie man leicht erkennt, dazu genügt zu beweisen, dass für jede natürliche Zahl m die Gleichung $p^m x = y$ in $\overline{G}_{(p)}$ eine Lösung besitzt. Wir verifizieren nun, dass diese letzte Bedingung wirklich erfüllt ist.

Da nach der Voraussetzung die Formel (16) gilt, gibt es solche Elemente $y^{(k)} \in G$ $(k = 1, 2, \ldots)$, für die

$$p^k y^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} x_{\iota_i} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

ist. Es sei m irgendeine natürliche Zahl. Dann ist für $k \geqq m$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{(k)}}{p^m} x_{\iota_i} = p^{k-m} y^{(k)} \in G \subseteq G_{(p)}$$

und daraus folgt die Relation

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\mathfrak{a}_i}{p^m} x_{\iota_i} = \lim_{k \to \infty} p^{k-m} y^{(k)} \in \overline{G}_{(p)} .$$

Setzen wir jetzt

$$z^{(m)} = \sum_{i=1}^{n} p^{-m} \mathfrak{a}_i x_{\iota_i} \in \mathfrak{P}_p^* ,$$

so wird schon $z^{(m)} \in \bar{G}_{(p)}$ und gleichzeitig auch $p^m z^{(m)} = y$ sein. Da m als beliebige natürliche Zahl gewählt wurde, ist damit die Relation $y \in \mathfrak{U}$ vollständig bewiesen.

b) Es liege nun das Element y der Gestalt (15) in der Gruppe $\mathfrak{U}$; es sei wieder $\mathfrak{a}_i = (a_i^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Setzen wir

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(k)} x_{\iota_i} \in G \quad (k = 1, 2, \ldots) ,$$

so wird $y = \lim_{k \to \infty} y_k$ (in $\mathfrak{P}_p^*$) sein. Da $y \in \mathfrak{U}$ ist, muss für jede natürliche Zahl m auch $p^{-m} y \in \mathfrak{U}$ sein; dabei haben wir gleichzeitig $p^{-m} y = \lim_{k \to \infty} p^{-m} y_k$ (in $\mathfrak{P}_p^*$). Das bedeutet aber, dass, mit einem Index k_0 beginnend, alle übrigen Elemente $p^{-m} y_k$ (für festes m) in der Untergruppe $G_{(p)}$ liegen:

$$(17) \qquad p^{-m} y_k = \sum_{i=1}^{n} p^{-m} a_i^{(k)} x_{\iota_i} \in G_{(p)} , \quad k \geqq k_0 .$$

Nun wollen wir beweisen, dass schon die Relation

$$(18) \qquad p^{-m} y_m = \sum_{i=1}^{n} p^{-m} a_i^{(m)} x_{\iota_i} \in G_{(p)}$$

gilt. In der Tat, ist für ein $k > m$ die Relation (17) erfüllt und schreiben wir für dieses k

$$a_i^{(k)} = a_i^{(m)} + h_i^{(m)} p^m \quad (i = 1, 2, \ldots, n) ,$$

so erhalten wir

$$p^{-m} y_k = \sum_{i=1}^{n} p^{-m} a_i^{(m)} x_{\iota_i} + \sum_{i=1}^{n} h_i^{(m)} x_{\iota_i} \in G_{(p)} .$$

Da offenbar

$$\sum_{i=1}^{n} h_i^{(m)} x_{\iota_i} \in G \subseteq G_{(p)}$$

gilt, erhält man aus der letzten Gleichheit die Relation (18).

Es ist $G_{(p)} = \mathscr{R}_{(p)} G$ wegen der Definition und darum folgt aus (18) eine Gleichheit der Form

$$p^{-m} y_m = \frac{u}{v} y_m^* ,$$

wo $(u/v) \in \mathscr{R}_{(p)}$ und $y_m^* \in G$ ist; hierbei kann man voraussetzen, dass $(u, v) = 1$ und also auch $(v, p) = 1$ ist. Aus der letzten Relation erhalten wir die Formel

$$\frac{v}{u} p^{-m} y_m = \sum_{i=1}^{n} \frac{v a_i^{(m)}}{u p^m} x_{\iota_i} = y_m^* \in G$$

und darum muss

$$(19)\qquad \sum_{i=1}^{n} p^{-m} v a_i^{(m)} x_{\iota_i} = u y_m^* \in G$$

sein. Wir setzen jetzt

$$y^* = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)} x_{\iota_i} ;$$

also $y^* \in G$. Die Relation (19) behauptet, dass die Gleichung $p^m x = v y^*$ in G eine Lösung besitzt; es genügt nämlich $x = u y_m^*$ zu setzen. Wir haben also

$$(20)\qquad p^m(u y_m^*) = v y^* .$$

Wegen der Voraussetzung gilt $(v, p) = 1$ und auch $(v, p^m) = 1$. Es gibt also solche ganze rationale Zahlen s, t, die der Relation $1 = sp^m + tv$ genügen. Hieraus und aus (20) folgt die Gleichheit

$$t p^m(u y_m^*) = t v y^* = y^* - p^m(s y^*) ,$$

d. h. es gilt

$$p^m(t u y_m^* + s y^*) = y^* .$$

Da $t u y_m^* + s y^* \in G$ ist, haben wir bewiesen, dass die Gleichung $p^m x = y^*$ in G eine Lösung besitzt. Dieser letzten Gleichung genügt aber auch das Element $p^{-m} y_m$ und darum muss

$$p^{-m} y_m = t u y_m^* + s y^* \in G$$

gelten; damit haben wir gezeigt, dass die Relation

$$\sum_{i=1}^{n} p^{-m} a_i^{(m)} x_{\iota_i} \in G$$

richtig ist. Da die natürliche Zahl m beliebig war, haben wir damit die Formeln

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^{(m)} y_{\iota_i} \equiv 0 \pmod{p^m}_G \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

abgeleitet und dies beweist die Relation (16).

Das Lemma ist damit bewiesen.

Satz 1. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und A irgendeine ihre p^∞-Basis. Ist B eine Basis der Gruppe G mit $A \subseteq B$, so gilt für den p-Rang der Gruppe G die Formel*

$$(21)\qquad r_p(G) = \operatorname{moh}(B \dot{-} A) .$$

Beweis. Es sei $B = E(x_\iota; \iota \in I)$, wo I eine geeignete Indexmenge ist, und I^* sei diejenige Teilmenge von I, die der Relation $B \dot{-} A = E(x_\iota; \iota \in I^*)$ genügt. Da die Menge A nach Voraussetzung eine p^∞-Basis von G ist, so muss jede Menge $A_\iota = (A, x_\iota)$ $(\iota \in I^*)$ p^∞-abhängig in G sein und darum sind die Relationen der Form (siehe Beweis des Lemma 3)

$$(22)\qquad \sum_{i=1}^{n_\iota} \alpha_{\iota i} x_{\iota i} + p^{\lambda_\iota} x_\iota \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G ,$$

wo $x_{\iota i} \in A$ $(i = 1, 2, \ldots, n_\iota;\ \iota \in I^*)$ ist, erfüllt. Jetzt erklären wir eine neue Basis B' von G und zwar: $B' = E(x'_\iota;\ \iota \in I)$, wobei $x'_\iota = x_\iota$ für $\iota \in I \dot{-} I^*$ und $x'_\iota = p^{\lambda_\iota} x_\iota$ für $\iota \in I^*$ ist. Offensichtlich ist $A \subseteq B'$ und $\operatorname{moh}(B \dot{-} A) = \operatorname{moh}(B' \dot{-} A)$; nun, um die Formel (21) zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass

$$r_p(G) = \operatorname{moh}(B' \dot{-} A) \tag{23}$$

besteht.

Vor allem beachten wir, dass (22) in die Relation

$$\sum_{i=1}^{n_\iota} \mathfrak{a}_{\iota i} x'_{\iota i} + x'_\iota \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^\infty)_G \quad (\iota \in I^*) \tag{24}$$

übergeht. Weiter betten wir die Gruppe G mit Hilfe der Basis B' in die $\mathfrak{J}_p$-vollständige Gruppe $\mathfrak{P}_p^* = \sum_{\iota \in I}{}_d\, \mathfrak{P}_p x'_\iota$ ein, weiter bilden wir die Untergruppe $\bar{G}_{(p)}$ und bestimmen eine direkte Zerlegung der Gestalt

$$\bar{G}_{(p)} = \mathfrak{U} \dotplus \mathfrak{R} = \sum_{\kappa \in K}{}_d\, \mathfrak{P}_p y_\kappa \dotplus \mathfrak{R},$$

wobei $\mathfrak{U} = \sum_{\kappa \in K}{}_d\, \mathfrak{P}_p y_\kappa$ die maximale $\mathfrak{J}_p$-vollständige Untergruppe von $\bar{G}_{(p)}$ ist; nach der Definition ist also $r_p(G) = \operatorname{moh} K$. Auf Grund von Lemma 4 ergeben sich aus (24) die Relationen

$$z_\iota = \sum_{i=1}^{n_\iota} \mathfrak{a}_{\iota i} x'_{\iota i} + x'_\iota \in \mathfrak{U} \quad (\iota \in I^*). \tag{25}$$

Aus (25) erhält man aber ohne weiteres, dass die Elemente $z_\iota \in \mathfrak{U}$ $(\iota \in I^*)$ linear unabhängig (über $\mathfrak{J}_p$) sind und darum gilt

$$\{\mathfrak{P}_p z_\iota\ (\iota \in I^*)\} = \sum_{\iota \in I^*}{}_d\, \mathfrak{P}_p z_\iota \subseteq \mathfrak{U}. \tag{26}$$

Man kann jedes Element $y_\kappa \in \mathfrak{U}$ in der Form

$$y_\kappa = \sum_{j=1}^{m_\kappa} \mathfrak{p}_{\kappa j} x'_{\kappa j} \quad (\kappa \in K)$$

darstellen, wobei $\mathfrak{p}_{\kappa j}$ geeignete p-adische Zahlen und $x'_{\kappa j} \in B'$ $(j = 1, 2, \ldots, m_\kappa;\ \kappa \in K)$ sind. Es gibt offenbar solche ganze nicht negative (rationale) Zahlen μ_κ $(\kappa \in K)$, für die die Relationen

$$p^{\mu_\kappa} y_\kappa = \sum_{j=1}^{m_\kappa} p^{\mu_\kappa} \mathfrak{p}_{\kappa j} x'_{\kappa j} = \sum_{j=1}^{m_\kappa} \mathfrak{b}_{\kappa j} x'_{\kappa j} \quad (\kappa \in K)$$

gelten und dabei $\mathfrak{b}_{\kappa j}$ $(j = 1, \ldots, m_\kappa;\ \kappa \in K)$ schon ganze p-adische Zahlen sind. Setzen wir $p^{\mu_\kappa} y_\kappa = y'_\kappa$ $(\kappa \in K)$, so erhalten wir wieder die direkte Zerlegung

$$\mathfrak{U} = \sum_{\kappa \in K}{}_d\, \mathfrak{P}_p y'_\kappa;$$

gleichzeitig können wir schreiben

$$y'_\kappa = \sum_{j=1}^{m_\kappa} \mathfrak{b}_{\kappa j} x'_{\kappa j} \quad (\kappa \in K).$$

Diese letzte Gleichheit stellen wir noch in der Form der Summe

$$y'_\kappa = \sum_{j=1}^{s_\kappa} \mathfrak{b}_{\kappa j} x'_{\kappa j} + \sum_{j=s_\kappa+1}^{m_\kappa} \mathfrak{b}_{\kappa j} x'_{\kappa j} \quad (\kappa \in K) \tag{27}$$

dar, wo $x'_{\kappa j} \in A$ $(j = 1, 2, \ldots, s_\kappa)$ und $x'_{\kappa j} \in B' \dot{-} A$ für $j = s_\kappa + 1, \ldots, m_\kappa$ ist. Aus den Relationen (27) und (25) ergibt sich, dass das Element

$$y'_\kappa - \sum_{j=s_\kappa+1}^{m_\kappa} \mathfrak{b}_{\kappa j} z_{\kappa j} \in \mathfrak{U} \quad (\kappa \in K)$$

eine lineare Kombination von Elementen aus A ist, d. h.

$$y'_\kappa - \sum_{j=s_\kappa+1}^{m_\kappa} \mathfrak{b}_{\kappa j} z_{\kappa j} = \sum_{j=1}^{t_\kappa} \mathfrak{i}_{\kappa j} x'_{\kappa j}, \tag{28}$$

wobei $\mathfrak{i}_{\kappa j}$ $(j = 1, \ldots, t_\kappa;\ \kappa \in K)$ geeignete ganze p-adische Zahlen sind. Hieraus folgt auf Grund von Lemma 4 die Formel

$$\sum_{j=1}^{t_\kappa} \mathfrak{i}_{\kappa j} x'_{\kappa j} \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^\infty)_G .$$

Das ist aber wegen der Wahl der Menge A (sie ist eine p^∞-Basis in G) nur dann möglich, wenn $\mathfrak{i}_{\kappa j} = 0$ $(j = 1, \ldots, t_\kappa;\ \kappa \in K)$ ist; nach (28) erhalten wir also

$$y'_\kappa = \sum_{j=s_\kappa+1}^{m_\kappa} \mathfrak{b}_{\kappa j} z_{\kappa j} \quad (\kappa \in K).$$

Die letzte Relation besagt aber, dass $y'_\kappa \in \sum_{d\, \iota \in I^*} \mathfrak{P}_p z_\iota$ $(\kappa \in K)$ ist und deshalb auch dass

$$\mathfrak{U} = \sum_{d\, \kappa \in K} \mathfrak{P}_p y'_\kappa \subseteq \sum_{d\, \iota \in I^*} \mathfrak{P}_p z_\iota$$

sein muss. Hieraus und aus (26) erhält man schon die Gleichheit

$$\mathfrak{U} = \sum_{d\, \iota \in I^*} \mathfrak{P}_p z_\iota$$

und folglich auch die Gleichheit

$$r_p(G) = \operatorname{moh} I^* = \operatorname{moh}(B' \dot{-} A) .$$

Dies ist genau die Formel (23) und der Satz ist damit bewiesen.

Satz 2. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und B irgendeine ihre Basis. Dann gilt für jede Primzahl p die Ungleichung*

$$r_p(G) \leqq r_p^*(G/\{B\}) .$$

Beweis. Es sei A eine beliebige maximale p^∞-unabhängige Teilmenge von der Basis B; nach Lemma 3 gilt

$$\operatorname{moh}(B \dot{-} A) \leqq r_p^*(G/\{B\}) . \tag{29}$$

Es sei nun A' eine p^∞-Basis der Gruppe G, die A als eine Teilmenge enthält und weiter sei B' eine basis der Gruppe G, in der die ganze p^∞-Basis A' enthalten ist. Es gilt vor allem die Ungleichung

$$\operatorname{moh}(B' \dot{-} A') \leqq \operatorname{moh}(B' \dot{-} A) . \tag{30}$$

Bezeichnet das Symbol $\mathscr{S}(A)$ die minimale die Menge A enthaltende Servanzuntergruppe der Gruppe G, so gilt die Formel

$$\operatorname{moh}(B' \dot{-} A) = r(G/\mathscr{S}(A)) = \operatorname{moh}(B \dot{-} A) ;$$

hieraus und aus (30) und (29) folgt

$$\operatorname{moh}(B' \dot{-} A') \leqq r_p^*(G/\{B\}) .$$

Da wegen Satz 1 die Gleichheit $\operatorname{moh}(B' \dot{-} A') = r_p(G)$ erfüllt ist, ergibt sich aus der letzten Ungleichung die Ungleichung $r_p(G) \leqq r_p^*(G/\{B\})$. Somit ist auch dieser Satz bewiesen.

Definition 5. Es sei A eine nichtleere Menge von Elementen einer torsionsfreien Gruppe G und g irgendein Element der Gruppe G, $g \neq 0$. Wir sagen, dass das Element g von der Menge A modulo p^k abhängt, wenn es ganze rationale Zahlen a_i und Elemente $x_i \in A$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ gibt, die der Relation

$$g + \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \equiv 0 \pmod{p^k}_G$$

genügen. Die obere Grenze der Menge aller ganzen rationalen Zahlen $k \geqq 0$, für die das Element g von der Menge A modulo p^k abhängt, heisst das p-Abhängigkeitsmass des Elementes g von der Menge A, und wird mit Symbol $\mathscr{E}_p(g; A)$ bezeichnet.

Nun erinnern wir noch, dass wegen der Definition 3 jedes maximale p-unabhängige System von Elementen einer torsionsfreien Gruppe G p-Basis von G genannt wird.

Lemma 5. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und A irgendeine ihre p-Basis. Ist B eine die Menge A enthaltende Basis der Gruppe G, so gilt für jedes Element $x \in B \dot{-} A$ die Formel*

$$\mathscr{E}_p(x; A) = \infty . \tag{31}$$

Beweis. Angenommen, es gäbe ein Element $x \in B \dot{-} A$ endlichen p-Abhängigkeitsmasses von der Menge A; also $\mathscr{E}_p(x; A) = h < \infty$. Dann existierten wegen der Definition ganze rationale Zahlen a_i und Elemente $x_i \in A$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, die der Relation

$$x + \sum_{i=1}^{r} a_i x_i \equiv 0 \pmod{p^h}_G$$

genügen würden. Es sei y dasjenige Element von G, für welches die Formel

$$p^h y = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i + x \tag{32}$$

gilt, und sei die Menge $A' = (y) \cup A$ gebildet. Die Menge A' ist nicht mehr p-unabhängig[1]) in G und darum wird eine Relation der Form

$$by + \sum_{i=1}^{s} b_j x'_j \equiv 0 \pmod{p}_G$$

erfüllt, wobei b, b_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ ganze rationale Zahlen sind, die nicht alle durch Primzahl p teilbar sind. Da $(b, p) = 1$ sein muss, kann man voraussetzen, dass $b = 1$ ist. Wegen dieser Wahl der Zahl b geht die letzte Relation in die Relation

$$(33) \qquad y + \sum_{j=1}^{s} b_j x'_j \equiv 0 \pmod{p}_G$$

über. Nun fassen wir die Systeme von Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ und $x'_1, x'_2, \ldots, x'_s$ zusammen und erhalten somit ein neues System von Elementen $x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_t$ (ohne Wiederholung). Durch Hinzufügung der Nullkoeffizienten gehen dann die Formeln (32) und (33) in die Formeln

$$(34) \qquad p^h y = \sum_{i=1}^{t} a_i x^*_i + x\,, \quad y + \sum_{i=1}^{t} b_i x^*_i \equiv 0 \pmod{p}_G$$

über. Aus der letzten Relation erhalten wir auch die Relation

$$p^h y + \sum_{i=1}^{t} p^h b_i x^*_i \equiv 0 \pmod{p^{h+1}}_G$$

und hieraus nach der ersten Formel von (34) ergibt sich ohne weiteres

$$x + \sum_{i=1}^{t} (a_i + b_i)\, x^*_i \equiv 0 \pmod{p^{h+1}}_G\,.$$

Diese Formel besagt aber, dass $\mathscr{E}_p(x; A) \geqq h + 1$ ist und das steht im Widerspruch zu $\mathscr{E}_p(x; A) = h$. Das Lemma ist damit vollständig bewiesen.

Satz 3. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und A irgendeine ihre p-Basis. Ist B eine die Menge A enthaltende Basis von G, so gilt die Formel*

$$(35) \qquad \operatorname{moh}(B \dot{-} A) = r^*_p(G/\{B\})\,.$$

Beweis. Es sei I^* eine Indexmenge, für die folgendes gilt:

$$B \dot{-} A = E(x_\iota;\ x_\iota \in B,\ \iota \in I^*)\,.$$

Ist nun $\iota \in I^*$, so ist nach Lemma 5 $\mathscr{E}_p(x_\iota; A) = \infty$ und darum ist für jede natürliche Zahl k eine Relation der Form

$$(36) \qquad x_\iota + \sum_{i=1}^{s_\iota(k)} a^{(k)}_{\iota i} x_{\iota i} \equiv 0 \pmod{p^k}_G$$

erfüllt, wobei $a^{(k)}_{\iota i}$ geeignete ganze rationale Zahlen sind und $x_{\iota i} \in A$ $(i = 1, 2, \ldots, \ldots, s_\iota(k))$ ist; setzen wir dabei voraus, dass jede Zahl $a^{(k)}_{\iota i}$ noch der Bedingung

$$0 \leqq a^{(k)}_{\iota i} < p^k \quad (i = 1, 2, \ldots, s_\iota(k);\ k = 1, 2, \ldots)$$

[1]) Ist $y \in A$, so gilt auch die Formel (33), die wir ableiten brauchen.

genügt, so wird schon die Relation (36) (mit Ausnahme der Nullkoeffizienten) eindeutig bestimmt. Ist $k > 1$ und sind $a_{\iota i}^{(k-1)}$ $(i = 1, 2, \ldots, s_\iota(k))$ die den Bedingungen

$$(37) \qquad 0 \leqq a_{\iota i}^{(k-1)} < p^{k-1}\,, \quad a_{\iota i}^{(k-1)} \equiv a_{\iota i}^{(k)} \pmod{p^{k-1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, s_\iota(k))$$

genügende ganze rationale Zahlen, so folgt aus (36) ohne weiteres

$$(38) \qquad x_\iota + \sum_{i=1}^{s_\iota(k)} a_{\iota i}^{(k-1)} x_{\iota i} \equiv \boldsymbol{0} \pmod{p^{k-1}}_G\,.$$

Also, (38) ist diejenige eindeutig bestimmte Relation (36), wo man k durch $k - 1$ ersetzen soll. Für jede natürliche Zahl k und für jedes $\iota \in I^*$ bezeichnen wir mit dem Symbol $y_\iota^{(k)}$ das Element der Gruppe G, welches die Relation

$$(39) \qquad p^k y_\iota^{(k)} = x_\iota + \sum_{i=1}^{s_\iota(k)} a_{\iota i}^{(k)} x_{\iota i}$$

erfüllt. Schreiben wir nach (37) $a_{\iota i}^{(k)} = a_{\iota i}^{(k-1)} + h_{\iota i}^{(k-1)} p^{k-1}$ $(i = 1, 2, \ldots, s_\iota(k))$, so erhalten wir aus (39) und (38)

$$p^k y_\iota^{(k)} = p^{k-1} y_\iota^{(k-1)} + p^{k-1} \sum_{i=1}^{s_\iota(k)} h_{\iota i}^{(k-1)} x_{\iota i}\,,$$

also es muss auch sein

$$(40) \qquad p y_\iota^{(k)} - y_\iota^{(k-1)} = \sum_{i=1}^{s_\iota(k)} h_{\iota i}^{(k-1)} x_{\iota i} \in \{B\}\,.$$

Setzen wir nun

$$\tilde{y}_\iota^{(k)} = y_\iota^{(k)} + \{B\} \in G/\{B\} = \tilde{G} \quad (k = 1, 2, \ldots;\ \iota \in I^*)\,,$$

so ergibt sich aus (40)

$$(41) \qquad p \tilde{y}_\iota^{(k+1)} = \tilde{y}_\iota^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots;\ \iota \in I^*)\,.$$

Man erkennt leicht, dass jede Gleichung der Gestalt

$$px = x_\iota + \sum_{i=1}^{s_\iota(k)} a_{\iota i}^{(1)} x_{\iota i} \quad (\iota \in I^*)$$

in der Untergruppe $\{B\}$ unlösbar ist und deshalb $y_\iota^{(1)} \notin \{B\}$ $(\iota \in I^*)$ sein muss. Das bedeutet aber, dass

$$(42) \qquad 0(\tilde{y}_\iota^{(1)}) = p \quad (\iota \in I^*)$$

ist. Aus den Formeln (41) und (42) ergibt sich ohne weiteres, dass für jedes $\iota \in I^*$ der Isomorphismus

$$\tilde{\mathscr{X}}_\iota = \{\tilde{y}_\iota^{(k)}\ (k = 1, 2, \ldots)\} \cong \mathscr{C}(p^\infty)$$

besteht.

Jetzt wollen wir noch die Richtigkeit der folgenden Formel beweisen:

$$(43) \qquad \tilde{U}_1^{(p)} = \{\tilde{\mathscr{X}}_\iota\ (\iota \in I^*)\} = \sum_{\iota \in I^*}{}_d\, \tilde{\mathscr{X}}_\iota\,.$$

Dazu braucht nur verifiziert werden, dass die Relation

$$\{\tilde{y}_\iota^{(1)}\ (\iota \in I^*)\} = \sum_{\iota \in I^*}{}_d \{\tilde{y}_\iota^{(1)}\}$$

gilt. Setzen wir dagegen voraus, dass die letzte Relation nicht erfüllt ist. Dann gibt es also Indizes $\iota_i \in I^*$ und ganze rationale Zahlen k_i, $0 < k_i < p$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, die der Relation $\sum_{i=1}^{r} k_i \tilde{y}_{\iota_i}^{(1)} = \mathit{0}$ genügen. Das bedeutet aber, dass $\sum_{i=1}^{r} k_i \tilde{y}_{\iota_i}^{(1)} \in \{B\}$ ist, also dass

$$\sum_{i=1}^{r} k_i y_{\iota_i}^{(1)} = \sum_{i=1}^{s} m_i x_i$$

geschrieben werden kann, wobei m_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ geeignete ganze rationale Zahlen und $x_i \in B$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ sind. Multiplizieren wir die letzte Gleichheit mit der Primzahl p und berücksichtigen (39), so erhalten wir die Gleichheit

$$\sum_{i=1}^{r} k_i (x_{\iota_i} + \sum_{j=1}^{s_{\iota_i}(1)} a_{\iota_i j}^{(1)} x_{\iota_i j}) = \sum_{i=1}^{s} p m_i x_i \,.$$

Somit gelangen wir zu einem Wiederspruch, da die auf der linken Seite der letzten Relation bei x_{ι_i} $(i = 1, 2, \ldots, r)$ stehenden Koeffizienten genau die zu p teilerfremde Zahlen k_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ sind, während alle auf der rechten Seite derjenigen Relation auftretenden Koeffizienten durch p teilbar sind. Dies beweist die Formel (43).

Ist $\tilde{U}^{(p)}$ die maximale vollständige Untergruppe des p-primären Summanden $G^{(p)}$ der Gruppe $\tilde{G} = G/\{B\}$, so ist also $\tilde{U}_1^{(p)} \subseteq \tilde{U}^{(p)}$. Von der Richtigkeit der Formel (35) überzeigt man sich, indem man die Relation

$$\sum_{\iota \in I^*}{}_d \tilde{\mathscr{Z}}_\iota = \tilde{U}_1^{(p)} = \tilde{U}^{(p)} = \tilde{G}^{(p)}$$

beweist. Offensichtlich braucht man dazu nur zu zeigen, dass die Gleichheit der Sockel

$$\tilde{U}_1^{(p)}[p] = \tilde{G}^{(p)}[p] \tag{44}$$

gilt; dabei ist es klar, dass die Beziehung $\tilde{U}_1^{(p)}[p] \subseteq \tilde{G}^{(p)}[p]$ erfüllt ist.

Es sei also $\tilde{z}$ ein beliebiges Element des Sockels $\tilde{G}^{(p)}[p]$ der Gruppe $\tilde{G}^{(p)}$. Man kann das Element $\tilde{z}$ in der Form $\tilde{z} = z + \{B\}$ darstellen, wobei $z \in G$ und gleichzeitig $z \notin \{B\}$ ist. Da $p\tilde{z} = \mathit{0}$ sein muss, haben wir $pz \in \{B\}$ und darum können wir schreiben

$$pz = \sum_{j=1}^{m} a_j x_{\iota_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j x_j \,, \tag{45}$$

wobei $\iota_j \in I^*$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ und $x_j \in A$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Offensichtlich kann man voraussetzen, dass das Element z so gewählt wurde, dass die ganzen rationalen Zahlen a_i, b_j aus (45) den Ungleichungen

$$0 < a_i\,,\ b_j < p \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen. Wegen der p-Unabhängigkeit der Menge A (in G) ist die in (45) auftretende

Summe $\sum_{j=1}^{m} a_j x_{\iota_j}$ nicht leer und darum ist $m \geqq 1$. Bilden wir das Element $z_1 = z - \sum_{i=1}^{m} a_i y_{\iota_i}^{(1)}$, so erhalten wir nach (39)

$$pz_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j - \sum_{i=1}^{m} a_i \sum_{j=1}^{s_{\iota_i}(1)} a_{\iota_i j}^{(1)} x_{\iota_i j} ;$$

dabei stellt die rechte Seite dieser Relation eine lineare Kombination der Elemente von A dar: $pz_1 = \sum_{j=1}^{t} u_j x_j'$, $x_j' \in A$ $(j = 1, 2, \dots, t)$. Da die Menge A p-unabhängig in G ist, muss $p \mid u_j$, also $u_j = pu_j'$ $(j = 1, 2, \dots, t)$ sein. Hieraus folgt die Relation

$$pz_1 = p(z - \sum_{i=1}^{m} a_i y_{\iota_i}^{(1)}) = p \sum_{j=1}^{t} u_j' x_j'$$

und auch die Relation

$$z - \sum_{i=1}^{m} a_i y_{\iota_i}^{(1)} = \sum_{j=1}^{t} u_j' x_j' \in \{B\} .$$

Wir erhalten schliesslich

$$\tilde{z} = \sum_{i=1}^{m} a_i \tilde{y}_{\iota_i}^{(1)} \in \tilde{U}_1^{(p)}[p]$$

und dies beweist die Beziehung $\tilde{G}^{(p)}[p] \subseteq \tilde{U}_1^{(p)}[p]$. Damit ist der Beweis der Formel (44) und also auch der Formel (35) beendet, da aus der Gleichheit $G^{(p)} = \sum_{d\, \iota \in I^*} \tilde{\mathscr{X}}_\iota$ unmittelbar die Gleichheit

$$\operatorname{moh} I^* = \operatorname{moh}(B \dot{-} A) = r_p^*(G/\{B\})$$

folgt.

Bemerkung. Aus dem vorhergehenden Beweise ist zu ersehen, dass der Satz 3 auch folgendermassen formuliert werden könnte: Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und A irgendeine ihre p-Basis. Ist B eine die Menge A enthaltende Basis von G, so ist der p-primäre Summand $\tilde{G}^{(p)}$ der Faktorgruppe $G/\{B\}$ eine vollständige Gruppe und gleichzeitig gilt die Formel (35).

Umgekehrt kann man die folgende Behauptung beweisen: Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und B eine ihre Basis. Ist der p-primäre Summand $\tilde{G}^{(p)}$ der Faktorgruppe $G/\{B\}$ vollständig, so enthält die Basis B mindestens eine p-Basis von G, da jede maximale p-unabhängige Teilmenge von B eine p-Basis der Gruppe G bildet.

Diese letzte Behauptung wollen wir hier nicht beweisen, da wir sie nicht anwenden werden.

Lemma 6. *Es seien y_i $(i = 1, 2, \dots, r)$ irgendwelche p-unabhängige Elemente einer torsionsfreien Gruppe G und sei y ein Element von G, dessen p-Abhängigkeitsmass von der Menge $A = (y_1, y_2, \dots, y_r)$ gleich h ist; also $\mathscr{E}_p(y; A) = h < \infty$. Es sei y_{r+1} dasjenige Element aus G, welches einer Relation der Form*

$$p^h y_{r+1} = y + \sum_{i=1}^{r} a_i y_i \tag{46}$$

genügt. Dann sind auch die Elemente $y_1, y_2, \dots, y_r, y_{r+1}$ p-unabhängig in G.

Beweis. Setzen wir dagegen voraus, dass die Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_r, y_{r+1}$ p-abhängig in G wären. Dann gibt es also ganze rationale Zahlen b, b_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, die nicht alle durch p teilbar sind und die einer Relation der Form

$$by_{r+1} + \sum_{i=1}^{r} b_i y_i \equiv 0 \pmod{p}_G$$

genügen. Da nach Voraussetzung die Elemente y_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ p-unabhängig in G sind, muss $(b, p) = 1$ sein und deshalb kann man voraussetzen, das $b = 1$ ist; wir haben also

$$y_{r+1} + \sum_{i=1}^{r} b_i y_i \equiv 0 \pmod{p}_G .$$

Hieraus ergibt sich die Relation

$$p^h y_{r+1} + \sum_{i=1}^{r} p^h b_i y_i \equiv 0 \pmod{p^{h+1}}_G ,$$

und berücksichtigt man noch (46), so erhält man

$$y + \sum_{i=1}^{r} (a_i + p^h b_i)\, y_i \equiv 0 \pmod{p^{h+1}}_G ,$$

was mit $\mathscr{E}_p(y; A) = h$ im Widerspruch steht.

Dadurch ist das Lemma bewiesen.

Lemma 7. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe und A eine p^∞-unabhängige Menge der Elemente von G. Es sei B eine solche Basis der Gruppe G, dass für jedes $x \in B$ die Menge*[2] *$A \cup (x)$ nicht mehr in G p^∞-unabhängig ist. Dann ist A eine p^∞-Basis von G.*

Beweis. Es ist klar, dass es genügt die folgende Behauptung zu beweisen: Ist $g \neq 0$ ein beliebiges Element aus G, so ist die Menge[3] $A \cup (g)$ p^∞-abhängig in G.

Es sei also $g \in G$, $g \neq 0$. Da die Menge B eine Basis von G bildet, gibt es Elemente $x_i \in B$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ und ganze rationale Zahlen n $(n \neq 0)$, a_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$, die der Relation

$$ng = \sum_{i=1}^{r} a_i x_i$$

genügen. Auf Grund der im Lemma auftretenden Voraussetzung gelten gleichzeitig gewisse Relationen der Form

$$\alpha_i x_i + \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} y_{ij} \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{47}$$

wobei α_i $(\alpha_i \neq 0)$, α_{ij} $(j = 1, 2, \ldots, n_i;\ i = 1, 2, \ldots, r)$ geeignete ganze p-adische

[2]) Ist $x \in A$, so setzen wir voraus, dass die Menge $A \cup (x)$ zwei verschiedene Exemplare des Elementes x enthält; im diesen Falle gilt auch für das Element x eine Relation der Form (47).

[3]) Siehe [2]).

Zahlen und $y_{ij} \in A$ $(j = 1, 2, \ldots, n_i;\ i = 1, 2, \ldots, r)$ sind. Man kann sogar $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \ldots = \mathfrak{a}_r = \mathfrak{a}$ voraussetzen und darum die Relationen (47) in der Form

$$\mathfrak{a}x_i + \sum_{j=1}^{n_i} \mathfrak{a}_{ij} y_{ij} \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

darstellen. Hieraus ergibt sich ohne weiteres

$$\mathfrak{a}\Big(\sum_{i=1}^{r} a_i x_i\Big) + \sum_{i=1}^{r} a_i \sum_{j=1}^{n_i} \mathfrak{a}_{ij} y_{ij} \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G\,;$$

es gilt also die Formel

$$n\mathfrak{a}g + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} a_i \mathfrak{a}_{ij} y_{ij} \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G\,.$$

Dies besagt aber nichts anderes, als dass die Menge $A \cup (g)$ wirklich in der Gruppe G p^∞-abhängig ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

Satz 4. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe von höchstens abzählbarem Range. Dann gibt es eine Basis B in der Gruppe G, für die die Beziehung*

$$r^p(G) = r_p^*(G/\{B\}) \tag{48}$$

besteht.

Beweis. Ist die Gruppe G von endlichem Range, so gilt die Formel (48) für jede ihre Basis B; dies wurde schon in der Abhandlung [3] bewiesen. Es bleibt also nur noch, sich von der Richtigkeit des Satzes für Gruppen von unendlichem Range zu überzeugen.

Es sei also G eine derartige Gruppe und $B' = (x_1', x_2', \ldots)$ irgendeine ihre Basis. Weiter wollen wir zwei Fälle unterscheiden.

1. Es sei zunächst $x_j' \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G$ $(j = 1, 2, \ldots)$. Betten wir die Gruppe G mit Hilfe der Basis B' in die $\mathfrak{J}_p$-vollständige Gruppe $\mathfrak{P}_p^* = \sum_{j=1}^{\infty}{}_d\, \mathfrak{P}_p x_j'$ ein und bilden wir die Untergruppe $\bar{G}_{(p)}$, so ist nach Lemma 4 $x_j' \in \mathfrak{U}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ (mit $\mathfrak{U}$ ist wieder die maximale $\mathfrak{J}_p$-vollständige Untergruppe von $\bar{G}_{(p)}$ bezeichnet) und darum $\mathfrak{U} = \sum_{j=1}^{\infty}{}_d\, \mathfrak{P}_p x_j'$; es gilt also die Formel

$$r_p(G) = r(G) = \aleph_0\,.$$

Ist nun B irgendeine Basis von G, so ist nach Satz 2 $r_p(G) \leqq r_p^*(G/\{B\})$, und da gleichzeitig die Ungleichung $r_p^*(G/\{B\}) \leqq \aleph_0$ erfüllt ist, muss schon die Relation $r_p(G) = r_p^*(G/\{B\}) = \aleph_0$ gelten. Damit ist unsere Behauptung im diesen Falle bewiesen.

2. Wir setzen nun voraus, dass es einige Indizes i, für die die Relation $x_i' \equiv 0 \pmod{p^\infty}_G$ nicht erfüllt ist, gibt. Im diesen Falle führen wir den Beweis des Satzes so durch, dass wir eine p-Basis A von G konstruieren, die gleichzeitig eine p^∞-Basis von G bildet. Zu diesem Zweck werden wir eine in [1], § 2 angegebene Konstruktion anwenden.

Zuerst wollen wir durch die Induktionsmethode eine Folge von Elementen $y_i \in G$ $(i = 1, 2, \ldots)$ bilden, die nicht immer unendlich sein muss.

Es sei i_1 der kleinste Index, für den $x'_{i_1} \not\equiv 0 \pmod{p^\infty}_G$ ist; es sei weiter h_1 diejenige ganze rationale Zahl, für die die Relation $x'_{i_1} \equiv 0 \pmod{p^{h_1}}_G$ gilt, für die aber nicht mehr die Relation $x'_{i_1} \equiv 0 \pmod{p^{h_1+1}}_G$ erfüllt ist. Mit dem Symbol y_1 bezeichnen wir das der Bedingung $p^{h_1}y_1 = x'_{i_1}$ genügende Element aus G. Es ist klar, dass die Menge $A_1 = (y_1)$ p-unabhängig in G ist.

Es sei nun $r > 1$; weiter setzen wir voraus, dass schon die in G p-unabhängigen Elemente $y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}$ und die ihnen entsprechenden Indizes $i_1 < i_2 < \ldots < i_{r-1}$ ausgewählt wurden; wir setzen noch $A_{r-1} = (y_1, y_2, \ldots, y_{r-1})$. Mit i_r bezeichnen wir den kleinsten Index $i > i_{r-1}$, für den $\mathscr{E}_p(x'_{i_r}; A_{r-1}) = h_r < \infty$ ist. (Gibt es keinen der artigen Index, so wird die Konstruktion unserer Folge beendet; in diesem Falle setzen wir $A = A_{r-1}$.) Es gilt also eine Relation der Gestalt

$$x'_{i_r} + \sum_{i=1}^{r-1} a_{ri} y_i \equiv 0 \pmod{p^{h_r}}_G$$

und darum kann man ein Element $y_r \in G$ auswählen, so dass Relation

$$p^{h_r} y_r = x'_{i_r} + \sum_{i=1}^{r-1} a_{ri} y_i \tag{49}$$

erfüllt wird. Aus der Konstruktion des Elementes y_r, ergibt sich nach Lemma 6, dass die Menge $A_r = (y_1, y_2, \ldots, y_{r-1}, y_r)$ wieder p-unabhängig in G ist. So können wir die Konstruktion mittels der Induktionsmethode fortsetzen.

Wir setzen nun $A = (y_1, y_2, \ldots)$. Da die Menge A p-unabhängig in G ist, muss sie umsomehr p^∞-unabhängig in G sein. Wir beweisen noch, dass die Menge A eine p^∞-Basis von G bildet. Dies ist aber eine Folgerung des Lemma 7, da jede Menge $A \cup (x'_k)$ p^∞-abhängig in G ist: In der Tat, ist $k = i_r$, so folgt diese Behauptung aus (49); ist k von jedem i_r verschieden, so gibt es ein r, für welches die Relation[4])

$$\mathscr{E}_p(x'_k; A_r) = \infty$$

gilt und darum die Elemente $x'_k, y_1, y_2, \ldots, y_r$ p^∞-abhängig in G sind. Da jetzt A eine p-unabhängige p^∞-Basis der Gruppe G ist, muss sie auch eine p-Basis von G bilden.

Es sei nun B irgendeine die ganze Menge A enthaltende Basis der Gruppe G. Nach Satz 1 haben wir $r_p(G) = \operatorname{moh}(B \dot{-} A)$; aus der Relation (35) des Satzes 3 folgt gleichzeitig die Beziehung $\operatorname{moh}(B \dot{-} A) = r_p^*(G/\{B\})$ und darum gilt für diese Basis B die Formel (48).

Damit ist der Satz bewiesen.

Als direkte Folgerung der Sätze 2 und 4 ergibt sich der folgende Satz.

---

[4]) Solches r genügt der Bedingung $i_r < k < i_{r+1}$; ist $k < i_1$, so ist r beliebig.

Satz 5. *Es sei G eine torsionsfreie Gruppe von höchstens abzählbarem Range und $\mathfrak{B}$ das System aller Basen der Gruppe G. Dann gilt für jede Primzahl p die Formel*

$$r_p(G) = \min_{B \in \mathfrak{B}} r_p^*(G/\{B\}) .$$

Bemerken wir schliesslich, dass es von Interesse wäre, die Tragweite des Satzes 5 eventuell für unabzählbare Gruppen zu erschliessen.

Literaturverzeichnis

[1] *G. Szekeres*: Countable abelian groups without torsion. Duke Math. J., *15*, 1948, 293—305.

[2] *L. Fuchs*: Abelian groups. Budapest 1958.

[3] *Л. Прохазка:* О p-ранге абелевых групп без кручения конечного ранга. Чех. мат. жур. *12* (*87*), 1962, 3—43.

Резюме

ЗАМЕТКА О p-РАНГЕ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОГО РАНГА

ЛАДИСЛАВ ПРОХАЗКА (Ladislav Procházka), Прага

Эта работа примыкает к работе автора [3], в которой дано теоретико-групповое определение p-ранга групп без кручения конечного ранга. В этой статье занимаемся подобной проблемой, но для групп бесконечного ранга.

Под группой мы всюду понимаем аддитивно записанную абелеву группу; p обозначает некоторое простое число.

Пусть P — периодическая группа и пусть $U^{(p)}$ — максимальная полная подгруппа p-примарного слагаемого $P^{(p)}$ группы P. Символом $r_p^*(P)$ обозначаем мощность множества всех прямых слагаемых типа $\mathscr{C}(p^\infty)$ в некотором прямом разложении группы $U^{(p)}$.

Пусть G — группа без кручения, пусть g — произвольный ее элемент и n — — натуральное число; если в G разрешимо уравнение $nx = g$, то это обстоятельство запишем в виде $g \equiv 0 (\mathrm{mod}\ n)_G$.

Определение 1. Пусть n — натуральное число. Элементы $g_1, g_2, \ldots, g_r$ группы без кручения G называются p^n-зависимыми в G, если существуют целые рациональные числа $k_i (i = 1, 2, \ldots, r)$, не все делимые на p, удовлетворяющие соотношению (4). Эти элементы назвыаются p^n-независимыми в G, если они не являются p^n-зависимыми в G.

Определение 2. Пусть $g_1, g_2, \ldots, g_r$ — элементы группы без кручения G и пусть $\mathfrak{a}_i = (a_i^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ — целые p-адические числа. Если выполнены условия

$$\sum_{i=1}^{r} a_i^{(k)} g_i \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p^k)_G \quad (k = 1, 2, \ldots)\,,$$

то пишем соотношения (5); если притом по крайней мере одно из чисел $\mathfrak{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ из (5) будет ненулевым, то назовем элементы $g_1, g_2, \ldots, g_r$ p^{∞}-зависимыми в G. Элементы, не являющиеся p^{∞}-зависимыми в G, называются p^{∞}-независимые в G.

Понятие p^n-независимости (соотв. p^{∞}-независимости) можно, очевидно, перенести на произвольные (и бесконечные) системы элементов. Легко видеть, что в каждой группе без кручения существуют максимальные p^n-независимые (соотв. p^{∞}-независимые) системы элементов.

Определение 3. Каждая максимальная p^n-независимая (соотв. p^{∞}-независимая) система элементов группы без кручения G называется p^n-базисом (соотв. p^{∞}-базисом) группы G.

Про помощи построения Дерры (Derry) определен p-ранг $r_p(G)$ группы без кручения G (см. определение 4, или, [2], § 45); это кардинальное число, зависящее от простого числа p и структуры группы G.

Еще напомним, что под базисом группы без кручения G понимаем произвольную максимальную линейно независимую систему элементов из G. Мощность множества M обозначаем символом moh M.

Теорема 1. *Пусть G — группа без кручения и пусть A — произвольный ее p^{∞}-базис. Если B — такой базис группы G, что $A \subseteq B$, то для p-ранга группы G иммет место формула*

$$r_p(G) = \mathrm{moh}\,(B \dot{-} A)\,.$$

Теорема 2. *Пусть G — группа без кручения и пусть B — произвольный ее базис. Тогда для каждого простого числа p имеет место неравенство*

$$r_p(G) \leqq r_p^*(G/\{B\})\,.$$

Теорема 3. *Пусть G — группа без кручения и A — произвольный ее p-базис. Если B — базис группы G, содержащий все множество A, то имеем*

$$\mathrm{moh}\,(B \dot{-} A) = r_p^*(G/\{B\})\,.$$

Теорема 5. *Пусть G — группа без кручения не более чем счетного ранга и пусть $\mathfrak{B}$ — система всех базисов группы G. Тогда для каждого простого числа p имеет место формула*

$$r_p(G) = \min_{B \in \mathfrak{B}} r_p^*(G/\{B\})\,.$$

Очевидно, возникает вопрос, имеет ли место теорема 5 и для групп несчетного ранга.