František Zítek

Fonctions aléatoires d'intervalle, II

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 3, 457–473

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100426

FONCTIONS ALÉATOIRES D'INTERVALLE, II

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 29 juillet 1959)

L'article forme la suite du travail [10] portant le même titre. Il est dédié à l'étude de certaines propriétés des fonctions aléatoires d'intervalle telles que la continuité, la continuité absolue et la dérivabilité, en particulier en connexion avec la théorie de l'intégrale-(BB).

1. INTRODUCTION

Dans tout cet article, le travail [10] est supposé connu. Aussi nous servons-nous de toutes les notions et notations courantes que nous y avons introduites. Nous nous bornons ici, pareillement comme en [10], aux fonctions aléatoires à accroissements indépendants. Les méthodes de notre étude seront aussi analogues à celles employées dans [10]. A côté des fonctions-ψ (secondes caractéristiques), nous nous servirons ici plus souvent aussi des fonctions caractéristiques elles-mêmes

$$\varphi(I, s) = \mathbf{E}\,[\exp\{is\,X(I)\}]\,. \tag{1.1}$$

Nous allons introduire encore quelques nouvelles notions. Nous appellerons *figure* en K tout système fini $\mathscr{F}$ d'intervalles disjoints $I_j \in \boldsymbol{K}$, K étant comme d'habitude l'intervalle fondamental donné contenu dans $R = (-\infty, \infty)$. Il est évident que toute partition de n'importe quel intervalle $J \in \boldsymbol{K}$ est une figure en K. La *norme* $\nu(\mathscr{F})$ d'une telle figure $\mathscr{F}$ sera alors définie comme $\nu(\mathscr{F}) = \max\limits_{\mathscr{F}} |I_j|$. Cette définition est consistente avec notre définition antérieure de la norme d'une partition. Nous écrirons $|\mathscr{F}|$ pour $\sum\limits_{\mathscr{F}} |I_j|$.

Nous dirons d'une fonction aléatoire d'intervalle $\boldsymbol{X}$ définie dans K qu'elle est *à variation finie* dans K, lorsque sa fonction-ψ vérifie

$$\overline{\int_K} |\psi(I, s)| < \infty \tag{1.2}$$

pour tout $s \in R$. Il est évident que la fonction $\boldsymbol{X}$ sera alors à variation finie dans n'importe quel intervalle $J \in \boldsymbol{K}$.

L'inégalité (1.2) peut avoir un sens déterminé même si $\psi(I, s)$ n'est pas défini dans tout le système $\boldsymbol{K} \times R$. D'une manière analogue à ce que nous avons rencontré déjà dans [10] il suffit, qu'il existe pour chaque $\sigma > 0$ un nombre positif δ tel que pour $I \in \boldsymbol{K}$, $|I| < \delta$, $\psi(I, s)$ soit défini au moins pour $|s| \leqq \sigma$.

2. FONCTIONS ALÉATOIRES CONTINUES

Le but de ce paragraphe est de donner pour le cas de l'intégrale-(BB) un théorème analogue au théorème 13 de [10] (cf. aussi la note[7]), p. 596 de [10]).

Theorème 1. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *une fonction aléatoire d'intervalle, définie et intégrable-*(BB) *dans* K, *soit* $\boldsymbol{Z}$ *son intégrale indéfinie. La fonction aléatoire* $\boldsymbol{Z}$ *est continue en* $\emptyset$ *si et seulement si* $\boldsymbol{X}$ *est continue en* $\emptyset$.

Démonstration. Soit $\{I_n\}$ une suite arbitraire d'intervalles $I_n \in \boldsymbol{K}$ telle que $|I_n| \to 0$. Pour tout n naturel soient I'_n et I''_n deux intervalles de $\boldsymbol{K}$ tels que a) I'_n est voisin de I_n, b) I_n est voisin de I''_n, c) $K = I'_n \cup I_n \cup I''_n$. Désignons par $\chi(s)$, $\chi_n(s)$, $\chi'_n(s)$, $\chi''_n(s)$ les fonctions caractéristiques des variables aléatoires $Z(K)$, $Z(I_n)$, $Z(I'_n)$, $Z(I''_n)$ et par $\varphi_n(s)$ celle de $X(I_n)$. Comme $\boldsymbol{X}$ est intégrable-(BB) dans K, on peut trouver pour tout $\sigma > 0$ et pour tout n naturel des partitions $\mathscr{D}'_n$ $\mathscr{D}''_n$ des intervalles I'_n et I''_n respectivement, telles que pour $|s| \leqq \sigma$ à la fois

$$(2.1) \qquad |\chi'_n(s) - \varphi'_n(s)| < \frac{1}{n}, \quad |\chi''_n(s) - \varphi''_n(s)| < \frac{1}{n},$$

où $\varphi'_n(s)$ et $\varphi''_n(s)$ sont les fonctions caractéristiques des sommes $S(\mathscr{D}'_n, I'_n, \boldsymbol{X})$ et $S(\mathscr{D}''_n, I''_n, \boldsymbol{X})$. Nous pouvons même supposer, sans restreindre la généralité, que $\nu(\mathscr{D}'_n) \leqq |I_n|$, $\nu(\mathscr{D}''_n) \leqq |I_n|$.

Supposons maintenant que $\boldsymbol{X}$ soit continu en $\emptyset$. Nous avons donc $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) = 1$ localement uniformément dans R. En même temps, nous avons aussi $\lim_{n\to\infty} \varphi'_n(s)\, \varphi_n(s)\, \varphi''_n(s) = \chi(s)$, la convergence étant également localement uniforme dans R. Il s'ensuit de là ainsi que de l'inégalité

$$(2.2) \qquad |\chi(s) - \varphi'_n(s)\, \varphi''_n(s)| \leqq |\chi(s) - \varphi'_n(s)\, \varphi_n(s)\, \varphi''_n(s)| + \\ + |\varphi'_n(s)\, \varphi''_n(s)| \,.\, |\varphi_n(s) - 1| \leqq |\chi(s) - \varphi'_n(s)\, \varphi_n(s)\, \varphi''_n(s)| + |\varphi_n(s) - 1|$$

que nous avons aussi $\lim_{n\to\infty} \varphi'_n(s)\, \varphi''_n(s) = \chi(s)$ localement uniformément. En vertu de (2.1) il en vient encore $\lim_{n\to\infty} \chi'_n(s)\, \chi''_n(s) = \chi(s)$. Or, la fonction aléatoire $\boldsymbol{Z}$ étant additive-B, nous avons $\chi'_n(s)\, \chi_n(s)\, \chi''_n(s) = \chi(s)$. La fonction $\chi(s)$ est continue et $\chi(0) = 1$, il existe donc un nombre positif s_0 tel que pour $|s| \leqq s_0$ nous avons $|\chi(s)| > \frac{1}{2}$. Il existe donc aussi n_0 naturel tel que pour $|s| \leqq s_0$, $n > n_0$ l'inégalité

$$(2.3) \qquad |\chi'_n(s)\, \chi''_n(s)| > \tfrac{1}{4}$$

a lieu. Soit ε positif, il existe alors n_1 tel que pour $|s| \leqq s_0$, $n > n_1$,

$$\varepsilon > |\chi_n'(s)\, \chi_n''(s) - \chi(s)| = |\chi_n'(s)\, \chi_n''(s)| \cdot |1 - \chi_n(s)|,$$

ce qui donne avec (2.3) l'inégalité $|\chi_n(s) - 1| < 4\varepsilon$ valable pour $|s| \leqq s_0$, $n > \max(n_0, n_1)$. Nous voyons donc que $\lim_{n\to\infty} \chi_n(s) = 1$ uniformément dans $-s_0 \leqq s \leqq s_0$. Il résulte de l'inégalité bien connue (cf. aussi [3], chap. I., § 11)

$$\mathrm{Re}\,[1 - \chi_n(2s)] \leqq 4\,\mathrm{Re}\,[1 - \chi_n(s)]$$

que l'on a $\lim_{n\to\infty} \chi_n(s) = 1$ localement uniformément dans R. La suite $\{I_n\}$ ayant été choisie arbitrairement, nous voyons que $\boldsymbol{Z}$ est bien continu en $\emptyset$.

Supposons maintenant par contre que $\boldsymbol{Z}$ soit continu en $\emptyset$, c'est-à-dire que $\lim_{n\to\infty} \chi_n(s) = 1$ localement uniformément. Il en résulte la convergence (localement uniforme) de $\chi_n'(s)\, \chi_n''(s)$ vers $\chi(s)$. De là et de (2.1), nous obtenons alors facilement $\lim_{n\to\infty} \varphi_n'(s)\, \varphi_n''(s) = \chi(s)$. De l'autre côté, en vertu de l'intégrabilité-(BB) de la fonction $\boldsymbol{X}$ nous avons aussi

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n'(s)\, \varphi_n(s)\, \varphi_n''(s) = \chi(s)\,.$$

Nous en déduisons, d'une manière analogue à celle de la première partie de notre démonstration, que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(s) = 1$ localement uniformément dans R. Or, cela signifie que $\boldsymbol{X}$ est continu en $\emptyset$, c. q. f. d.

Remarque 1. Lors de la démonstration de notre théorème 1, il serait possible d'exploiter, à part des fonctions caractéristiques, la notion de norme de Weierstrass (voir [1], §§ 8 et 9); certains passages de la démonstration seraient alors plus simples formellement (cf. aussi la note[7]) du travail [10], citée ci-dessus).

Remarque 2. De la démonstration de notre théorème 1, on peut tirer l'énoncé simple suivant:

Soient $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$, $\{Z_n\}$ trois suites de variables aléatoires. Supposons que pour tout n naturel X_n et Y_n soient stochastiquement indépendants et que $Z_n \sim X_n + Y_n$. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes ($X \in \mathfrak{X}^*$):

(a) $\qquad B \lim X_n \sim X\,, \quad B \lim Y_n \sim V\,\{0\}\,;$

(b) $\qquad B \lim X_n \sim X\,, \quad B \lim Z_n \sim X\,;$

(c) $\qquad B \lim Y_n \sim V\,\{0\}\,, \; B \lim Z_n \sim X\,.$

Remarque 3. Comme toute intégrale-(pB) est aussi une intégrale-(BB), le théorème 13 de [10], *ainsi que sa réciproque,* est une conséquence directe de notre théorème 1.

3. FONCTIONS ALÉATOIRES ASSOCIÉES

Si $\mathbf{X}$ est une fonction aléatoire d'intervalle définie dans K, nous appellerons *fonction associée* à $\mathbf{X}$ toute fonction aléatoire d'intervalle $\mathbf{X}^\circ$, dont la fonction-ψ $\psi^\circ(I, s)$ est donnée pour $I \in \boldsymbol{K}$, $s \in R$ par la relation

$$\psi^\circ(I, s) = \varphi(I, s) - 1 , \tag{3.1}$$

$\varphi(I, s)$ étant la fonction caractéristique de $\mathbf{X}$. Il résulte du théorème bien connu de B. de Finetti (cf. p. ex. [7]) que la fonction aléatoire $\mathbf{X}^\circ$ est toujours du type ID. Nous allons montrer que les fonctions associées ont bien des propriétés dont jouissent les fonctions originales.

Théorème 2. *Une fonction aléatoire* $\mathbf{X}$ *définie dans* K *est continue en* $\emptyset$ *si et seulement si sa fonction associée* $\mathbf{X}^\circ$ *est continue en* $\emptyset$.

Pour la démonstration de ce théorème, on peut exploiter les propriétés connues de la fonction $\log z$, soit encore e^z: la convergence $\psi(I_n, s) \to 0$, localement uniforme en $s \in R$, est en effet équivalente à la convergence (localement uniforme aussi) de $\varphi(I_n, s)$ vers 1. Mais on peut se servir aussi avec avantage des deux inégalités suivantes (3.2) et (3.3), qui nous seront d'ailleurs utiles encore plus tard à plusieurs reprises. En effet, on a

$$\begin{gathered}\varphi(I, s) - 1 = \exp[\psi(I, s)] - 1 = \\ = \exp[\operatorname{Re}\psi(I, s)]\{\exp[i \operatorname{Im}\psi(I, s)] - 1\} + \exp[\operatorname{Re}\psi(I, s)] - 1 .\end{gathered}$$

Or, nous savons bien que nous avons toujours $\operatorname{Re}\psi(I, s) \leqq 0$, donc d'une part $\exp[\operatorname{Re}\psi(I, s)] \leqq 1$, et d'autre part $\exp[\operatorname{Re}\psi(I, s)] - 1 = \operatorname{Re}\psi(I, s)\,.$ $.\exp[\vartheta \operatorname{Re}\psi(I, s)]$, $0 < \vartheta < 1$, donc

$$\begin{aligned}|\varphi(I, s) - 1| &\leqq |\exp[i \operatorname{Im}\psi(I, s)] - 1| + |\operatorname{Re}\psi(I, s)| \leqq \\ &\leqq |\operatorname{Im}\psi(I, s)| + |\operatorname{Re}\psi(I, s)| \leqq 2\,|\psi(I, s)| .\end{aligned} \tag{3.2}$$

Pour le cas particulier des fonctions continues en $\emptyset$ nous pouvons établir une inégalité de sens inverse. Soit $\sigma > 0$, pour $\delta > 0$ suffisamment petit nous aurons pour $|s| \leqq \sigma$ l'implication

$$|I| < \delta \Rightarrow |\varphi(I, s) - 1| < \frac{1}{2} ,$$

d'où il vient pour $|s| \leqq \sigma$ (cf. [12])

$$|\psi(I, s)| = |\log[1 + \varphi(I, s) - 1]| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}[\varphi(I, s) - 1]^k\right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}|\varphi(I, s) - 1|^k \leqq |\varphi(I, s) - 1|\left\{1 + |\varphi(I, s) - 1| \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi(I, s) - 1|^k\right\} \leqq$$

$$\leqq |\varphi(I, s) - 1|\left\{1 + \frac{1}{2}\,2\right\} ,$$

donc pour $|s| \leqq \sigma$, $|I| < \delta$ nous avons

$$|\psi(I, s)| \leqq 2\,|\varphi(I, s) - 1|\,. \tag{3.3}$$

Théorème 3. *Si une fonction aléatoire $\mathbf{X}$ est à variation finie dans K, sa fonction associée $\mathbf{X}^\circ$ l'est aussi. Si $\mathbf{X}^\circ$ est continue en $\emptyset$ et à variation finie dans K, $\mathbf{X}$ l'est aussi.*

Démonstration. Le théorème 3 découle immédiatement des inégalités (3.2), (3.3) et du théorème 2.

Remarque 4. Il n'est pas possible de supprimer dans l'énoncé précédent l'hypothèse de continuité en $\emptyset$ de $\mathbf{X}^\circ$, comme le montre l'exemple de la fonction $\mathbf{X}$ définie dans $K = \langle 0, 1)$ et telle que

$$\psi(I, s) = -\,|s|\,.\,|I| + is\,\frac{1}{|I|} \quad \text{pour} \quad \frac{1}{2} \in I \in \boldsymbol{K}\,,$$

$$\psi(I, s) = 0 \qquad\qquad \text{pour} \quad \frac{1}{2}\ \text{non} \in I \in \boldsymbol{K}\,.$$

On voit aisément que, dans ce cas-là, $\bar{\int\limits_K} |\psi(I, s)| = \infty$, tandis que $\bar{\int\limits_K} |\varphi(I, s) - 1| = 1$.

Théorème 4. *Une fonction aléatoire $\mathbf{X}$ est absolument continue dans K si et seulement si sa fonction associée $\mathbf{X}^\circ$ est absolument continue dans K.*

Pour la démonstration du théorème 4 nous nous servirons du lemme suivant représentant une version complétée du théorème 5 de [10].

Lemme 1. *Une fonction aléatoire $\mathbf{X}$ est absolument continue dans K si et seulement si sa fonction-ψ est absolument continue dans K, localement uniformément par rapport à $s \in R$.*

Démonstration du lemme. I. Supposons d'abord que $\mathbf{X}$ soit absolument continue. A chaque $\eta > 0$ on peut donc trouver $\delta > 0$ tel que pour toute figure $\mathscr{F}$ vérifiant $|\mathscr{F}| < \delta$ on a

$$\mathbf{P}\,\{\omega : |\sum_{\mathscr{F}} X(I_j)| \geqq \eta\} \leqq \eta\,. \tag{3.4}$$

La continuité en $\emptyset$ découle de l'absolue continuité, donc à chaque $\sigma > 0$ on peut trouver $\vartheta > 0$ tel que pour $I \in \boldsymbol{K}$, $|I| < \vartheta$, $|s| \leqq \sigma$ on a $\varphi(I, s) \neq 0$. Fixons maintenant $\sigma > 0$. Nous avons à démontrer qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un nombre positif δ tel que pour $|s| \leqq \sigma$ l'implication suivante soit valable pour toute figure $\mathscr{F}$:

$$|\mathscr{F}| < \delta \Rightarrow \sum_{\mathscr{F}} |\psi(I_j, s)| < \varepsilon\,. \tag{3.5}$$

La fonction caractéristique de $\sum\limits_{\mathscr{F}} X(I_j)$ est égale au produit $\prod\limits_{\mathscr{F}} \varphi(I_j, s)$. En vertu du lemme connu de [5], p. 52 sqq, il découle de (3.4) pour $|s| \leqq \sigma$, $|\mathscr{F}| < \delta$ l'inégalité

$$|\prod_{\mathscr{F}} \varphi(I_j, s) - 1| < \eta(\sigma + 2) . \tag{3.6}$$

Comme $\log \prod_{\mathscr{F}} \varphi(I_j, s) = \sum_{\mathscr{F}} \psi(I_j, s)$, il résulte de (3.6) et des propriétés connues de la fonction $\log z$ au voisinage du point $z = 1$ l'inégalité

$$\left|\sum_{\mathscr{F}} \psi(I_j, s)\right| < \frac{\eta(\sigma + 2)}{1 - \eta(\sigma + 2)} , \tag{3.7}$$

à condition, bien entendu, que $\eta < (\sigma + 2)^{-1}$. A partir de (3.7) nous obtenons ensuite

$$\sum_{\mathscr{F}} |\psi(I_j, s)| < \frac{3\eta(\sigma + 2)}{1 - \eta(\sigma + 2)} . \tag{3.8}$$

Il suffit donc, $\sigma > 0$ et $\varepsilon > 0$ étant donnés, de trouver $\delta > 0$ tel que $|\mathscr{F}| < \delta$ entraîne (3.4) où nous prenons

$$\eta = \min \left(\frac{1}{\sigma + 3} , \quad \frac{\varepsilon}{(\sigma + 2)(3 + \varepsilon)}\right) ;$$

alors (3.5) aura lieu pour $|s| \leqq \sigma$.

II. A présent, supposons par contre qu'à chaque $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$ on puisse trouver $\delta > 0$ tel que (3.5) ait lieu pour $|s| \leqq \sigma$. Alors, on aura aussi

$$\left|\prod_{\mathscr{F}} \varphi(I_j, s) - 1\right| < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon}$$

pourvu que $\varepsilon < 1$, ce qu'on peut toujours supposer. D'après la formule (11.5) du chapître I de [3] nous avons alors

$$\mathbf{P}\left\{\omega: \left|\sum_{\mathscr{F}} X(I_j)\right| \geqq \eta\right\} \leqq \frac{(\sigma + 2\pi\eta^{-1})^2}{\sigma^3} \int_0^\sigma \mathrm{Re}\left[1 - \prod_{\mathscr{F}} \varphi(I_j, s)\right] ds \leqq \tag{3.9}$$
$$\leqq \frac{(\sigma + 2\pi\eta^{-1})^2}{\sigma^2} \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} .$$

Il suffit donc, σ étant donné, de choisir $\delta > 0$ tel que (3.5) ait lieu, ε étant choisi de telle façon que l'on ait

$$\varepsilon < \frac{\sigma^2\eta^3}{\sigma^2\eta^3 + (\sigma\eta + 2\pi)^2} ,$$

alors $|\mathscr{F}| < \delta$ entraînera (3.4), c. q. f. d.

Nous revenons à présent à la démonstration du théorème 4, qu'il est maintenant déjà facile d'achever. L'implication (3.5) découle de l'absolue continuité de la fonction aléatoire $\mathbf{X}$; en vertu de (3.2) nous obtenons pour $|s| \leqq \sigma$ l'implication

$$|\mathscr{F}| < \delta \Rightarrow \sum_{\mathscr{F}} |\varphi(I, s) - 1| < 2\varepsilon ,$$

de sorte que $\psi^\circ(I, s)$ est également absolument continue, localement uniformément par rapport à $s \in R$. Donc, $\mathbf{X}^\circ$ est aussi absolument continu.

Si, par contre, c'est la fonction associée $\mathbf{X}^\circ$ qui est absolument continue dans K, elle est aussi continue en $\emptyset$ de sorte que (3.3) a lieu. A l'aide de cette inégalité, nous déduisons de la continuité absolue de $\psi^\circ(I, s)$ celle de $\psi(I, s)$, donc $\mathbf{X}$ est absolument continu c. q. f. d.

Théorème 5. *Si une fonction aléatoire $\mathbf{X}$ est absolument continue dans K, elle est à variation finie dans K.*

Démonstration. Notre théorème 5 est une conséquence directe de notre lemme 1 et du théorème 3.6 de [2], ou bien des théorèmes 9.1 et 6.3 de [9]. Il n'est d'ailleurs pas difficile non plus de construir une démonstration directe par une voie analogue à celle de la démonstration du théorème 3.6 de [2].

La démonstration des théorèmes donnés dans la suite nécessitera l'emploi du lemme de Bawly (voir [4], § 24, alinéa 94) dont nous allons nous donner ici une version modifiée, formulée en termes de fonctions aléatoires d'intervalle (cf. [10], p. 599).

Lemme 2 (de Bawly). *Soit $\mathbf{X}$ une fonction aléatoire d'intervalle définie dans K, soit*

$$\int_K |\varphi(I, s) - 1|^2 = 0 \tag{3.10}$$

localement uniformément par rapport à $s \in R$ (cf. [11]). Soit Z une variable aléatoire telle que sa fonction-ψ, $\psi_0(s)$, soit définie pour tout $s \in R$. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que

$$Z \sim (BB)\text{-}\int_K \mathbf{X} , \tag{3.11}$$

est que

$$Z \sim (BB)\text{-}\int_K \mathbf{X}^\circ . \tag{3.12}$$

La démonstration sera analogue à celle donnée dans [4], (cf. aussi la démonstration du théorème de la première partie du travail [12]). Soit $\{\mathscr{D}_n\}$ une suite arbitraire de partitions de l'intervalle K vérifiant $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$. Posons

$$R_n(s) = \sum_{\mathscr{D}_n} [\psi(I, s) - \varphi(I, s) + 1] . \tag{3.13}$$

Alors évidemment

$$|R_n(s)| \leqq \sum_{\mathscr{D}_n} |\log \varphi(I, s) - \varphi(I, s) + 1| .$$

La condition (3.10) implique qu'à chaque $\sigma > 0$ on peut trouver n_0 tel que pour $n > n_0$, $|s| \leqq \sigma$ on ait

$$\sum_{\mathscr{D}_n} |\varphi(I, s) - 1|^2 \leqq \tfrac{1}{4} ,$$

donc aussi $|\varphi(I, s) - 1| \leqq \frac{1}{2}$ pour $|s| \leqq \sigma$, $I \in \mathscr{D}_n$, $n > n_0$. Mais alors

$$|\log \varphi(I, s) + 1 - \varphi(I, s)| \leqq |\varphi(I, s) - 1|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |\varphi(I, s) - 1|^k \leqq 2\, |\varphi(I, s) - 1|^2 ,$$

de sorte que pour $|s| \leqq \sigma$, $n > n_0$

$$|R_n(s)| \leqq 2 \sum_{\mathscr{D}_n} |\varphi(I, s) - 1|^2 .$$

En vertu de la condition (3.10) nous avons donc localement uniformément en $s \in R$

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(s)| = 0 . \tag{3.14}$$

Supposons maintenant que (3.11) ait lieu, donc

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\mathscr{D}_n} \log \varphi(I, s) = \psi_0(s) ,$$

d'où il vient en vertu de (3.13) et (3.14)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\mathscr{D}_n} [\varphi(I, s - 1] = \psi_0 (s)$$

localement uniformément. Or la suite $\{\mathscr{D}_n\}$ a été choisie arbitrairement, donc (3.12) a lieu.

Pour établir (3.11) à partir de (3.12) on procède d'une manière tout à fait analogue.

Un complément logique de la démonstration précédente est l'énoncé suivant (cf. [11], théorème du § 4, cf. aussi [10], § 6).

Théorème 6. *Supposons que pour la fonction aléatoire d'intervalle* $\mathbf{X}$ *donnée l'intégrale* $(BB)\text{-}\int_K \mathbf{X} \sim Z$ *existe et que la fonction caractéristique de* Z *ne s'annule pas. Alors* $\mathbf{X}$ *est intégrable-*(BB) *dans* K.

La démonstration est identique à celle du théorème cité de [11], c'est pourquoi nous l'omettons ici.

Les deux théorèmes suivants sont des conséquences faciles du lemme de Bawly.

Théorème 7. *Soit* $\mathbf{X}$ *une fonction aléatoire d'intervalle définie dans* K, *continue en* $\emptyset$, *intégrable-*(BB) *et à variation finie dans* K. *Alors sa fonction associée* $\mathbf{X}^\circ$ *jouit des mêmes propriétés et pour* $J \in \boldsymbol{K}$ *nous avons*

$$(BB)\text{-}\int_J \mathbf{X} \sim (BB)\text{-}\int_J \mathbf{X}^\circ . \tag{3.15}$$

Démonstration. Le théorème découle de nos théorèmes 2 et 3, du lemme de Bawly et de l'inégalité

$$\sum_{\mathscr{D}} |\varphi(I, s) - 1|^2 \leqq \max_{\mathscr{D}} |\varphi(I, s) - 1| \,.\, \sum_{\mathscr{D}} |\varphi(I, s) - 1| \,. \tag{3.16}$$

L'hypothèse de non-nullité de la fonction caractéristique de l'intégrale-(BB) correspondante est vérifiée en vertu de notre théorème 1 et du théorème 3 de [10].

Théorème 8. *Soit* $\mathbf{X}$ *une fonction aléatoire absolument continue et intégrable-*(BB) *dans* K. *Alors* $\mathbf{X}^\circ$ *jouit des mêmes propriétés et* (3.15) *a lieu pour tout* $J \in \boldsymbol{K}$.

Démonstration. Le théorème 8 est conséquence de nos théorèmes 4, 5 et 7.

Remarque 5. *Les théorèmes* 7 *et* 8 *restent vrais si nous y substituons* $\mathbf{X}^\circ$ *à* $\mathbf{X}$ *et inversement.*

4. FONCTIONS ALÉATOIRES DÉRIVABLES

Soit $\mathbf{X}$ une fonction aléatoire d'intervalle définie dans K, soit $t \in K$. Nous dirons que $\mathbf{X}$ admet au point t une *dérivée* $\mathrm{D}X(t) \in \mathfrak{X}^*$, lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $|s| \leqq \sigma$ et pour tout intervalle $I = \langle t, t + h) \in \boldsymbol{K}$, $h < \delta$, l'inégalité

$$|\psi(I, s) - h\psi'(t, s)| < h\varepsilon \tag{4.1}$$

a lieu, $\psi'(t, s)$ étant la fonction-ψ de la variable aléatoire $\mathrm{D}X(t)$.

Théorème 9. *Si une fonction aléatoire* $\mathbf{X}$ *admet une dérivée au point* $t \in K$, *sa fonction associée* $\mathbf{X}^\circ$ *en admet une aussi et l'on a*

$$\mathrm{D}X(t) \sim \mathrm{D}X^\circ(t) \,. \tag{4.2}$$

Par contre, si $\mathrm{D}X^\circ(t)$ *existe,* $\mathrm{D}X(t)$ *existe aussi et* (4.2) *a lieu.*

Démonstration. I. Supposons d'abord que $\mathbf{X}$ admette une dérivée $\mathrm{D}(X(t)$ au point $t \in K$, alors (4.1) a lieu. Ecrivons $M(\sigma) = \max_{|s| \leqq \sigma} |\psi'(t, s)|$; $M(\sigma)$ existe et est fini, car $\psi'(t, s)$ est une fonction continue de s, elle est donc bornée dans $-\sigma \leqq s \leqq \sigma$. Pour $I = \langle t, t + h)$, $I \in \boldsymbol{K}$, $h < \delta$, $|s| \leqq \sigma$, nous avons l'inégalité

$$|\psi(I, s)| \leqq |\psi(I, s) - h\psi'(t, \sigma)| + h\,|\psi'(t, s)'| < \varepsilon h + hM(\sigma) = h[\varepsilon + M(\sigma)] \,, \tag{4.3}$$

de sorte que d'une façon évidente $\lim_{h \to 0+} \psi(I, s) = 0$ localement uniformément en $s \in R$. Il existe donc $\delta_1 > 0$ tel que pour $h < \delta_1$, $|s| \leqq \sigma$, on a $|\psi(I, s)| \leqq \frac{1}{2}$. Mais alors

$$|\psi^\circ(I, s) - \psi(I, s)| \leqq |\psi(I, s)|^2 \sum_{k=0}^{\infty} |\psi(I, s)|^k \leqq 2\, |\psi(I, s)|^2 < 2h^2 \,[\varepsilon + M(\sigma)]^2 ,$$

de sorte que l'on a

$$(4.4) \qquad |\psi^\circ(I, s) - h\psi'(t, s)| \leqq |\psi^\circ(I, s) - \psi(I, s)| + |\psi(I, s) - h\psi|(t, s)| < \\ < 2h^2\,[\varepsilon + M(\sigma)]^2 + \varepsilon h = h\,\{\varepsilon + 2h\,[\varepsilon + M(\sigma)]^2\} .$$

Si nous posons

$$\delta_0 = \min\,(\delta, \delta_1, \tfrac{1}{2}\,\varepsilon[\varepsilon + M(\sigma)]^{-2}) ,$$

nous aurons pour $I = \langle t, t + h) \in \boldsymbol{K}$, $h < \delta_0$, $|s| \leqq \sigma$ l'inégalité

$$|\psi^\circ(I, s) - h\psi'(t, s)| < 2h\varepsilon ,$$

donc en effet, $\mathbf{X}^\circ$ admet une dérivée en t et (4.2) a lieu.

II. Supposons maintenant au contraire que $\mathbf{X}^\circ$ admette une dérivée en t; soit $\psi'(t, s)$ la fonction-ψ correspondante. De même comme dans la première partie de la démonstration, nous établissons pour $|s| \leqq \sigma$, $h < \delta$, l'inégalité

$$|\varphi(I, s) - 1| \leqq h[\varepsilon + M(\sigma)] ,$$

d'où il vient de nouveau $\lim\limits_{h\to 0+} \psi(I, s) = 0$ localement uniformément par rapport à $s \in R$. Le reste de la démonstration est sans changement; pour $h < \delta_0$ nous obtenons de

$$|\psi^\circ(I, s) - h\psi'(t, s)| < h\varepsilon$$

et de (4.4) l'inégalité

$$|\psi(I, s) - h\psi'(t, s)| < 2h\varepsilon ,$$

valable pour $|s| \leqq \sigma$, $I = \langle t, t + h) \in \boldsymbol{K}$, $h < \delta_0$, de sorte que $\mathbf{X}$ admet effectivement une dérivée en t et que (4.2) a lieu, c. q. f. d.

Comme on a donc toujours

$$\psi'(t, s) = \lim_{h\to 0+} \frac{1}{h}\,[\varphi(\langle t, t + h), s) - 1] ,$$

nous voyons que la dérivée $\mathrm{D}X(t)$ — si elle existe — obéit toujours à une loi *indéfiniment divisible*. Donc aussi $|\psi'(t, s)| < \infty$ pour tout $s \in R$, ou bien encore $\varphi'(t, s) = \exp\,[\psi'(t, s)] \neq 0$ pour tout $s \in R$.

Nous dirons d'une fonction aléatoire $\mathbf{X}$ qu'elle est *dérivable* dans K si elle admet une dérivée en chaque $t \in K$ et qu'il existe à chaque $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ un nombre positif δ tel que pour chaque $t \in K$ l'inégalité (4.1) ait lieu pour $|s| \leqq \sigma$, $I = \langle t, t + h) \in \boldsymbol{K}$, $h < \delta$.

On voit aisément (cf. aussi la démonstration du théorème 9) que toute fonction dérivable est aussi continue en $\emptyset$. La seule existence de $\mathrm{D}X(t)$ en chaque $t \in K$ ne suffit pas pour garantir la continuité en $\emptyset$, comme le montre l'exemple de la fonction aléatoire définie dans $K = \langle 0, 1)$ et dont la fonction-ψ est de la forme

$$\psi(I, s) = \frac{a-b}{1-a}|s|, \quad I = \langle a, b) \in \boldsymbol{K}.$$

Theorème 10. *Soit* $\mathbf{X}$ *une fonction aléatoire dérivable dans* K *et supposons que nous ayons* $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$ *pour chaque* $t \in K$. *Alors* $\mathbf{X}$ *est intégrable-*(BB) *dans* K *et*

$$(BB)\text{-}\int_J \mathbf{X} \sim V\{0\} \tag{4.5}$$

a lieu pour tout $J \in \boldsymbol{K}$.

Démonstration. Il résulte de la définition de la dérivabilité et de la condition $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$ qu'on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$ un nombre positif δ tel que

$$\{I \in \boldsymbol{K},\ |I| < \delta,\ |s| \leqq \sigma\} \Rightarrow \{|\psi(I, s)| < \varepsilon\,|I|\}.$$

Mais alors pour n'importe quelle partition $\mathscr{D}$ de l'intervalle $J \in \boldsymbol{K}$ considéré, vérifiant $\nu(\mathscr{D}) < \delta$, on a pour $|s| \leqq \sigma$

$$|\sum_{\mathscr{D}} \psi(I_j, s)| \leqq \sum_{\mathscr{D}} |\psi(I_j, s)| < \varepsilon \sum_{\mathscr{D}} |I_j| = \varepsilon\,|J| \leqq \varepsilon\,|K|,$$

de sorte que, en effet, $\int_J \psi(I, s) = 0$ localement uniformément par rapport à $s \in R$, donc (4.5) a lieu, c. q. f. d.

L'exemple de la fonction ayant dans $K = \langle 0, 1)$ la fonction-ψ

$$\psi(I, s) = -\,|s|\,\frac{(b-a)^2}{(1-a)^2}, \quad I = \langle a, b) \in \boldsymbol{K},$$

montre qu'il n'est pas possible d'écarter du théorème 10 la condition de dérivabilité: dans le cas de cette fonction-là on a $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$ pour chaque $t \in K$, mais (4.5) n'est pas vérifié.

Théorème 11. *Soient* $\mathbf{X}$ *et* $\mathbf{Z}$ *deux fonctions aléatoires d'intervalle, les deux dérivables dans* K. *Supposons que* $\mathbf{Z}$ *soit intégrable-*(BB) *dans* K *et que pour chaque* $t \in K$ *nous ayons* $\mathrm{D}X(t) \sim \mathrm{D}Z(t)$. *Alors* $\mathbf{X}$ *est aussi intégrable-*(BB) *dans* K *et*

$$(BB)\text{-}\int_J \mathbf{X} \sim (BB)\text{-}\int_J \mathbf{Z} \tag{4.6}$$

a lieu pour tout $J \in \boldsymbol{K}$.

Démonstration. Il résulte de l'hypothèse de dérivabilité des fonctions aléatoires $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Z}$ et de l'équivalence $\mathrm{D}X(t) \sim \mathrm{D}Z(t)$ que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, il est possible de trouver $\delta > 0$ tel que pour $|s| \leqq \sigma$, $I \in \boldsymbol{K}$, $|I| < \delta$, on ait

$$|\psi_X(I, s) - \psi_Z(I, s)| < \varepsilon\,|I|.$$

Il en vient pour une partition quelconque $\mathscr{D}$ de l'intervalle $J \in \boldsymbol{K}$ en question l'inégalité

$$|\sum_{\mathscr{D}} \psi_Z(I, s) - \sum_{\mathscr{D}} \psi_X(I, s)| \leqq \sum_{\mathscr{D}} |\psi_X(I, s) - \psi_Z(I, s)| < \varepsilon \sum_{\mathscr{D}} |I| = \varepsilon\, |J| \leqq \varepsilon\, |K|$$

valable pour $|s| \leqq \sigma$, pourvu que $\nu(\mathscr{D}) < \delta$. Lorsque $\nu(\mathscr{D}) \to 0$, nous aurons alors

$$\lim \sum_{\mathscr{D}} \psi_X(I, s) = \lim \sum_{\mathscr{D}} \psi_Z(I, s) = \int_J \psi_Z(I, s)\ ,$$

la convergence étant localement uniforme par rapport à $s \in R$. Donc, l'intégrale-(BB) de $\boldsymbol{X}$ dans J existe et (4.6) a lieu, c. q. f. d.

Un cas particulier de la fonction $\boldsymbol{Z}$ du théorème précédent est celui d'une fonction dérivable et additive-B. Si nous savons donc d'une fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ donnée qu'elle est dérivable et que sa dérivée coïncide (au sens de $\sim$) avec celle d'une fonction aléatoire dérivable B-additive $\boldsymbol{Z}$, nous pouvons affirmer immédiatement que pour chaque $J \in \boldsymbol{K}$ nous avons

$$(BB)\text{-}\int_J \boldsymbol{X} \sim Z(J)\ .$$

Nous allons montrer encore qu'il est possible de formuler pour les fonctions aléatoires d'intervalle le théorème „presque"-réciproque du théorème 10 (cf. [9], théorème 15.1). Pour sa démonstration nous aurons besoin des trois lemmes suivants. Le premier d'entre eux est une analogie du théorème 5.1 de [9], qui sera d'ailleurs également exploité ici.

Lemme 3. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *une fonction aléatoire définie dans* K *et supposons que* (4.5) *ait lieu pour tout* $J \in \boldsymbol{K}$. *Alors à chaque* $\sigma > 0$, $\varepsilon > 0$ *on peut faire correspondre un nombre positif* δ *jouissant de la propriété suivante: si* $\mathscr{F}$ *est une figure en* K, $\nu(\mathscr{F}) < \delta$, *alors pour* $|s| \leqq \sigma$ *l'inégalité*

$$|\sum_{\mathscr{F}} \psi(I, s)| < \varepsilon \tag{4.7}$$

a lieu.

La démonstration de ce lemme sera faite par l'absurde. Supposons donc qu'il y ait $\varepsilon_0 > 0$, $\sigma_0 > 0$ tels que pour chaque $\delta > 0$ on puisse trouver une figure $\mathscr{F}$ de norme plus petite que δ et telle que pour un s_0 au moins (s_0 peut dépendre de $\mathscr{F}$), $|s_0| \leqq \sigma$, on ait

$$|\sum_{\mathscr{F}} \psi(I, s_0)| \geqq \varepsilon_0\ . \tag{4.8}$$

Or, ε_0 et σ_0 étant donnés, on peut trouver $\delta_0 > 0$ tel que pour toute partition $\mathscr{D}$ de l'intervalle K, de norme $\nu(\mathscr{D}) < \delta_0$ on ait

$$\left|\sum_{\mathscr{D}} \psi(I, s)\right| < \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{4.9}$$

pour $|s| \leqq \sigma$; cela résulte de (4.5). Prenons maintenant une figure $\mathscr{F}_0$ de norme $\nu(\mathscr{F}_0) < \delta_0$ et vérifiant (4.8). Soient J_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ les intervalles de $\boldsymbol{K}$

tels que $\mathscr{F} \cup \{J_k\}_{k=1}^{m}$ est une partition de l'intervalle K. Pour $k = 1, 2, \ldots, m$, soit ensuite $\mathscr{G}_k$ une partition de l'intervalle J_k telle que $\nu(\mathscr{G}_k) < \delta_0$, et que pour $|s| \leqq \sigma$

$$(4.10) \qquad |\sum_{\mathscr{G}_k} \psi(I, s)| < \frac{\varepsilon_0}{2m}$$

ait lieu pour $k = 1, 2, \ldots, m$; l'existence de telles partitions $\mathscr{G}_k$ découle de nouveau de (4.5) valable pour n'importe quel $J \in \boldsymbol{K}$. Or, le système $\mathscr{F}_0 \cup \bigcup_{k=1}^{m} \mathscr{G}_k = \mathscr{D}$ est une partition de l'intervalle K, vérifiant $\nu(\mathscr{D}) < \delta_0$, donc (4.9) a lieu. En combinant (4.9) et (4.10), nous obtenons pour s_0 l'inégalité

$$|\sum_{\mathscr{F}_0} \psi(I, s_0)| = |\sum_{\mathscr{D}} \psi(I, s_0) - \sum_{k=1}^{m} \sum_{\mathscr{G}_k} \psi(I, s_0)| \leqq$$

$$\leqq |\sum_{\mathscr{D}} \psi(I; s_0)| + \sum_{k=1}^{m} |\sum_{\mathscr{G}_k} \psi(I, s_0)| < \frac{\varepsilon_0}{2} + m \frac{\varepsilon_0}{2m} = \varepsilon ,$$

en contradiction avec (4.8). Notre lemme est par là démontré.

Remarque 6. Il est évidemment aussi facile de démontrer la proposition suivante un peu plus générale. Comme nous n'en aurons pas besoin, nous l'énonçons ici sans démonstration:

Si $\mathbf{X}$ *est une fonction aléatoire d'intervalle intégrable-*(*BB*) *dans* K, *alors pour chaque* $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute figure* $\mathscr{F}$ *en* K *de norme* $\nu(\mathscr{F}) < \delta$ *l'inégalité*

$$(4.11) \qquad |\sum_{\mathscr{F}} \psi(I, s) - \sum_{J \in \mathscr{F}} \int_J \psi(I, s)| < \varepsilon$$

a lieu pour $|s| \leqq \sigma$.

Lemme 4. *Soit* $\mathbf{X}$ *une fonction aléatoire d'intervalle définie dans* K. *Supposons que nous ayons* (4.5) *pour tout* $J \in \boldsymbol{K}$. *Alors pour tout* $J \in \boldsymbol{K}$ *nous avons*

$$(4.12) \qquad \int_J |\psi(I, s)| \leqq \int_K |\psi(I, s| = 0 ,$$

donc, la fonction $\mathbf{X}$ *est absolument continue dans* K.

Démonstration. L'inégalité figurant dans (4.12) étant une conséquence immédiate de ce que l'intégrand est non-négatif, il suffit de montrer qu'à chaque $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, on peut associer $\delta > 0$ tel que pour toute partition $\mathscr{D}$ de l'intervalle K, de norme $\nu(\mathscr{D}) < \delta$, on ait pour $|s| \leqq \sigma$ l'inégalité

$$(4.13) \qquad \sum_{\mathscr{D}} |\psi(I, s)| < \varepsilon .$$

Or, en vertu du lemme 3 précédent nous pouvons trouver pour ε, σ donnés, un nombre positif δ tel que pour toute figure $\mathscr{F}$ en K de norme $\nu(\mathscr{F}) < \delta$ nous ayons pour $|s| \leqq \sigma$ l'inégalité

$$(4.14) \qquad |\sum_{\mathscr{F}} \psi(I, s)| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Considérons une partition $\mathscr{D}$ quelconque, de norme $\nu(\mathscr{D}) < \delta$, et un nombre fixe s_0, $|s_0| \leqq \sigma$. Ecrivons

$$\mathscr{D}^+ = \{I : I \in \mathscr{D} , \quad \operatorname{Im} \psi(I, s_0) \geqq 0\}$$

et

$$\mathscr{D}^- = \{I : I \in \mathscr{D} , \quad \operatorname{Im} \psi(I, s_0) < 0\} .$$

Nous avons alors $\nu(\mathscr{D}^+) < \delta$, $\nu(\mathscr{D}^-) < \delta$, donc d'après (4.14) l'inégalité

$$\sum_{\mathscr{D}} |\psi(I, s_0)| \leqq \sum_{\mathscr{D}} |\operatorname{Re} \psi(I, s_0)| + \sum_{\mathscr{D}} |\operatorname{Im} \psi(I, s_0)| \leqq - \operatorname{Re} \sum_{\mathscr{D}} \psi(I, s_0) +$$

$$+ \operatorname{Im} \sum_{\mathscr{D}^+} \psi(I, s_0) - \operatorname{Im} \sum_{\mathscr{D}^-} \psi(I, s_0) \leqq |\sum_{\mathscr{D}} \psi(I, s_0)| + |\sum_{\mathscr{D}^+} \psi(I, s_0)| + |\sum_{\mathscr{D}^-} \psi(I, s_0)| < \varepsilon .$$

Or, s_0 a été choisi arbitrairement dans $\langle - \sigma, \sigma \rangle$, l'inégalité (4.13) est donc valable pour tout s, $|s| \leqq \sigma$. Pour établir la continuité absolue de la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ nous appliquons notre lemme 1 et puis nous procédons en remplaçant dans (4.13) la partition $\mathscr{D}$ par une figure en K (voir le passage de l'inégalité (3.7) à l'inégalité (3·8)), ou bien encore nous appliquons directement la première partie de notre lemme 4 et le théorème 5.1 de [9] à la fonction $|\psi(I, s)|$. Il est évident que $|\mathscr{F}| < \delta$ entraîne $\nu(\mathscr{F}) < \delta$.

Lemme 5. *Supposons que nous ayons une fonction aléatoire d'intervalle* $\mathbf{X}$ *et que* (4.5) *soit valable pour tout* $J \in \boldsymbol{K}$. *Alors pour chaque* $\sigma > 0$ *nous avons*

$$(4.15) \qquad \int_{\boldsymbol{K}} \sup_{|s| \leqq \sigma} |\varphi(I, s) - 1| = 0 .$$

Démonstration. En vertu de notre lemme 4 la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ vérifiant (4.5) pour chaque $J \in \boldsymbol{K}$ est absolument continue, donc aussi continue en $\emptyset$. On peut donc appliquer le théorème 15 du travail [10]. Soient f_j, $j = 1, 2, 3, 4$, les fonctions définies pour notre $\mathbf{X}$ par les formules (5.2) de [10]. D'après le théorème 15 cité nous avons pour $J \in \boldsymbol{K}$, $\tau > 0$, d'une part

$$(4.16) \qquad \int_J f_1(I, - \tau) = 0 , \quad \int_J f_2(I, \tau) = 0 , \quad \int_J f_3(I, \tau) = 0 ,$$

et d'autre part

$$(4.17) \qquad \lim_{\tau \to 0+} \overline{\int_J} f_4(I, \tau) = 0 .$$

Il est facile de montrer (cf. notre lemme 4) que l'on a aussi

$$(4.18) \qquad \int_J f_3^2 (I, \tau) = 0$$

pour $J \in \boldsymbol{K}$, $\tau > 0$. Or, pour $\tau > 0$ nous avons

$$\varphi(I, s) - 1 = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{isx} - 1) \, \mathrm{d}_x f_1(I, x) =$$

$$= \int_{|x| \geqq \tau} (e^{isx} - 1) \, \mathrm{d}_x f_1(I, x) + \int_{|x| < \tau} isx \, \mathrm{d}_x f_1(I, x) + \int_{|x| < \tau} (e^{isx} - 1 - isx) \, \mathrm{d}_x f_1(I, x) .$$

En y appliquant les inégalités classiques (voir p. ex. [4] alinéa 87) nous obtenons l'inégalité suivante valable pour tout $\tau > 0$:

$$\sup_{|s| \leqq \sigma} |\varphi(I, s) - 1| \leqq$$

$$\leqq 2 [- f_2(I, \tau) - f_1(I, -\tau)] + \sigma f_3(I, \tau) + \frac{\sigma^2}{2} [f_4(I, \varepsilon) + f_3^2(I, \tau)] .$$

Par application des relations (4.16) et (4.18) il en vient

$$0 \leqq \overline{\int_J} \sup_{|s| \leqq \sigma} |\varphi(I, s) - 1| \leqq \frac{\sigma^2}{2} \overline{\int_J} f_4(I, \tau) ,$$

d'où nous obtenons par le passage à la limite pour $\tau \to 0+$ l'égalité (4.15), c. q. f. d.

A présent nous pouvons déjà énoncer la proposition promise:

Théorème 12. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *une fonction aléatoire d'intervalle définie et intégrable-(BB) dans* K. *Supposons que* (4.5) *ait lieu pour tout* $J \in \boldsymbol{K}$. *Alors* $\boldsymbol{X}$ *admet une dérivée* $\mathrm{D}X(t)$ *presque partout dans* K *et l'on y a* $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$.

La démonstration de notre théorème 12 repose — pareille à la démonstration du théorème analogue pour les fonctions d'intervalle non-aléatoires (cf. [9], [6]) — sur le théorème de recouvrement de Vitali. Soit $\sigma > 0$, posons, pour simplifier l'écriture,

$$g(I) = \sup_{|s| \leqq \sigma} |\varphi(I, s) - 1|$$

Pour $n = 1, 2, \ldots$ écrivons

$$E_n = \left\{ t : t \in K \,,\ \limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h}\, g(\langle t, t + h)) > \frac{1}{n} \right\}$$

et

$$A_n = \left\{ I : I \in \boldsymbol{K} ,\quad g(I) > \frac{1}{n} |I| \right\} .$$

Supposons que l'ensemble E_n soit de mesure extérieure de Lebesgue positive: $\mu(E_n) > 0$. Pour n, σ donnés il existe alors, en vertu de notre lemme 5 et du théorème 5.1 de [9] un nombre positif δ tel que pour toute figure $\mathscr{F}$ en K de norme $\nu(\mathscr{F}) < \delta$ on a

$$\sum_{\mathscr{F}} g(I) < \frac{\mu(E_n)}{2n} \tag{4.19}$$

Or, le système A_n recouvre l'ensemble E_n au sens de Vitali, il existe donc une figure $\mathscr{F} = \{I_j\}_{j=1}^{m}$, $I_j \in A_n$, $\nu(\mathscr{F}) < \delta$, telle que $|\mathscr{F}| > \frac{1}{2}\, \mu(E_n)$. Or, d'après la définition du système A_n nous avons pour cette même figure

$$\sum_{\mathscr{F}} g(I) > \frac{1}{n} |\mathscr{F}| > \frac{\mu(E_n)}{2n} ,$$

en contradiction avec (4.19), donc $\mu(E_n) = 0$ pour tout n naturel. On a donc aussi $\mu(E) = 0$ où $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Mais pour $t \in (K - E)$ on aura

$$\lim_{h \to 0+} \frac{1}{h} g(\langle t, t + h)) = \lim_{h \to 0+} \sup_{|s| \leqq \sigma} \frac{1}{h} |\varphi(\langle t, t + h), s) - 1| = 0,$$

donc en effet presque partout dans K — à savoir pour $t \in (K - E)$ au moins — $\mathrm{D}X^\circ(t)$ existe et $\mathrm{D}X^\circ(t) \sim V\{0\}$ a lieu. Il suffit maintenant d'une simple application de notre théorème 9 pour obtenir l'existence de $\mathrm{D}X(t)$ et la relation $\mathrm{D}X(t) \sim V\{0\}$, également pour $t \in (K - E)$, c'est-à-dire presque partout, c. q. f. d.

On peut s'attendre à ce qu'il soit possible d'énoncer pour les fonctions aléatoires d'intervalle encore d'autres propositions concernant les relations qui existent entre la dérivée et l'intégrale (cf. le théorème de la seconde partie de la communication [12]). Le théorème de Saks (voir [9], 15.2, soit encore [6], §§ 13 et 14) serait particulièrement intéressant. Il faudrait aussi étudier de plus près les relations existant entre la dérivée et l'intégrale-(pB) (cf. la remarque 3).

Littérature

[1] *H. Bergström:* On the limit theorems for convolutions of distribution functions, I and II.; Journal für die reine und angewandte Mathematik, *198* (1957), 121—142; 199 (1958), 1—22.

[2] *J. C. Burkill:* Functions of intervals; Proceedings London Math. Soc., Ser. II., *22* (1924), 275—310.

[3] *J. L. Doob:* Stochastic processes, New York 1953.

[4] *Б. И. Гливенко:* Курс теории вероятностей, Москва—Ленинград 1939.

[5] *B. W. Gniedenko, A. N. Kolmogorow:* Rozkłady graniczne sum zmiennych losowych niezależnych, Warszawa 1957.

[6] *S. Kempisty:* Fonctions d'intervalle non-additives; Actualités Scientifiques et Industrielles, 824, Paris 1939.

[7] *E. Lukacs:* Remarks concerning characteristic functions; Annals of Math. Statistics, *28* (1957), 717—723.

[8] *O. Onicescu, Gh. Mihoc, C. T. Ionescu-Tulcea:* Calculul probabilităţilor şi aplicaţii, Bucureşti 1956.

[9] *L. A. Ringenberg:* The theory of the Burkill integral; Duke Math. Journal, *15* (1948), 239—270.

[10] *F. Zítek:* Fonctions aléatoires d'intervalle; Czechoslovak Math. Journal, *8* (1958), 583—609.

[11] *F. Zítek:* Poznámka k teorii (BB)-integrálu; Časopis pro pěstování matematiky, *84* (1959), 83—89.

[12] *F. Zítek:* Sur certaines propriétés infinitésimales des fonctions aléatoires; Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes; Praha 1960, 837—843.

Резюме

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА, II

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

Статья является продолжением равноименной статьи [10], которая здесь предполагается известной. Исследуются некоторые дальнейшие свойства случайных функций интервала и их (BB)-интегралов, как непрерывность в $\emptyset$, абсолютная непрерывность и дифференцируемость. Главными результатами настоящей работы являются теорема 1 и теоремы 10 и 12 четвертого параграфа.

В теореме 1 доказано, что случайная функция непрерывна в $\emptyset$ тогда и только тогда, если ее неопределенный (BB)-интеграл непрерывен в $\emptyset$ (см. [10], теорема 13).

В третьем параграфе вводится понятие сопряженной функции $\mathbf{X}^\circ$: если $\varphi(I, s)$ — характеристическая функция случайной функции $\mathbf{X}$, то ψ-функция сопряженной функции $\mathbf{X}^\circ$ определена формулой (3.1). Указывается, что многие свойства функции $\mathbf{X}$, как например непрерывность в $\emptyset$, абсолютная непрерывность и (BB)-интегрируемость в комбинации с абсолютной непрерывностью, переносятся и на сопряженную функцию.

В четвертом параграфе вводится понятие производной $\mathrm{D}\, X(t)$ случайной функции $\mathbf{X}$ в точке t: ψ-функция $\psi'(t, s)$ случайной величины $\mathrm{D}\, X(t)$ должна удовлетворять (4.1) для $\varepsilon > 0$, $\sigma > 0$, $I = \langle t, t + h) \subset K$, $h < \delta = \delta(\varepsilon, \sigma)$ — — и понятие дифференцируемости в K случайной функции $\mathbf{X}$: $\mathbf{X}$ дифференцируема в K, если $\mathrm{D}\, X(t)$ существует для любого $t \in K$ и если δ может быть выбрано независимо от t. Теоремы этого параграфа являются аналогами известных теорем для неслучайных функций интервала (см. [9]). В теореме 10 доказано, что если случайная функция $\mathbf{X}$ дифференцируема в K и для всех $t \in K$ производная $\mathrm{D}\, X(t)$ равна нулю с вероятностью один, то $\mathbf{X}$ (BB)-интегрируема в K и ее (BB)-интегралы тоже равны нулю с вероятностью один. Теорема 12 является ,,почти''-обратной к теореме 10 (см. [9], теорема 15.1): Если $\mathbf{X}$—случайная функция, (BB)-интегрируемая в K и для любого интервала $J \subset K$ (BB)-интеграл от $\mathbf{X}$ в J равен нулю с вероятностью один, то для почти всех $t \in K$ существует производная $\mathrm{D}\, X(t)$ и она тоже равна нулю с вероятностью один.