Czechoslovak Mathematical Journal

Václav Havel

К теории полуавтоморфизмов альтернативных тел

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 1, 110–118

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100500

Чехословацкий математический журнал т. 12 (87) 1962, Прага,

К ТЕОРИИ ПОЛУАВТОМОРФИЗМОВ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ТЕЛ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Брно

(Поступило в редакцию 26/V 1960 г.)

В настоящей работе изучается полная группа полуавтоморфизмов тела кватернионов или тела октав над общим центром **C** характеристики, отличной от двух. Показывается, что если пренебречь автоморфизмами, индуцированными на **C**, то эта группа изоморфна определенной группе ортогональных преобразований над **C**.

1. *Телом* мы будем называть непустое множество с бинарным сложением и умножением, аддитивный группоид которого является абелевой группой, мультипликативный группоид (без нуля) которого является квазигруппой с единицей, и имеют место оба дистрибутивных закона. Тело называется *ассоциативным*, или *альтернативным*, если имеет в нем место для умножения закон ассоциативный, или альтернативный, причем альтернативный закон получим из ассоциативниго, если предположим, что из трех сомножителей не более, чем два различные. Центр тела **T** состоит из всех тех элементов $p \in \mathbf{T}$, для которых $(px)\, y = p(xy)$, $px = xp$ тождественно в $x, y \in \mathbf{T}$.

Взаимнооднозначное отображение σ тела **T** [1]) на **T** называется *автоморфизмом*, или *антиавтоморфизмом* тела **T**, если имеют место тождества

$$(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma\,, \quad (xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma\,, \quad \text{или же} \quad (x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma, \\ (xy)^\sigma = y^\sigma x^\sigma\,.$$

Взаимнооднозначное отображение σ альтернативного тела **T** на **T** называется *полуавтоморфизмом* тела **T**, если имеет место, кроме тождества $(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$, одно из взаимно эквивалентных (см. [4], стр. 121 — 124) условий $(xyx)^\sigma = x^\sigma y^q x^\sigma$, $(xy + yx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma$, $(x^2)^\sigma = (x^\sigma)^2$, $(z^{-1})^\sigma = (z^\sigma)^{-1}$, где x, y принимают все значения из **T**, и z принимает все отличные от нуля значения из **T**.

Каждый автоморфизм, или антиавтоморфизм альтернативного тела **T** является специальным случаем полуавтоморфизма на **T**. Если σ – автоморфизм, или антиавтоморфизм, или же полуавтоморфизм на **T**, тогда и обратное отображение является автоморфизмом, или антиавтоморфизмом, или же полуавтоморфизмом на **T**.

[1]) В дальнейшем ограничимся всюду телами, в которых $1 + 1 \neq 0$.

Если σ является отображением какого-то множества $\mathbf{M}$, тогда соответствующее частичное отображение на $\mathbf{N} \subset \mathbf{M}$ обозначим σ_N.

Теорема 1. *Пусть σ есть взаимнооднозчное отображение тела $\mathbf{T}$ на $\mathbf{T}$, удовлетворяющее уравнению $(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$ для всех $x, y \in \mathbf{T}$. Пусть $\mathbf{C}$ есть центр тела $\mathbf{T}$, и пусть для каждых двух элементов $x, y \in \mathbf{T}$, из которых хотя бы один принадлежит $\mathbf{C}$, имеет место $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$, $(xy)^{\sigma^{-1}} = x^{\sigma^{-1}} y^{\sigma^{-1}}$. Тогда σ_C является автоморфизмом на $\mathbf{C}$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbf{C}$, $y \in \mathbf{T}$. Тогда из отношений $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$, $(yx)^\sigma = y^\sigma x^\sigma$, $xy = yx$ вытекает $x^\sigma y^\sigma = y^\sigma x^\sigma$. Если элемент y пробегает все тело $\mathbf{T}$, то и y^σ пробежит все тело $\mathbf{T}$, так что $x^\sigma \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}^\sigma \subset \mathbf{C}$. Осуществляя аналочичные рассуждения для отображения σ^{-1}, получим включение $\mathbf{C} \subset \mathbf{C}^\sigma$ значит, $\mathbf{C}^\sigma = \mathbf{C}$, и σ есть автоморфизм на $\mathbf{C}$.

Теорема 2. *Пусть σ — полуавтоморфизм альтернативного тела $\mathbf{T}$. Пусть для непустых подмножеств $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ из $\mathbf{T}$ всякая тройка $x^\sigma, y^\sigma, (xy)^\sigma$ $(x \in \mathbf{X},\ y \in \mathbf{Y})$ является ассоциативной. Тогда имеет место или $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$ для всех $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{Y}$, или $(xy)^\sigma = y^\sigma x^\sigma$ для всех $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{Y}$.*

Доказательство. Пусть выполнены все предположения теоремы. В $\mathbf{T}$ имеет место тоджество

$$(ab)\, c + (cb)\, a = a(bc) + c(ba) = (a + c)\, b(a + c) - aba - cbc\,.$$

Значит,

$$((ab)\, c + (cb)\, a)^\sigma = (a^\sigma b^\sigma)\, c^\sigma + (c^\sigma b^\sigma)\, a^\sigma\,.$$

В дальнейшем назовем для краткости каждую пару x,y элементов $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{Y}$ допустимой парой.

Пусть имеем допустимую пару x, y. Тогда

$$\begin{aligned} v_{x,y} &= ((xy)^\sigma - x^\sigma y^\sigma)((xy)^\sigma - y^\sigma x^\sigma) = \\ &= ((xy)^\sigma)^2 + x^\sigma (y^\sigma)^2 x^\sigma - ((x^\sigma y^\sigma)(xy)^\sigma + (xy)^\sigma y^\sigma x^\sigma)\,. \end{aligned}$$

Здесь пользуемся теоремой Артина (см. [4], стр. 161) о том, что ассоциативная тройка образующих (особенно всякая пара образующих) образует в $\mathbf{T}$ ассоциативное подтело. Используя предыдущие отношения для a, b, c (в которых полагаем $a = x$, $b = y$, $c = xy$) и согласно определению полуавтоморфизма получаем $v_{x,y} = ((xy)^2 + xy^2x - (xy)(xy) - ((xy)y)x)^\sigma$ и дальше, согласно теореме Артина, получаем $v_{x,y} = 0$. $\mathbf{T}$ не имеет делителей нуля, так что или $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$ или $(xy)^\sigma = y^\sigma x^\sigma$. Если существует допустимая пара x_1, y_1, такая, что $(x_1 y_1)^\sigma = x_1^\sigma y_1^\sigma \neq y_1^\sigma x_1^\sigma$, то даже для каждого $x \in \mathbf{X}$ имеет место $(xy_1)^\sigma = x^\sigma y_1^\sigma$ и для каждого $y \in \mathbf{Y}$ имеет место $(x_1 y)^\sigma = x_1^\sigma y^\sigma$. Аналогичные следствия можно получить для допустимой пары x_2, y_2, $(x_2 y_2)^\sigma = y_2^\sigma x_2^\sigma \neq x_2^\sigma y_2^\sigma$. Если предположить, что одновременно выполняются отношения $(x_1 y_1)^\sigma = x_1^\sigma y_1^\sigma \neq y_1^\sigma x_1^\sigma$, $(x_2 y_2)^\sigma = y_2^\sigma x_2^\sigma \neq x_2^\sigma y_2^\sigma$, то на основе предыдущего придем к противоречию. (Несложные подробности не будем здесь приводить; сравни Mat. fyz. čas. 8 (1957), стр. 4.) Оттуда и вытекает завершение доказательства.

Следствие (теорема Хуа; [4], стр. 121). *Каждый полуавтоморфизм ассоциативного тела* **T** *является или автоморфизмом на* **T** *или антиавтоморфизмом на* **T**.

Теорема 3. *Пусть σ — полуавтоморфизм альтернативного тела* **T** *и пусть существуют элементы $x_0, y_0 \in \mathbf{T}$ такие, что тройка x_0^σ, y_0^σ, $(x_0y_0)^\sigma$ не является ассоциативной. Тогда для двух таких элементов x_0, y_0 есть $(x_0y_0)^\sigma \neq x_0^\sigma y_0^\sigma$ и также $(x_0y_0)^\sigma \neq y_0^\sigma x_0^\sigma$.*

Доказательство. По предположению $(x_0^\sigma y_0^\sigma)(x_0y_0)^\sigma \neq x_0^\sigma(y_0^\sigma(x_0y_0)^\sigma)$. Однако из этого следует

$$\begin{aligned} v_{x_0,y_0} &= \left((x_0y_0)^\sigma - x_0^\sigma y_0^\sigma\right)\left((x_0y_0)^\sigma - y_0^\sigma x_0^\sigma\right) = \\ &= \left((x_0y_0)^\sigma\right)^2 + x_0^\sigma(y_0^\sigma)^2 x_0^\sigma - \left((x_0^\sigma y_0^\sigma)(x_0y_0)^\sigma + (x_0y_0)^\sigma(y_0^\sigma x_0^\sigma)\right) \neq \\ &\neq \left((x_0y_0)^\sigma\right)^2 + x_0^\sigma(y_0^\sigma)^2 x_0^\sigma - \left((x_0^\sigma y_0^\sigma)(x_0y_0)^\sigma + ((x_0y_0)^\sigma y_0^\sigma)x_0^\sigma\right) = 0\,; \end{aligned}$$

смотри доказательство теоремы 2. Так как **T** не содержит делителей нуля, то $(x_0y_0)^\sigma \neq x_0^\sigma y_0^\sigma$, $(x_0y_0)^\sigma \neq y_0^\sigma x_0^\sigma$, что и требовалось доказать. В дальнейшем обнаружим в альтернативном теле вещественных октав элементы x_0, y_0, обладающие свойством теоремы 3. Это означает, что в теле вещественных октав существуют, кроме автоморфизмов и антиавтоморфизмов, еще другие (нетривиальные) полуавтоморфизмы.

Теорема 4. *Пусть σ — полуавтоморфизм альтернативного тела* **T**. *Если* **C** *является центром тела* **T**, *то σ_C есть автоморфизм на* **C**.

Доказательство. Если x, y два элемента из **T**, из которых хотя бы один принадлежит **C**, то из уравнения $(xy + yx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma$ тутже вытекает $(xy)^\sigma = \frac{1}{2}(x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma)$. Далее докажем, что $x^\sigma, y^\sigma, (xy)^\sigma$ есть ассоциативная тройка. Действительно, по предыдущему

$$\begin{aligned} x^\sigma(y^\sigma(xy)^\sigma) &= \tfrac{1}{2}x^\sigma(y^\sigma(x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma)) = \tfrac{1}{2}x^\sigma(y^\sigma x^\sigma y^\sigma + (y^\sigma)^2 x^\sigma) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left((x^\sigma y^\sigma)^2 + x^\sigma(y^\sigma)^2 x^\sigma\right). \end{aligned}$$

Также

$$(x^\sigma y^\sigma)(xy)^\sigma = \tfrac{1}{2}(x^\sigma y^\sigma)(x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma) = \tfrac{1}{2}\left((x^\sigma y^\sigma)^2 + x^\sigma(y^\sigma)^2 x^\sigma\right).$$

значит, в целом $x^\sigma(y^\sigma(xy)^\sigma) = x^\sigma y^\sigma(xy)^\sigma$. Согласно теореме 2 имеет место $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$ для любой пары элементов x, y из **T**, из которых хотя бы один принадлежит **C**. Такое же заключение, очевидно, верно и для полуавтоморфизма σ^{-1} так что остаток доказательства вытекает из теоремы 1.

Следствие. *Если σ является полуавтоморфизмом альтернативного тела* **T** *с центром* **C**, *то для $x \in \mathbf{C}$, $y \in \mathbf{T}$ имеет место $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$. Если в частном случае* **C** *является телом* **R** *вещественных чисел, то σ_R есть тождественный* *автоморфизм, и предудущее равенство для* $x \in \mathbf{R}$, $y \in \mathbf{T}$ *можно переписать в виде* $(xy)^\sigma = xy^\sigma$.

2. В дальнейшем будем исследовать тело $\mathbf{A}_3$ кватернионов и тело $\mathbf{A}_7$ октав над общим центром $\mathbf{C}$ характеристики,[2]) отличной от двух; сравни [4], стр. 170–173. Хорошо известно ([4], стр. 175), что каждое неассоциативное альтернативное тело является телом октав (*Кэлиевой алгеброй*), так что в наших рассуждениях не ограничивается общность. В $\mathbf{A}_n(n = 3,7)$ можно выбрать базис $1, e_1, \ldots, e_n$, где 1 – главная единица, и имеют место равенства $e_i^2 = -\alpha_i$, $e_ie_j = -e_je_i(i \neq j)$ для подходящим образом выбранных элементов $\alpha_i \in \mathbf{C}$.

В $\mathbf{A}_3$ можно выбрать базис таким образом, что $e_1^2 = \alpha$, $e_2^2 = \beta$, $e_3^2 = -\alpha\beta$, $e_1e_2 = e_3$, $e_2e_3 = -\beta e_1$, $e_3e_1 = -\alpha e_2$, где $\alpha \in \mathbf{C}$ не является квадратом элемента из $\mathbf{C}$ и β нельзя написать в виде $\lambda^2 - \alpha\kappa^2$ ни для каких $\lambda, \kappa \in \mathbf{C}$; [2], стр. 47. Если в частном случае $\mathbf{C}$ является телом $\mathbf{R}$ вещественных чисел, то $\alpha = \beta = -1$; таким образом получаем тело вещественных кватерионов.

В $\mathbf{A}_7$ можно выбрать базис $1, e_1, \ldots, e_7$ как продолжение только что приведенного базиса в $\mathbf{A}_3$, таким образом, что $e_4 = e$, $e_5 = e_1e$, $e_6 = e_2e$, $e_7 = e_3e$ и умножение определяется соотношением

$$(q + Qe)(r + Re) = (qr - \gamma \,.\, \bar{R}Q) + (Rq + Q\bar{r})\,e\,,$$

где $q, Q, r, R \in \mathbf{A}_3$; $\gamma \in \mathbf{C}$ и элемент γ нельзя написать в виде $\varrho^2 - \alpha\xi^2 - \beta\eta^2 + \alpha\beta\xi^2$ ни для каких $\varrho, \xi, \eta, \zeta \in \mathbf{C}$; [2], стр. 264. Если $\mathbf{C}$ является опять телом $\mathbf{R}$ вещественных чисел, то мультипликативные отношения для $e_1, \ldots, e_7$ получаются в виде $e_i^2 = -1$, $e_ie_j = \pm e_k\,(i \neq j)$. В этом случае можно базис преобразовать так, чтобы после преобразования, не меняя обозначения, имело место $e_{i(\mathrm{mod}\,7)} = e_{i+1(\mathrm{mod}\,7)}e_{i+5(\mathrm{mod}\,7)} = e_{i+4(\mathrm{mod}\,7)}e_{i+6(\mathrm{mod}\,7)} = e_{i+2(\mathrm{mod}\,7)}e_{i+3(\mathrm{mod}\,7)}$; сравни Enc. d. math. Wiss. III, стр. 1418. Таким образом, получаем тело вещественных октав. Общий элемент из $\mathbf{A}_n$ имеет вид $x = x_0 + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$, где $x_i \in \mathbf{C}$; элемент с ним сопряженный есть $\bar{x} = x_0 - x_1e_1 - \ldots - x_ne_n$, норма элемента x имеет вид $\mathbf{n}(x) = x\bar{x} = x_0^2 + \alpha_1x_1^2 + \ldots + \alpha_nx_n^2$ и элемент, обратный к $x \neq 0$, есть $x^{-1} = \bar{x}/\mathbf{n}(x)$; $n = 3,7$.

Теорема 5. *Пусть* σ – *полуавтоморфизм на* $\mathbf{A}_n$. *Тогда* $e_i^\sigma = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}e_k$ $(i = 1, \ldots, n)$, *где коэффициенты* $a_{ik} \in \mathbf{C}$ *удовлетворяют условиям*

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik}^2 = \alpha_i^\sigma, \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik} a_{jk} = 0 \text{ для } i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j.$$

Доказательство. Пусть $e_i^\sigma = a_{i0} + a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n$ $(i = 1, \ldots, n)$, где коэффициенты $a_{ij} \in \mathbf{C}$. Отображение σ есть полуавтоморфизм на $\mathbf{A}_n$, так что

[2]) Центр является полем, причем таким, что в нем можно выбрать базис по следующим правилам.

$(e_i^{-1})^\sigma = (e_i^\sigma)^{-1}$, так как согласно следствию теоремы 4 получаем $(-e_i/\alpha_i)^\sigma =$ $= (e_i^\sigma)^{-1}$, что можно записать в виде

$$\frac{-a_{i0} - a_{i1}e_1 - \ldots - a_{in}e_n}{\alpha_i^\sigma} = \frac{a_{i0} - a_{i1}e_1 - \ldots - a_{in}e_n}{a_{i0}^2 + \alpha_1 a_{i1}^2 + \ldots + \alpha_n a_{in}^2}.$$

Сравнивая коэффициенты в обеих частях, получаем

$$\frac{-a_{i0}}{\alpha_i^\sigma} = \frac{a_{i0}}{a_{i0}^2 + \alpha_1 a_{i1}^2 + \ldots + \alpha_n a_{in}^2},$$

$$\frac{a_{i1}}{\alpha_i^\sigma} = \frac{a_{i1}}{a_{i0}^2 + \alpha_1 a_{i1}^2 + \ldots + \alpha_n a_{in}^2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{a_{in}}{\alpha_i^\sigma} = \frac{a_{in}}{a_{i0}^2 + \alpha_1 a_{i1}^2 + \ldots + \alpha_n a_n^{2i}}.$$

Из коэффициентов $a_{i1}, \ldots, a_{in}$, конечно, хотя бы один отличен от нуля; допустим, что это a_{il}. Из уравнения

$$\frac{a_{il}}{\alpha_i^\sigma} = \frac{a_{il}}{a_{i0}^2 + \alpha_1 a_{i1}^2 + \ldots + \alpha_n a_{in}^2}$$

сейчас же вытекает $a_{i0}^2 + \alpha_1 a_{i1}^2 + \ldots + \alpha_n a_{in}^2 = \alpha_i^\sigma$, а из уравнения

$$\frac{-a_{i0}}{\alpha_i^\sigma} = \frac{a_{i0}}{a_{i0}^2 + \alpha_1 a_{i1}^2 + \ldots + \alpha_n a_{in}^2}$$

тогда вытекает $a_{i0} = 0$. Для $i \neq j$, конечно, имеет место $e_i e_j = -e_j e_i$, $(e_i e_j + e_j e_i)^\sigma = e_i^\sigma e_j^\sigma + e_j^\sigma e_i^\sigma$; из этого вытекает $0 = e_i^\sigma e_j^\sigma + e_j^\sigma e_i^\sigma$, $e_i^\sigma e_j^\sigma = -e_j^\sigma e_i^\sigma$. Заменим e_i^σ, e_j^σ соответствующими выражениями $a_{i1}e_1 + \ldots + a_{in}e_n$, $a_{j1}e_1 + \ldots + a_{jn}e_n$ и после умножения в обоих произведениях сравним коэффициенты при $1, e_1, \ldots, e_n$ в обеих частях. Однако оказывается, что равенство коэффициентов при $e_1, \ldots, e_n$ выполняется тривиально, так что остается сравнить коэффициенты при главной единице. Таким образом получаем уравнение

$$\alpha_1 a_{i1}a_{j1} + \ldots + \alpha_n a_{in}a_{jn} = -(\alpha_1 a_{i1}a_{j1} + \ldots + \alpha_n a_{in}a_{jn}),$$

или же $\alpha_1 a_{i1}a_{j1} + \ldots + \alpha_n a_{in}a_{jn} = 0$. Доказательство закончено.

Следствие. *Пусть σ — полуавтоморфизм на $\mathbf{A}_n$. Тогда тождественно* $\bar{x}^\sigma = \overline{x^\sigma}$, $\mathbf{n}^\sigma(x) = \mathbf{n}(x^\sigma)$.

Доказательство. Пусть $x = x_0 + x_1e_1 + \ldots + x_ne_n$ $(x_i \in C)$ — элемент из $\mathbf{A}_n$. Согласно следствию теоремы 4

$$\bar{x}^\sigma = x_0^\sigma - x_1^\sigma e_1^\sigma - \ldots - x_n^\sigma e_n^\sigma.$$

После подстановки в место e_i^σ получаем $x_0^\sigma - \sum_{i,j} x_i^\sigma a_{ij}e_j$, в то время как $x^\sigma =$

$= x_0^\sigma + x_1^\sigma e_1^\sigma + \ldots + x_n^\sigma e_n^\sigma = x_0^\sigma + \sum_{i,j} x_i^\sigma a_{ij} e_j$, $\overline{x^\sigma} = x_0^\sigma - \sum_{i,j} x_i^\sigma a_{ij} e_i$. Значит, $\bar{x}^\sigma = \overline{x^\sigma}$.

В уравнение

$$(xy + yx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma$$

подставим $y = \bar{x}$ и получим $2(x\bar{x})^\sigma = x^\sigma \bar{x}^\sigma + \bar{x}^\sigma x^\sigma$, и это, согласно предыдущему, можно записать в виде $(x\bar{x})^\sigma = x^\sigma \bar{x}^\sigma$ или же $\mathbf{n}^\sigma(x) = \mathbf{n}(x^\sigma)$. Такой же результат выведем непосредственно из уравнения

$$\mathbf{n}(x) = x_0^2 + a_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$$

и из соотношений $e_i^\sigma = a_{i1} e_1 + \ldots + a_{in} e_n$ $(i = 1, \ldots, n)$. Действительно,

$$\mathbf{n}^\sigma(x) = x_0^\sigma + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^\sigma (x_k^\sigma)^2 .$$

Далее имеем

$$x^\sigma = x_0^\sigma + x_1^\sigma e_1^\sigma + \ldots + x_n^\sigma e_n^\sigma = x_0^\sigma + x_1^\sigma (\sum_j a_{1j} e_j) + \ldots + x_n^\sigma (\sum_j a_{nj} e_j) =$$
$$= x_0^\sigma + e_1 (\sum_i x_i^\sigma a_{i1}) + \ldots + e_n (\sum_i x_i^\sigma a_{in}) ,$$

так что

$$\mathbf{n}(x^\sigma) = (x_0^\sigma)^2 + \alpha_1 (\sum_i x_i^\sigma a_{i1})^2 + \ldots + \alpha_n (\sum_i x_i^\sigma a_{in}) =$$
$$= (x_0^\sigma)^2 + ((x_1^\sigma)^2 (\sum_k a_{1k}^2 \alpha_k) + \ldots + (x_n^\sigma)^2 (\sum_k a_{nk}^2 \alpha_k)) + 2 \cdot \sum_{i,j} ((x_i^\sigma x_j^\sigma)(\sum_k \alpha_k a_{ik} a_{jk})) =$$
$$= (x_0^\sigma)^2 + \sum_i (x_i^\sigma)^2 \alpha_i^\sigma .$$

Но это значит опять, что

$$\mathbf{n}^\sigma(x) = \mathbf{n}(x^\sigma) .$$

Теорема 6. *Пусть σ — взаимнооднозначное отображение тела $\mathbf{A}_n$ на $\mathbf{A}_n$ и пусть σ_C — автоморфизм на $\mathbf{C}$. Определим $e_i^\sigma = a_{i1} e_1 + \ldots + a_{in} e_n$ $(i = 1, \ldots, n)$, где a_{ij} суть выбранные элементы из $\mathbf{C}$, удовлетворяющие условию*

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik}^2 = \alpha_i^\sigma , \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik} a_{jk} = 0 ; \quad i, j = 1, \ldots, n ; \quad i \neq j .$$

Далее определим $x^\sigma = x_0^\sigma + x_1^\sigma e_1^\sigma + \ldots + x_n^\sigma e_n^\sigma$ для $x = x_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in \mathbf{A}_n$. Тогда σ является полуавтоморфизмом на $\mathbf{A}_n$.

Доказательство. Из предположений теоремы сразу же вытекает справедливость тождества $(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma$ и справедливость уравнения $(x'y)^\sigma = x'^\sigma y^\sigma$ для $x' \in \mathbf{C}$, $y \in \mathbf{A}_n$. Справедливость тождества $\bar{x}^\sigma = \overline{x^\sigma}$, $\mathbf{n}^\sigma(x) = \mathbf{n}(x^\sigma)$ доказывается теперь таким же образом, как в следствии теоремы 5. Если, наконец, z является ненулевым элементом из $\mathbf{A}_n$, то

$$(z^{-1})^\sigma = \left(\frac{\bar{z}}{\mathbf{n}(z)}\right)^\sigma = \frac{\bar{z}^\sigma}{\mathbf{n}^\sigma(z)} , \quad (z^\sigma)^{-1} = \frac{\overline{z^\sigma}}{\mathbf{n}(z^\sigma)} = \frac{\overline{z^\sigma}}{\mathbf{n}^\sigma(z)} , \quad \text{так что} \quad (z^{-1})^\sigma = (z^\sigma)^{-1} .$$

Доказательство закончено. Из теорем 5 и 6 в итоге вытекает:[3])

Группа всех полуавтоморфизмов на $\mathbf{A}_n$ *является, если пренебречь автоморфизмами, индуцированными на* $\mathbf{C}$, *изоморфной группе* $O\left(n, \mathbf{C}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2\right)$, *значит группе всех линейных однородных преобразований пространства* $\mathbf{C} \times \times \ldots \times \mathbf{C}$ *(n факторов), сохраняющих форму* $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$.

Теперь можно легко вывести хорошо известный факт ([3], стр. 556), что единственные полуавтоморфизмы на теле $\mathbf{A}_3(\mathbf{R})$ вещественных кватернионов являются автоморфизмами и антиавтоморфизмами и что матрица $\|a_{ij}\|$, соответствующая автоморфизмам или антиавтоморфизмам на $\mathbf{A}_3(\mathbf{R})$, является прямо или непрямо ортогональной.

Действительно, всякий автоморфизм или антиавтоморфизм σ на $\mathbf{A}_3(\mathbf{R})$ является особым случаем полуавтоморфизма на $\mathbf{A}_3(\mathbf{R})$, так что согласно теореме 5 имеет место $e_i^\sigma = a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + a_{i3}e_3$ $(i = 1, 2, 3)$ с ортогональной матрицей вещественных коэффициентов a_{ij}. Из уравнений $e_i e_j = e_k$ $(i, j, k$ — — циклическая перестановка, образованная последовательно из 1, 2, 3$)$ вытекает $e_i^\sigma e_j^\sigma = \pm e_k^\sigma$, или же

$$(a_{i1}e_1 + a_{i2}e_2 + a_{i3}e_3)(a_{j1}e_1 + a_{j2}e_2 + a_{j3}e_3) = \pm (a_{k1}e_1 + a_{k2}e_2 + a_{k3}e_3)$$

и отсюда:

$$a_{k1} = \pm \begin{vmatrix} a_{i2}, & a_{i3} \\ a_{j2}, & a_{j3} \end{vmatrix}, \quad a_{k2} = \pm \begin{vmatrix} a_{i3}, & a_{i1} \\ a_{j3}, & a_{j1} \end{vmatrix}, \quad a_{k3} = \pm \begin{vmatrix} a_{i1}, & a_{i2} \\ a_{j1}, & a_{j2} \end{vmatrix}.$$

Значит, каждый элемент матрицы $\|a_{ij}\|$ равен своему дополнению со знаком $+$ или $-$, смотря по тому, является ли σ автоморфизмом или антиавтоморфизмом. Это однако означает, что к автоморфизмам σ принадлежат прямо ортогональные матрицы $\|a_{ij}\|$, тогда как к антиавтоморфизмам принадлежат непрямо ортогональные. Эти рассуждения можно провести в обратном порядке, чем теорема доказывается.

О группе всех непрерывных автоморфизмов тела $\mathbf{A}_7(\mathbf{R})$ вещественных октав известно, что это простая компактная группа G_2 в смысле классификации Картана; сравни [1], стр. 298. Этот факт доказывается средствами теории бесконечно малых преобразований, и было бы, наверное, желательным доказать его элементарными средствами.

Аналогичным путем, как в доказательстве теоремы об автоморфизмах на $\mathbf{A}_3(\mathbf{R})$, получил автор не такой наглядный результат:

Пусть для базиса $1, e_1, \ldots, e_7$ тела $\mathbf{A}_7(\mathbf{R})$ имеет место особое уравнение

$$e_{i(\mathrm{mod}\,7)} = e_{i+1(\mathrm{mod}\,7)}\, e_{i+5(\mathrm{mod}\,7)} = e_{i+4(\mathrm{mod}\,7)}\, e_{i+6(\mathrm{mod}\,7)} = e_{i+2(\mathrm{mod}\,7)}\, e_{i+3(\mathrm{mod}\,7)}\,.$$

[3]) Такое же предложение получил, согласно любезному письменному сообщению, независимо от автора д-р ГЕРБЕРТ НАУМАНН (Аахен), который, однако, своих результатов не напечатал. Автор охотно ему признает приоритет открытия.

Тогда матрица $\|a_{ij}\|$, соответствующая, согласно теоремам 5 и 6, автоморфизмам на $\mathbf{A}_7(\mathbf{R})$, характеризуется равенствами

$$a_{ij} = \begin{vmatrix} a_{k,j+1}, & a_{l,j+5} \\ a_{k,j+5}, & a_{l,j+1} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{k,j+4}, & a_{l,j+6} \\ a_{k,j+6}, & a_{l,j+4} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{k,j+2}, & a_{l,j+3} \\ a_{k,j+3}, & a_{l,j+2} \end{vmatrix},$$

где $(k, l) = (i + 1, i + 5), (i + 4, i + 6), (i + 2, i + 3)$.

Что, однако, существуют нетривиальные полуавтоморфизмы на $\mathbf{A}_7(\mathbf{R})$ такие, которые не являются ни автоморфизмами, ни антиавтоморфизмами, можно легко убедиться непосредственно.

Используем сейчас опять исходный базис $1, e_1, \ldots, e_7$, который является расширением базиса $1, e_1, e_2, e_3$ тела $\mathbf{A}_3(\mathbf{R})$.

Выберем ортогональную матрицу

$$\|a_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1, 0, 0, & 0, & 0, 0, 0 \\ 0, 1, 0, & 0, & 0, 0, 0 \\ 0, 0, a_{33}, & a_{34}, & 0, 0, 0 \\ 0, 0, a_{43}, & a_{44}, & 0, 0, 0 \\ 0, 0, 0, & 0, & 1, 0, 0 \\ 0, 0, 0, & 0, & 0, 1, 0 \\ 0, 0, 0, & 0, & 0, 0, 1 \end{Vmatrix},$$

где исключаем случаи

$$\begin{Vmatrix} a_{33}, & a_{34} \\ a_{43}, & a_{44} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{Vmatrix}, \quad \text{или} = \begin{Vmatrix} \pm 1, & \cdot 0 \\ 0, & -1 \end{Vmatrix}.$$

Докажем, что

$$(e_1e_4)^\sigma \neq e_1^\sigma e_4^\sigma\,, \quad (e_1e_4)^\sigma \neq e_4^\sigma e_1^\sigma\,.$$

Действительно,

$$e_1^\sigma = e_1\,, \quad e_4^\sigma = a_{43}e_3 + a_{44}e_4\,, \quad (e_1e_4)^\sigma = e_5^\sigma = e_5\,,$$

так что

$$e_1^\sigma e_4^\sigma = e_1(a_{43}e_3 + a_{44}e_4) = -\,a_{43}e_2 + a_{44}e_5 \neq e_5\,,$$
$$e_4^\sigma e_1^\sigma = (a_{43}e_3 + a_{44}e_4)\,e_4 = a_{43}e_2 - a_{44}e_5 \neq e_5\,.$$

Доказательство закончено.

Заметим, что пример нетривиального полуавтоморфизма, приведенный Л. А. Скорняковым (Реферативный журнал 1956, № 6833) содержит формальную ошибку. Л. А. Скорняков выбирает также указанную матрицу $\|a_{ij}\|$, однако, в виде $a_{33} = \frac{4}{5}$, $a_{34} = -\frac{3}{5}$, $a_{43} = \frac{3}{5}$, $a_{44} = \frac{4}{5}$, и этим нарушает условие ортогональности.

Литература

[1] *E. Cartan*: Les groupes réels, simples, finis et continus. Ann. Éc. Norm. *31* (1914), 263—355.

[2] *L. E. Dickson*: Algebren und ihre Zahlentheorie. Zürich-Leipzig 1927.

[3] *Б. А. Розенфельд:* Неэвклидовы геометрии. Москва 1955.

[4] *G. Pickert*: Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

Zusammenfassung

ZUR THEORIE DER SEMI-AUTOMORPHISMEN VON ALTERNATIVKÖRPERN

VÁCLAV HAVEL, Brno

Der Inhalt des Artikels besteht, im wesentlichen, in der Ableitung des folgenden Satzes über die Semi-Automorphismen von Alternativkörpern mit der Charakteristik $\neq 2$:[1])

Sei $\mathbf{A}_3$, *bzw.* $\mathbf{A}_7$ *der Quaternionen- bzw. Oktavenkörper über allgemeinem Zentrum* $\mathbf{C}$ *der Charakteristik* $\neq 2$. *Die Einheiten dieses Körpers* $\mathbf{A}_n$ $(n = 3, 7)$ *seien* $1, e_1, \ldots, e_n$, *wo* $e_i^2 = -\alpha_i \in \mathbf{C}$.

a) *Wenn* σ *ein Semi-Automorphismus auf* $\mathbf{A}_n$ *ist, so ist die induzierte Abbildung* σ_C *ein Automorphismus auf* $\mathbf{C}$ *und es gilt*

$$e_i^\sigma = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k \; ; \quad i = 1, \ldots, n \; ; \; a_{ik} \in \mathbf{C} \, , \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_{ik}^2 = \alpha_i^\sigma \, , \quad \sum_{k=1}^{n} a_k a_{ik} a_{jk} = 0 \; ; \quad i, j = 1, \ldots, n \; ; \; i \neq j \; ; \tag{2}$$

für $x = x_0 + \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ *bekommt man*

$$x^\sigma = x_0^\sigma + \sum_{k=1}^{n} x_k^\sigma e_k^\sigma \, , \tag{3}$$

für das konjugierte Element, bzw. für die Norm bekommt man

$$\bar{x}^\sigma = \overline{x^\sigma} \, , \quad \mathbf{N}^\sigma(x) = \mathbf{N}(x^\sigma) \, . \tag{4}$$

b) *Definiere man eine beiderseits eindeutige Abbildung* σ *des Körpers* $\mathbf{A}_n$ *auf* $\mathbf{A}_n$ *in der Weise, dass sie auf* $\mathbf{C}$ *ein Automorphismus induziert. Wähle man weiter die Elemente* $a_{ik} \in \mathbf{C}$, *dass* (2) *gilt, und es seien die Bilder der Elemente* e_i, *bzw. eines allgemeinen Elementes* $x \in \mathbf{A}_n$ *nach* (1) *und* (3) *definiert. Dann ist* σ *ein Semi-Automorphismus auf* $\mathbf{A}_n$.

[1]) Analogischer Satz, nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung, wurde von Dr. HERBERT NAUMANN (Aachen) unabhängig gewonnen, aber nicht veröffentlicht. Der Verfasser möchte ihm bereitwillig die Priorität der Entdeckung anerkennen.