Чехословацкий математический журнал, т. 11 (86) 1961, Прага

ÜBER EINIGE EIGENSCHAFTEN DER LÖSUNGEN DER DIFFERENTIALGLEICHUNG $y''' + 2Ay' + (A' + b) y = 0, A \leqq 0$

Michal Greguš, Bratislava

(Eingelangt am 9. November 1959)

Herrn Professor Otakar Borůvka zu seinem 60. Geburtstag gewidmet

In der Arbeit sind die Bedingungen für die Koeffizienten der Differentialgleichung $y''' + 2Ay' + (A' + b) y = 0$, $A \leqq 0$ angeführt, unter welchen jede Lösung dieser Gleichung ausgenommen einer (bis auf die lineare Abhängigkeit) oszillatorisch ist und weiter Bedingungen, unter welchen alle Lösungen der angeführten Differentialgleichung oszillatorisch sind.

Einleitung. Die Arbeit ist in zwei Teile geteilt. Im ersten Teil wird gezeigt, dass unter bestimmten Voraussetzungen über die Koeffizienten der Differentialgleichung

$$y''' + 2A(x) y' + [A'(x) + b(x)] y = 0 \tag{a}$$

im Falle $A(x) \leqq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$, wenn wenigstens eine Lösung der Differentialgleichung (a) unendlich viele Nullstellen im Intervall $(-\infty, \infty)$ hat, auch jede weitere Lösung der Differentialgleichung ausgenommen einer (bis auf die lineare Abhängigkeit) unendlich viele Nullstellen im Intervall $(-\infty, \infty)$ hat. Die nichtoszillatorische Lösung hat keine Nullstellen und dabei gilt $y \to 0$, $y' \to 0$, $y'' \to 0$ für $x \to \infty$ und $\operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} y'' \neq \operatorname{sgn} y'$ für $x \in (-\infty, \infty)$.

Die Ergebnisse verallgemeinern die Ergebnisse von M. Švec [1], welcher die Gleichung $y''' + Q(x) y = 0$ untersuchte.

Im zweiten Teil wird die Frage gelöst, unter welchen Bedingungen jede Lösung der Differentialgleichung (a) im Falle $A(x) \leqq 0$ unendlich viele Nullstellen im Intervalle $(-\infty, \infty)$ hat.

I. Über die Koeffizienten der Differentialgleichung (a) setzen wir voraus, dass $A(x) \leqq 0$, $A'(x)$, $b(x) \geqq 0$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$ sind und $b(x) \equiv 0$ in keinem Intervall gilt. Weiter sei $b(x) - |A'(x)| \geqq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ und dabei $b(x) - |A'(x) \geqq k \geqq 0$ für $x \geqq \alpha$, wo $\alpha \in (-\infty, \infty)$ ist. k ist eine Konstante.

Die adjungierte Differentialgleichung zur Differentialgleichung (a) ist

$$z''' + 2A(x) z' + [A'(x) - b(x)] z = 0 . \tag{b}$$

Es sei $a \in (-\infty, \infty)$ ein beliebiger, aber fester Punkt. Es ist bekannt [2], dass jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) der Eigenschaft $y(a) = 0$ in dieser Form $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ geschrieben werden kann, wo y_1, y_2 die Eigenschaften

$$y_1(a) = y_1'(a) = 0\,, \quad y_1''(a) \neq 0\,, \quad y_2(a) = y_2''(a) = 0\,, \quad y_2'(a) \neq 0$$

haben. Dabei entspricht $y(x)$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(c)} \qquad \left[\frac{1}{\omega} y'\right]' + \left[\frac{2A}{\omega} + \frac{\omega''}{\omega^2}\right] y = 0\,,$$

wo $\omega = \omega(x)$ mit der Eigenschaft $\omega(a) = \omega'(a) = 0$, $\omega''(a) \neq 0$ und $\omega(x) \neq 0$ für $x > a$, die Lösung der Differentialgleichung (b) ist.

Im weiteren werden wir sagen, dass $y(x)$ in das Büschel im Punkte a gehört.

Hilfssatz 1. *Über die Koeffizienten der Differentialgleichung* (a) *sollen die Voraussetzungen, welche im Anfang dieses Teiles angeführt wurden, gelten. Sei* $z_1(x)$, *mit der Eigenschaft* $z_1(a) = z_1'(a) = 0$, $z_1''(a) > 0$, $a \in (-\infty, \infty)$, *die Lösung der Differentialgleichung* (b). *Dann ist* $\lim_{x\to\infty} z_1(x) = \lim_{x\to\infty} z_1'(x) = \infty$. *Es existiert auch* $\lim_{x\to\infty} z_1''(x)$, *der endlich, oder* ∞ *ist.*

Beweis. Für die Lösungen der Differentialgleichung (b) gilt die Identität

$$\text{(1)} \qquad z'' + 2Az - \textstyle\int_a^x (A' + b)\, z \,\mathrm{d}t = z''(a) + 2A(a)\, z(a)\,,$$

was leicht ersichtlich ist, wenn wir die Differentialgleichung (b) Glied nach Glied im Intervall $\langle a, x\rangle$ integrieren. Zeigen wir, dass $z_1(x)$ und $z_1'(x)$ rechts von a keine Nullstelle haben. Es ist

$$\text{(2)} \qquad (z_1 z_1')' = z_1 z_1'' + z_1'^2\,.$$

Jedoch aus (1) folgt, dass

$$z_1''(x) = z_1''(a) + \textstyle\int_a^x (A' + b)\, z_1 \,\mathrm{d}t - 2A z_1(x)$$

gilt.

Wenn wir dies in (2) einsetzen, erhalten wir

$$(z_1 z_1')' = z_1(x)\left[z_1''(a) + \textstyle\int_a^x [A'(t) + b(t)]\, z_1(t)\,\mathrm{d}t - 2A(x)\, z_1(x)\right] + z_1'^2(x)\,.$$

Setzen wir voraus, dass $z_1(x_1) = 0$, $x_1 > a$ ist. Wenn wir die letzte Gleichheit im Intervall $\langle a, x_1\rangle$ integrieren, erhalten wir einen Widerspruch.

Ähnlich ersehen wir, dass auch $z_1'(x) \neq 0$ für $x > a$ ist und aus der Gleichheit (1) für $z_1(x)$ stellen wir leicht fest, dass auch $z_1''(x) \neq 0$ für $x > a$ ist und dass $z_1''(x) \geqq z_1''(a)$ für $x > a$ ist. Wenn wir die Ungleichheit $z_1''(x) \geqq z_1''(a)$ integrieren, erhalten wir $z_1'(x) \geqq z_1''(a)(x - a)$ für $x > a$ und auch $z_1(x) \geqq \frac{1}{2} z_1''(a)(x - a)^2$. Aus den letzten zwei Ungleichheiten folgt, dass $z_1(x) \to \infty$, $z_1'(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ gilt. Aus den Voraussetzungen des Hilfssatzes und aus der Gleichung (b) folgt, dass $z_1'''(x) \geqq 0$ für $x > a$ ist und folglich ist $z_1''(x)$ eine nichtabnehmende Funktion von $x \in (-\infty, \infty)$

Es existiert deshalb $\lim z_1''(x)$. Damit wird der Hilfssatzt bewiesen.

Bemerkung 1. Ähnliche Eigenschaften wie $z_1(x)$ haben auch die Lösungen der Differentialgleichung (b) $z_2(x)$ und $z_3(x)$ mit den Anfangsbedingungen $z_2(a) = z_2''(a) = 0$, $z_2'(a) > 0$, $z_3(a) > 0$, $z_3'(a) = 0$, $z_3''(a) \geqq 0$. Dies kann man ähnlich wie für $z_1(x)$ beweisen.

Bei dem Beweis $\lim\limits_{x\to\infty} z_2'(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to\infty} z_2''(x) = M > 0$ ist es notwendig folgendermassen vorzugehen:

Zuerst zeigen wir, dass $z_2(x) > 0$ für $x > a$ ist. Aus der Beziehung (1) geht sodann hervor, dass $z_2''(x) \geqq 0$ für $x \geqq a$ ist und daher ist $z_2'(x)$ für $x > a$ nicht abnehmend. Aus der Gleichung (b) geht hervor, dass $z_2'''(x) \geqq 0$ für $x \geqq a$ ist, daher ist $z_2''(x)$ nicht abnehmend für $x > a$, deshalb ist $\lim\limits_{x\to\infty} z_2''(x) = M > 0$. Es existiert deshalb eine solche Umgebung U_a rechts am Punkt a, in welcher $z_2(x) > 0$, $z_2'(x) > 0$, $z_2''(x) > 0$ ist. Es sei $\bar{x} \in U_a$. Dann gilt $z_2''(x) \geqq z_2''(\bar{x})$ für $x > \bar{x}$. Daraus geht hervor, dass $\lim\limits_{x\to\infty} z_2'(x) = +\infty$ ist.

Im Falle $z_3(x)$ ist es notwendig folgendermassen vorzugehen: wenn $b(a) - A'(a) > 0$ ist, dann folgt aus der Gleichung (b), dass $z_3'''(a) > 0$ ist. Wir zeigen, dass $z_3(x) > 0$, $z_3'(x) > 0$, $z_3''(x) > 0$ und $z_3'''(x) \geqq 0$ für $x > a$ gilt. Setzen wir voraus, dass $z_3(x)$ rechts von a eine Nullstelle hat. Dann existiert ein solcher Punkt $\xi > a$, in welchem $z_3'(\xi) = 0$ ist. ξ sei die erste Nullstelle der Ableitung $z_3'(x)$ rechts von a. Im Intervall $\langle a, \xi \rangle$ ist $z_3'''(x) \geqq 0$ und deshalb ist $z_3''(x) > 0$, $z_3'(x) > 0$, $z_3(x) > 0$ für $x \in (a, \xi)$. Zeigen wir, dass $z_3'(x)$ im Punkte ξ keine Nullstelle hat. Setzen wir das Gegenteil voraus. Es ist

$$(z_3 z_3')' = z_3 z_3'' + z_3'^2 .$$

Wenn wir die letzte Gleichheit im Intervall $\langle a, \xi \rangle$ integrieren, erhalten wir einen Widerspruch. Es ist also

$$z_3(x) > 0\,, \quad z_3'(x) > 0\,, \quad z_3''(x) > 0\,, \quad z_3'''(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad x > a\,.$$

Wenn $b(a) = A'(a)$ ist, können wir die Funktionen $A(x)$, $A'(x)$, $b(x)$ mit solchen Funktionen $A_n(x)$, $A_n'(x)$, $b_n(x)$ approximieren, dass $b_n(a) > A_n'(a)$ ist und dass für diese die Voraussetzungen des Lemma 1 gelten. Z. B. die Koeffizienten $A(x)$, $A'(x)$, $b(x)$ approximieren wir mit den Funktionen $A(x)$, $A'(x)$, $b(x) + 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$. Für die Lösungen $z_{3n}(x)$ der jeweiligen Differentialgleichungen (b), wo wir anstatt $A(x)$, $A'(x)$, $b(x)$ die Koeffizienten $A_n(x)$, $A_n'(x)$, $b_n(x)$ schreiben, gilt nach dem vorhergehenden, dass

$$z_{3n}(x) > 0\,, \quad z_{3n}'(x) > 0, z_{3n}''(x) > 0, z_{3n}'''(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad x > a\,.$$

Da $z_3(x)$ ein Grenzwert der Funktionen $z_{3n}(x)$ ist, muss

$$z_3(x) \geqq 0\,, \; z_3'(x) \geqq 0\,, \; z_3''(x) \geqq 0\,, \; z_3'''(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad x > a$$

gelten.

Da nach der Voraussetzung ein solches $\alpha \in (-\infty, \infty)$ existiert, dass $b(\alpha) - A'(\alpha) > 0$ ist, ersehen wir leicht, dass

$$z_3(x) > 0\,,\ z_3'(x) > 0\,,\ z_3''(x) > 0\,,\ z_3'''(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad x > \alpha$$

sein muss. Daraus erhalten wir leicht die Behauptung.

Satz 1. *An die Koeffizienten der Differentialgleichung* (a) *seien die Bedingungen des Hilfssatzes* 1 *erfüllt.*

Wenn die Differentialgleichung (a) *eine Lösung oszillatorisch hat, dann ist jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *oszillatorisch ausser einer (bis an die lineare Abhängigkeit), welche keine Nullstelle hat. Die nichtoszillatorische Lösung y ist der Eigenschaft, dass y, y' y'' monotone Funktionen sind, weiter* $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$ *für alle* $x \in (-\infty, \infty)$ *und*

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} y'(x) = \lim_{x\to\infty} y''(x) = 0\,.$$

Beweis. Setzen wir voraus, dass $\bar{y}(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (a) ist, welche oszillatorisch ist, d. h. sie hat unendlich viele Nullstellen im Intervall (a, ∞), $a \in (-\infty, \infty)$. Es sei $x_0 \in (-\infty, \infty)$ ein beliebiger, aber fester Punkt. Es sei y eine Lösung der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(x_0) = 0$. Zeigen wir, dass y im Intervall (x_0, ∞) oszillatorisch ist. Die Lösung y gehört in das Büschel der Lösungen der Differentialgleichung (a), $c_1y_1 + c_2y_2$ im Punkte x_0, in welchem Punkte

$$y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0\,,\ y_1''(x_0) \neq 0\,,\ y_2(x_0) = y_2''(x_0) = 0\,,\ y_2'(x_0) \neq 0 \quad \text{ist}\,.$$

Wenn wir zeigen, dass wenigstens eine Lösung des Büschels im Punkte x_0 im Intervall (x_0, ∞) oszillatorisch ist, dann ist auch y oszillatorisch, weil die Lösungen des Büschels im Punkte x_0 füı $x > x_0$ eine Differentialgleichung der Form (c) erfüllen, wo $w(x) \neq 0$ für $x > x_0$ ist. Es sei $x_1 > a$ eine Nullstelle der Lösung $\bar{y}$. Wählen wir $c_1, \bar{c}_2$ so, dass

$$\bar{c}_1y_1(x_1) + \bar{c}_2y_2(x_1) = 0 \text{ ist}\,.$$

Dies ist immer möglich. Bezeichnen wir $y^* = \bar{c}_1y_1 + \bar{c}_2y_2$. Dann aber gehören $\bar{y}$ und y^* in dasselbe Büschel im Punkte x_1 und also ist y^* im Intervall (a, ∞) oszillatorisch und deshalb auch im Intervall (x_0, ∞). Es folgt daher, dass auch y oszillatorisch ist. Damit haben wir gezeigt, dass jede Lösung, welche wenigstens eine Nullstelle hat, oszillatorisch ist.

Es seien jetzt y_1, y_2, y_3 das Fundamentalsystem der Lösungen der Differentialgleichung (a) mit den Eigenschaften

$$y_1(a) = y_1'(a) = 0\,,\ y_1''(a) = 1\,,\ y_2(a) = y_2''(a) = 0\,,\ y_2'(a) = 1\,,$$
$$y_3'(a) = y_3''(a) = 0\,,\ y_3(a) = 1\,,\ a \in (-\infty, \infty)\,.$$

Die Lösungen y_1, y_2 sind im Intervall (a, ∞) oszillatorisch, da sie eine Nullstelle haben. Es ist bekannt [3], dass

$$\omega(y_1, y_2) = \omega_1,\ \omega(y_2, y_3) = \omega_3\,,\ \omega(y_1, y_3) = \omega_2$$

die Lösungen der Differentialgleichung (b) mit den Eigenschaften

$$\omega_1(a) = \omega_1'(a) = 0\,,\ \omega_1''(a) = -1\,,\ \omega_2(a) = \omega_2''(a) = 0\,,\ \omega_2'(a) = -1\,,$$

$$\omega_3(a) = -1\,,\ \omega_3'(a) = 0\,,\ \omega_3''(a) = 2A(a) \text{ sind}\,.$$

Nach Hilfssatz 1 und nach der Bemerkung 1 ist $\omega_1(x) < 0$, $\omega_2(x) < 0$, $\omega_3(x) < 0$ für $x > a$ und also ist auch $y_3(x)$ im Intervall (a, ∞) oszillatorisch.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (a) ist

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3\,, \text{ wo } y(a) = c_3\,,\ y'(a) = c_2\,,\ y''(a) = c_1\,.$$

Wenn wenigstens eine der Konstanten c_1, c_2, c_3 gleich Null ist, dann ist, wie ersichtlich, die Lösung y oszillatorisch. Es sei $c_1 \,.\, c_2 \,.\, c_3 \neq 0$. Dann sind 4 Fälle möglich.

a) $\operatorname{sgn} c_1 = \operatorname{sgn} c_2 = \operatorname{sgn} c_3$, b) $\operatorname{sgn} c_3 \neq \operatorname{sgn} c_2 = \operatorname{sgn} c_1$,

c) $\operatorname{sgn} c_3 = \operatorname{sgn} c_2 \neq \operatorname{sgn} c_1$, d) $\operatorname{sgn} c_1 = \operatorname{sgn} c_3 \neq \operatorname{sgn} c_2$.

Es ist offensichtlich, dass die Lösungen im Falle a), b), c) oszillatorisch sind. Im Falle a), b) ist nämlich

$$\omega(y_3, y) = c_2\omega(y_3, y_2) + c_1\omega(y_3, y_1) \neq 0 \text{ für } x > a\,.$$

Im Falle c) ist

$$\omega(y, y_1) = c_3\omega(y_3, y_1) + c_2\omega(y_2, y_1) \neq 0 \text{ für } x > a\,.$$

Also müssen die Lösungen ohne Nullstellen der Form d) sein, d. h. $\operatorname{sgn} y(a) = \operatorname{sgn} .\, .\, y''(a) \neq \operatorname{sgn} y'(a)$ und ausserdem ist $y(a) \,.\, y'(a) \,.\, y''(a) \neq 0$. Aber daraus folgt, für jede Lösung $y(x)$ ohne Nullstellen, dass für jedes $x \neq a$ auch $y(x) \,.\, y'(x) \,.\, y''(x) \neq 0$ und $\operatorname{sgn} y(x) = \operatorname{sgn} y''(x) \neq \operatorname{sgn} y'(x)$ sein muss. Es sei $y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (a) ohne Nullstellen mit der Eigenschaft $y(a) > 0$. Dann ist

$$y''' = -2Ay' - (A' + b)\,y \leqq 0$$

und daher ist y'' eine nichtfallende Funktion. Es sei $\lim_{x\to\infty} y'' = m > 0$. Dann ist $y'(x) > y'(a) + m(x - a)$. Also ist $y'(x) > 0$ für genug grosse x, was ein Widerspruch ist. Also $\lim_{x\to\infty} y''(x) = 0$. Ganz ähnlich kann man zeigen, dass $\lim_{x\to\infty} y'(x) = 0$ ist. Zeigen wir, dass auch $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$ gilt. Erwägen wir die Funktion $\omega = \omega(y, y_2)$. Sie ist offensichtlich eine Lösung der Differentialgleichung (b), die für $x > a$ oszillatorisch ist. Setzen wir nämlich voraus, dass $\omega(y, y_2) \neq 0$ für genug grosse x ist. Dann muss aber y oszillatorisch sein, da y_2 oszillatorisch ist, was aber ein Widerspruch ist, also ist $\omega(y, y_2)$ oszillatorisch. Gleichzeitig zeigten wir, dass die Gleichung (b) eine oszillatorische Lösung im Intervall (a, ∞) hat, wenn $y(x)$ ohne Nullstellen ist. Bilden wir die wronskische Determinante $W(y, y_1, y_2)$. Offenbar gilt $W(y, y_1, y_2) = -y(a)$ und also

$$y''\omega(y_1, y_2) - y'\omega'(y_1, y_2) + y[\omega''(y_1, y_2) + 2A\omega(y_1, y_2)] = -y(a)\,.$$

Nach Hilfssatz 1 gilt

$$\omega(y_1, y_2) \to -\infty, \quad \omega'(y_1, y_2) \to -\infty,$$

wenn $x \to \infty$.

Zeigen wir, dass auch $\omega''(y_1, y_2) + 2A\omega(y_1, y_2) \to -\infty$ für $x \to \infty$ gilt. Aus der Identität (1) für ω folgt

$$\omega'' + 2A\omega = \omega''(a) + \int_a^x (A' + b)\,\omega \,\mathrm{d}t < 0 \quad \text{für} \quad x > a .$$

Aus der Voraussetzung $b - |A'| \geqq k > 0$ für $x > \alpha$ geht hervor, dass $\omega'' + 2A\omega \to -\infty$ für $x \to \infty$ ist. Wenn wir dies in Betracht ziehen, folgt aus der Gleichheit

$$y''\omega - y'\omega' + y(\omega'' + 2A\omega) = -y(a),$$

dass $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$ ist.

Zeigen wir jetzt, dass wenigstens eine Lösung der Differentialgleichung (a) ohne Nullstellen existiert. Es bilden y_1, y_2, y_3 wieder das Fundamentalsystem der Lösungen der Differentialgleichung (a) mit den Eigenschaften

$$y_1(x_0) = y_1'(x_0) = 0, \; y_1''(x_0) = 1, \; y_2(x_0) = y_2''(x_0) = 0, \; y_2'(x_0) = 1,$$
$$y_3'(x_0) = y_3''(x_0) = 0, \; y_3(x_0) = 1 .$$

Es seien $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ alle Nullstellen der Lösung y_1. Für die Lösungen der Differentialgleichung (a) gilt die sogenannte integrale Identität [2]:

$$yy'' - \tfrac{1}{2}y'^2 + Ay^2 + \int_{x_0}^x by^2 \,\mathrm{d}t = \text{konst}, \tag{3}$$

die für y_1 von der Form

$$y_1y_1'' - \tfrac{1}{2}y_1'^2 + Ay_1^2 + \int_{x_0}^x by_1^2 \,\mathrm{d}t = 0$$

ist, aus welcher wir leicht ersehen, dass y_1 links von x_0 keine Nullstelle hat. Bilden wir jetzt eine Folge von Lösungen der Differentialgleichung (a) $\{u_n\}$, wo

$$u_n = c_1^n y_1 + c_2^n y_2 + c_3^n y_3$$

folgende Eigenschaften hat:

$$u_n(x_n) = u_n'(x_n) = 0, \quad u_n^2(x_0) + u_n'^2(x_0) + u_n''^2(x_0) = 1 .$$

Das ist immer möglich. Aus der integralen Identität (3) für u_n ist ersichtlich, dass keine Lösung u_n links von x_n eine Nullstelle hat.

Erwägen wir jetzt die Folgen

$$\{u_n(x_0)\}_{n=1}^\infty, \; \{u_n'(x_0)\}_{n=1}^\infty, \; \{u_n''(x_0)\}_{n=1}^\infty . \tag{4}$$

Jede von ihnen ist offenbar begrenzt. Aus der ersten Folge der Folgen (4) kann man eine solche Folge entnehmen, die konvergiert. Es sei dies $\{u_{n_k}(x_0)\}_{k=1}^\infty$ und ihr Grenzwert sei u_0. Aus der Folge $\{u_{n_k}'(x_0)\}_{k=1}^\infty$ kann man auch eine solche etnehmen, die konvergiert. Es sei dies $\{u_{n_{k_l}}'(x_0)\}_{l=1}^\infty$ und ihr Grenzwert sei u_0'. Ähnlich kann man dies mit der dritten Folge durchführen und den Grenzwert der entnommenen Folge bezeichnen wir u_0''.

Es existieren also die entnommenen Folgen aus den Folgen (4) mit denselben Indizes, welche konvergente Folgen sind. Einfachheitshalber bezeichnen wir sie und ihre Grenzwerte

$$\{u_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \to u_0\,, \quad \{u_n'(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \to u_0'\,, \quad \{u_n''(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \to u_0''\,.$$

Bezeichnen wir die Lösung der Differentialgleichung (a) mit $u(x)$, welche folgende Bedingungen erfüllt: $u(x_0) = u_0$, $u'(x_0) = u_0'$, $u''(x_0) = u_0''$. Die Lösung ist nicht trivial, da alle drei Zahlen u_0, u_0', u_0'' gleichzeitig nicht Null sein können, da

$$\lim_{n\to\infty} \left[u_n^2(x_0) + u_n'^2(x_0) + u_n''^2(x_0)\right] = u_0^2 + u_0'^2 + u_0''^2 = 1$$

ist. Zeigen wir, dass $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ gilt. In Wirklichkeit ist nämlich

$$u_n(x) = u_n''(x_0)\, y_1(x) + u_n'(x_0)\, y_2(x) + u_n(x_0)\, y_3(x)\,,$$
$$u(x) = u_0'' y_1(x) + u_0' y_2(x) + u_0 y_3(x)\,,$$

woraus folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ ist.

Es ist notwendig zu zeigen, dass $u(x)$ keine Nullstelle im Intervall $(-\infty, \infty)$ hat.

Setzen wir voraus, dass $u(\xi) = 0$, wo $\xi \in (-\infty, \infty)$ ist. Dann aber ist $u(x)$ oszillatorisch. ξ sei eine solche Nullstelle der Lösung $u(x)$, in welcher $u'(\xi) < 0$ (es kann nur eine doppelte Nullstelle existieren). Daher ist im Punkte $\xi + \delta$, wo $\delta > 0$ genügend klein ist, $u(\xi + \delta) < 0$. Aus dem Vorhergehenden folgt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ für alle $x \in (-\infty, \infty)$ gilt, also ist auch

$$\lim_{n\to\infty} u_n(\xi + \delta) = u(\xi + \delta) < 0\,.$$

Dies ist aber nicht möglich, da bei genügend grossem n $x_n > \xi + \delta$ und $u_n(\xi + \delta) > 0$ ist, da die Lösungen $u_n(x)$ links von x_n keine Nullstelle haben. Daher ist $u(x) \neq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$.

Zum Abschluss des Beweises des Satzes 1 ist es notwendig zu zeigen, dass gerade nur eine Lösung (bis auf die lineare Abhängigkeit) der Differentialgleichung (a) ohne Nullstellen existiert. Setzen wir das Gegenteil voraus. Es seien nämlich u, u_1 zwei unabhängige Lösungen der Differentialgleichung (a) ohne Nullstellen im Intervall $(-\infty, \infty)$. Dann ist $u_1 = c_1 u + c_2 y_1 + c_3 y_2$, wo y_1, y_2 die vorhergehenden Eigenschaften haben. Die Lösung u_1 kann man also in der Form $u_1 = U + Y$ schreiben, wo $U = c_1 u$ und Y in das Büschel im Punkte x_0 gehört, also ist sie für $x > x_0$ oszillatorisch. Dabei ist $U \to 0$, $U' \to 0$, $U'' \to 0$ für $x \to \infty$. Da u_1 ohne Nullstellen ist, muss auch $u_1 \to 0$, $u_1' \to 0$, $u_1'' \to 0$ für $x \to \infty$ sein. Zeigen wir, dass dies nicht wahr ist. Es seien nämlich $x_1 < x_2 < \ldots < x_i < \ldots$ alle Nullstellen der Lösung Y rechts von x_0. Die integrale Identität (4) für die Lösung Y ist

$$YY'' - \tfrac{1}{2}Y'^2 + AY^2 + \int_{x_0}^{x} bY^2\, dt = -\tfrac{1}{2}Y'^2(x_0)\,.$$

In den Punkten x_i, $i = 1, 2, \ldots$ ist

$$\tfrac{1}{2}Y'^2(x_i) = \tfrac{1}{2}Y'^2(x_0) + \int_{x_0}^{x_i} bY^2\,dt\,,$$

woraus folgt, dass u_1' für $x \to \infty$ nicht zu Null konvergiert, da $u_1' = U' + Y'$ ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung. Aus dem bewiesenen Satz geht hervor, dass jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung (a) mit der Eigenschaft $y(a) \neq 0$ oszillatorisch ist, wenn sie im Punkte a die Beziehung $\operatorname{sgn} y(a) = \operatorname{sgn} y''(a) \neq \operatorname{sgn} y'(a)$ nicht erfüllt.

II. G. Mammana [4] spricht die Vermutung aus, dass jede lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung wenigstens eine Lösung ohne Nullstellen hat. G. Ascoli [5] aber konstruierte ein Beispiel der Differentialgleichung dritter Ordnung, deren jede Lösung wenigstens eine Nullstelle hat. G. Sansone konstruierte die Differentialgleichung dritter Ordnung der Form

$$y''' + Q(x)\,y' + Q'(x)\,y = 0 \tag{d}$$

so, dass jede ihre Lösung im endlichen Intervalle eine im Voraus bestimmte Anzahl von Nullstellen hat. In der Arbeit [6] sind die Bedingungen für die Koeffizienten der Differentialgleichung der Form (d) bestimmt, unter welchen jede Lösung der Differentialgleichung (d) im Intervall $(-\infty, \infty)$ unendlich viele Nullstellen hat.

In diesem Kapitel führen wir die Bedingungen für die Koeffizienten der Differentialgleichung (a) an, unter welchen jede Lösung im Falle $A(x) \leqq 0$ für $x \in (-\infty, \infty)$ unendlich viele Nullstellen im Intervall $(-\infty, \infty)$ hat.

Satz 2. *Über die Koeffizienten der Differentialgleichung* (a) *setzen wir voraus: Es seien $A'(x)$, $b(x)$ stetige Funktionen von $x \in (-\infty, \infty)$. Es sei $a \in (-\infty, \infty)$ eine feste Zahl. Es sei $b(x) \geqq 0$ für $x > a$ und $b(x) \leqq 0$ für $x < a$ und es sei $b(a + x) = -b(a - x)$, wobei $b(x) \equiv 0$ in keinem Intervalle gilt. Es sei $A(x) \leqq 0$ für $x \in (a, \infty)$ und es sei $A(a + x) = A(a - x)$. Es sei $b(x) - |A'(x)| \geqq 0$ für $x > a$ und $b(x) - |A'(x)| \geqq k > 0$ für $x > \alpha > a$. Es seien $A(x)$ und $b(x)$ solche, dass die Differentialgleichung* (a) *im (a, ∞) wenigstens eine oszillatorische Lösung habe. Dann oszilliert eine jede Lösung der Differentialgleichung* (a) *nach rechts und nach links von a ausser zwei Lösungen, von welchen eine nach links oszilliert und rechts keine Nullstellen hat und die andere oszilliert nach rechts und hat links keine Nullstellen.*

Beweis. Der Einfachheit wegen setzen wir $a = 0$. Aus der Voraussetzung, dass $A(x)$ gerade und $b(x)$ ungerade ist, folgt, dass wenn $y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (a) ist, dann auch $y(-x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (a) ist. Nach der Voraussetzung hat die Differentialgleichung (a) wenigstens eine Lösung, welche für $x > a$ oszilliert. Es existiert deshalb nach Satz 1 eine einzige Lösung $y_1(x)$ (bis auf die lineare Abhängigkeit) der Differentialgleichung (a) und zwar eine solche, dass $y_1(x) > 0$ für $x \geqq 0$, $y_1'(0) < 0$ ist.

Die Funktion $y_2(x) = y_1(-x)$ ist auch eine Lösung der Differentialgleichung (a) der Eigenschaft $y_2(0) > 0$, $y_2'(0) > 0$ und deshalb oszilliert sie für $x > 0$ und darum oszilliert auch $y_1(x)$ für $x < 0$.

Die Lösungen $y_1(x)$, $y_2(x)$ sind unabhängig und mit der Eigenschaft, dass die erste nur nach links und die zweite nur nach rechts von Null oszilliert. Jede weitere Lösung der Differentialgleichung (a) muss nach rechts und auch nach links von Null oszillieren, weil sie sonst von $y_1(x)$ oder von $y_2(x)$ abhängig wäre.

Literatur

[1] *M. Švec:* Sur une propriété des integrales de l'équation $y^{(n)} + Q(x)\,y = 0$, $n = 3, 4$ Czechoslovak math. Journal, T. *7* (*82*), 1957, 450—462.

[2] *M. Greguš:* O niektorých vlastnostiach riešení lineárnej diferenciálnej rovnice homogénnej tretieho rádu, Matematicko-fyzikálny časopis SAV, *2*, 1955, 73—85.

[3] *G. Sansone:* Studi sulle equazioni differenziali lineari omogenee di terzo ordine nel campo reale, Revista Matem. y Fisica Teorica, Serie A, Tucuman 1948, 195—253.

[4] *G. Mammana:* Decomposizione delle espressioni differenziali lineari omogenee in prodotti di fattori simbolici e aplicazioni relative allo studio delle equazioni differenziali lineari, Math. Zeitschr. *33*, 1931, 186—231.

[5] *G. Ascoli:* Sulla decomposizione degli operatori differenziali lineari e sopra alcune questioni geometriche che vi si connettono, Revista Matem. y Fisica teorica, Seria A, Tucuman 1940, 189—215.

[6] *M. Greguš:* O niektorých nových vlastnostiach riešení diferenciálnej rovnice $y''' + Q \cdot y' + Q' \cdot y = 0$, Spisy Přírodovedeckej fak. M. U., 365, Brno 1955, 1—18.

Резюме

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ $y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0\,, \quad A(x) \leqq 0$

МИХАЛ ГРЕГУШ (Michal Greguš), Братислава

В первой части работы доказывается, что для решений дифференциального уравнения

(a) $$y''' + 2A(x)\,y' + [A'(x) + b(x)]\,y = 0$$

($A(x) \leqq 0$ для $x \in (-\infty, \infty)$), коэффициенты которого удовлетворяют определенным условиям, имеет место утверждение:

Если по крайней мере одно решение дифференциального уравнения (a) имеет бесконечно много нулевых точек в $(-\infty, \infty)$, то все остальные решения дифференциального уравнения (a) имеют бесконечно много нулевых точек в $(-\infty, \infty)$, кроме одного решения y (с точностью до линейной зависимости), которое не имеет никакой нулевой точки в $(-\infty, \infty)$ и при этом $y \to 0$, $y' \to 0$, $y'' \to 0$ для $x \to \infty$.

Во второй части работы решен вопрос, при каких условиях каждое решение дифференциального уравнения (a) в случае $A(x) \leqq 0$ для $x \in (-\infty, \infty)$ имеет бесконечно много нулевых точек.