Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Švec

# Quelques remarques au sujet de la théorie des surfaces réglées dans des espaces projectifs de dimension impaire

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 10 (1960), No. 2, 309–315

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100413`

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

# QUELQUES REMARQUES AU SUJET DE LA THÉORIE DES SURFACES RÉGLÉES DANS DES ESPACES PROJECTIFS DE DIMENSION IMPAIRE

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 10 juin 1959)

Lors de l'étude des surfaces réglées dans les espaces projectifs de dimension impaire $2n + 1$ un rôle important est joué par les formes quasiflécnodales $f_i(t)$ et par les invariants $j_i$, au nombre de $n$, introduits par M. E. ČECH [3]. Dans le cas de $S_3$, ils se réduisent à la forme flécnodale $f(t)$ et invariant $j$. En cherchant la solution du problème des déformations projectives du second ordre des surfaces réglées dans $S_3$ on voit que deux surfaces en déformation projective sont caractérisées par l'égalité de leurs formes flécnodales, les déformations d'une surface donnée dépendent alors d'une fonction $j$ d'une variable. Il est naturel de se poser la question de savoir quelle est la signification géométrique de l'égalité de toutes les formes quasiflécnodales de deux surfaces dans $S_{2n+1}$. Dans le présent travail, ce problème est résolu d'une façon encore plus générale et l'on établit la signification géométrique de l'égalité des formes $f_{q+1}, \ldots, f_{n-1}$ et des invariants $j_{p+1}, \ldots, j_{n-1}$ $(q \leqq p)$. On étudie en détail le cas $p = q = 0$.

**1.** Dans l'espace projectif $n$-dimensionnel $S_n$ soit donnée une courbe $\gamma$, $C = C(t)$ par l'équation

$$C^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} p_{n-i+1} C^{(i)} \quad \left(C^{(i)} = \frac{\mathrm{d}^i C}{\mathrm{d}t^i}\right). \tag{1}$$

Dans l'espace $\bar{S}_n$ soit donnée une autre courbe $\bar{\gamma}$, $\bar{C} = \bar{C}(t)$ par l'équation

$$\bar{C}^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n} \bar{p}_{n-i+1} \bar{C}^{(i)} ; \tag{2}$$

le deux courbes étant en correspondance $f$ donnée par le paramètre commun $t$. M. E. Čech a montré (v. [1] et [2]) que la correspondance $f : \gamma \to \bar{\gamma}$ peut être étendue en correspodance $F : S_n \to \bar{S}_n$ qui est enveloppe d'un système monoparamétrique d'homographies $K(t)$. Si les points *analytiques* $C(t)$, $\bar{C}(t)$ sont donnés, j'obtiens

$$K(t)\, C^i(t) = \bar{C}^{(i)}(t)\,, \quad i = 0, \ldots, n\,; \tag{3}$$

donc, $f$ étant donné, $F$ dépend du choix des facteurs scalaires des points $C$, $\bar{C}$. Pour un $t$ arbitraire $K(t)$ est l'homographie tangente de la correspondance $F$, existant entre les espaces $(n-1)$-osculateurs correspondants $S_{n-1}$, $\bar{S}_{n-1}$ des courbes $\gamma$, $\bar{\gamma}$. Pour chaque point $X \in S_{n-1}$ il existe une droite totalement $K(t)$-linéarisante

$$p(t) \equiv [X, E(t)] \quad \text{où} \quad E(t) = \sum_{i=0}^{n} (p_{n-i+1}(t) - \bar{p}_{n-i+1}(t))\, C^{(i)}(t) \,. \tag{4}$$

Je désigne par $K_0(t)$ les homographies $K(t)$ pour lesquelles $E(t)$ est situé dans l'hyperplan osculateur de la courbe $\gamma$, ce qui donne $p_1 = \bar{p}_1$, d'où j'obtiens:

*Si dans* (1) *et* (2) *je normalise* $C$, $\bar{C}$ *de façon à avoir* $p_1 = \bar{p}_1 = 0$, *alors les homographies* $K(t)$ (3) *sont déterminées sans ambiguïté par le fait qu'elles ont une enveloppe et que la droite totalement* $K(t)$*-linéarisante* $p(t)$ *est située dans l'hyperplan osculateur de la courbe.*

Pour le raisonnement de ci-dessus voir [4]; j'appellerai *homographie locale* de la correspondance $f: \gamma \to \bar{\gamma}$ l'homographie donnée par (3).

2. Soit donnée dans $S_{2n+1}$ une surface réglée $\pi$

$$x(u, v) = y(v) + uz(v) \,, \tag{5}$$

soient

$$y^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i z^{(i)} \,, \quad z^{(n+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} c_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} d_i z^{(i)} \tag{6}$$

les équations fondamentales, de sorte que l'on suppose la normalisation

$$(y, z, y', z', \ldots, y^{(n)}, z^{(n)}) = \pm 1 \,, \tag{7}$$

les courbes $x = y(v) + kz(v)$, $k = \text{const.}$, sont quasiasymptotiques et les formes fondamentales de Čech et les invariants (cf. [3] et [5]) deviennent $(i = 0, \ldots, n-1)$

$$f_i(t) = -\, b_i t_1^2 + (a_i - d_i)\, t_1 t_2 + c_i t_2^2 \,, \tag{8}$$

$$2j_i = a_i + d_i \,. \tag{9}$$

Soit donnée une autre surface $\bar{\pi}$ dans $\bar{S}_{2n+1}$

$$\bar{x}(u, v) = \bar{y}(v) + u\bar{z}(v) \,, \tag{10}$$

$\pi$ et $\bar{\pi}$ étant en correspondance quasiasymptotique en laquelle les droites génératrices se correspondent projectivement. Pour la surface $\bar{\pi}$ j'ai les équations $(\bar{6})$ — $(\bar{9})$ que j'obtiens à partir de (6) — (9) traçant une barre sur toutes les expressions (excepté $u$ et $v$).

Pour chaque $v = v_0$ il existe une homographie $K: \bar{S}_{2n+1} \to S_{2n+1}$ telle que les surfaces $K\bar{\pi}$ et $\pi$ ont en chaque point $(u, v_0)$ un contact analytique d'ordre $n$; la plus générale est

$$K\bar{y}^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j y^{(i-j)} \,, \quad K\bar{z}^{(i)} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \lambda_j z^{(i-j)} \,; \quad i = 0, \ldots, n \,. \tag{11}$$

J'appelle *droite K-linéarisante* au point $x(u, v)$ la droite $l = [x, \mathscr{L}]$ où

$$\mathscr{L} = \sum_{i=0}^{n-1} M_i y^{(i)} + \sum_{i=0}^{n-1} N_i z^{(i)} + M y^{(n)} + N z^{(n)} , \tag{12}$$

$$M_i = \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \bar{a}_{i+j} - \lambda_0 a_i - \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} +$$

$$+ u \left\{ \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \bar{c}_{i+j} - \lambda_0 c_i \right\} ,$$

$$N_i = \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \bar{b}_{i+j} - \lambda_0 b_i +$$

$$+ u \left\{ \sum_{j=0}^{n-i-1} \binom{i+j}{j} \lambda_j \bar{d}_{i+j} - \lambda_0 d_i - \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} \right\} ,$$

$$M = -(n+1)\lambda_1, \quad N = -(n+1)\lambda_1 u ; \quad \lambda_{n+1} \quad \text{quelconque} ;$$

sa signification géométrique est la suivante: Soit $\gamma$ une courbe sur $\pi$ passant par le point $x(u, v)$ et soit $\bar{\gamma}$ la courbe correspondante sur $\bar{\pi}$. La condition nécessaire et suffisante pour que $\gamma$ et $K\bar{\gamma}$ aient au point $x$ un contact analytique d'ordre $n + 1$ est que la droite $l$ soit indéterminée (c'est-à-dire $\mathscr{L} = (.)\, x$). Si $l$ est la tangente à la courbe $\gamma$ au point $x$, alors $\gamma$ et $K\bar{\gamma}$ ont en ce point un contact géométrique d'ordre $n + 1$. Si les cas précités ne se présentent pas, $l$ est le lieu géométrique des points $w \neq x$ pour lesquels on a: les projections des courbes $\gamma$ et $K\bar{\gamma}$ du point $w$ dans un hyperplan arbitraire passant par le point $x$ ont au point $x$ un contact analytique d'ordre $n + 1$. Pour cette proposition voir [6].

**3.** En s'appuyant sur les considérations du N° 1, on peut caractériser d'une manière géométrique *l'homographie locale*

$$K\bar{y}^{(i)} = y^{(i)} , \quad K\bar{z}^{(i)} = z^{(i)} , \quad i = 0, \ldots, n , \tag{14}$$

c'est-à-dire

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 , \tag{15}$$

parmi les homographies (11).

Je choisis sur $\pi$ arbitrairement deux courbes quasiasymptotiques, par exemple directement $y = y(v)$, $z = z(v)$ et je considère une valeur fixe du paramètre $v = v_0$. Je projette la courbe $y = y(v)$ de l'espace $\zeta = [z(v_0), z'(v_0), \ldots, z^{(n)}(v_0)]$ dans un sous-espace quelconque $S_n \subset S_{2n+1}$ en obtenant ainsi une courbe projectivement équivalente à $\eta = \eta(v) = [y(v), \zeta]$. Dans $\bar{S}_{2n+1}$ je procède d'une manière analogue avec les courbes $\bar{y} = \bar{y}(v)$ et $\bar{z} = \bar{z}(v)$. L'homographie (11) induit une homographie entre les étoiles des sous-espaces à axe $\zeta$ et $\bar{\zeta}$

respectivement qui induit à son tour une homographie $K'$ entre les sous-espaces $S_n$, $\overline{S}_n$. Maintenant, $K'$ est l'homographie locale de la correspondance $f' : \eta(v) \to \overline{\eta}(v)$ au point $v = v_0$ si et seulement si (15) a lieu.

Pour l'homographie locale (14) les équations (12) se réduisent à

$$(16) \qquad \begin{aligned} M_i &= \overline{a}_i - a_i + u(\overline{c}_i - c_i) - \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i}\,, \\ N_i &= \overline{b}_i - b_i + u\left(\overline{d}_i - d_i - \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i}\right), \\ M &= N = 0\,. \end{aligned}$$

Je dirai qu'*une correspondance $T : \pi \to \overline{\pi}$ est du type $T^\circ_{pq}$* $(-1 \leqq p \leqq q$, $0 \leqq q)$ si pour chaque valeur $v = v_0$ l'homographie locale $K$ jouit de la propriété que la droite $K$-linéarisante au point $(u, v_0)$ est située dans l'union linéaire de l'espace $p$-osculateur de la surface $\pi$ le long de la droite $[y(v_0), z(v_0)]$ avec l'espace $q$-osculateur de la courbe quasiasymptotique passant par le point $(u, v_0)$, c'est-à-dire dans l'espace déterminé par les points

$$y, z, y', z', \ldots, y^{(p)}, z^{(p)}, y^{(p+1)} + uz^{(p+1)}, \ldots, y^{(q)} + uz^{(q)}\,.$$

On peut évidemment se borner au cas de $p, q \leqq n - 1$. Pour la définition des correspondances du type $T_{pq}$ (dont $T^\circ_{pq}$ représente un cas particulier) voir [6] d'où l'on tire aussi:

*On a*

$$(17) \qquad \overline{f}_i(t) = f_i(t) \quad \text{pour} \quad i = n-1, n-2, \ldots, p+1$$

*et*

$$(18) \qquad \overline{j}_i = j_i + \binom{n+1}{i} \lambda_{n+1-i} \quad \text{pour} \quad i = n-1, n-2, \ldots, q+1$$

*si et seulement si la correspondance $T : \pi \to \overline{\pi}$ est du type $T^\circ_{pq}$.* Comme je suppose $q \geqq 0$, j'ai $i \geqq q + 1 \geqq 1$ et je peux écrire (18) tout simplement comme

$$(19) \qquad \overline{j}_i = j_i \ \text{pour} \ i = n-1, n-2, \ldots, q+1\,.$$

Soit donnée une surface $\pi$, cherchons la généralité de ses transformations $\overline{\pi}$ du type $T^\circ_{pq}$. De la surface $\overline{\pi}$ je connais les formes $\overline{f}_{p+1}, \ldots, \overline{f}_{n-1}$ et les invariants $\overline{j}_{q+1}, \ldots, \overline{j}_{n-1}$ (égaux aux formes et invariants correspondants de la surface $\pi$), je peux donc choisir arbitrairement les formes et invariants $\overline{f}_0, \ldots, \overline{f}_p, \overline{j}_0, \ldots, \overline{j}_q$; le problème de la généralité se trouve donc réduit au problème de trouver le nombre d'invariants déterminant les formes $\overline{f}_0, \ldots, \overline{f}_p$ lorsque les formes $\overline{f}_{p+1}, \ldots, \overline{f}_{n-1}$ sont connues. Dans le cas général où le discriminant de la forme $f_{n-1}(t) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$ et celui de $f'_{n-1}(t) = A't_1 + 2B't_1t_2 + C't_2$ sont non-nuls, *les transformations $T^\circ_{pq}$ de la surface donnée $\pi$ dépendent de $3p + q + 4$ fonctions d'une variable*; voir [3] ou [5].

4. Je vais maintenant considérer en détail les correspondances $T$ du type $T^0_{00}$; dans ce cas la droite $K$-linéarisante $l = [x, \mathscr{L}]$ soit coïncide avec la droite génératrice $p$ de la surface, soit reste indéterminée. On a nécessairement

$$\bar{f}_i(t) = f_i(t), \bar{j}_i = j_i \text{ pour } i = 1, \ldots, n - 1 . \tag{20}$$

Dans ce qui suit, je suppose que l'on n'est pas dans le cas trivial d'égalité projective des surfaces $\pi$ et $\bar{\pi}$ où $\bar{f}_0(t) = f_0(t)$, $\bar{j}_0 = j_0$.

A partir de (16) on trouve aisément que la droite $K$-linéarisante au point $t_1y + t_2z$ est

$$[t_1y + t_2z, \quad T_1y + T_2z] \tag{21}$$

où $T_1$ et $T_2$ sont déterminés par les relations

$$\begin{aligned} \varrho T_1 &= (\bar{a}_0 - a_0)\, t_1 + (\bar{c}_0 - c_0)\, t_2 , \\ \varrho T_2 &= (\bar{b}_0 - b_0)\, t_1 + (\bar{d}_0 - d_0)\, t_2 \quad (\varrho \neq 0) . \end{aligned} \tag{22}$$

Le point $t_1y + t_2z$ sera appelé *principal* si la droite (21) en ce point est indéterminée. Il s'ensuit de ce qui précède que deux courbes $\gamma \subset \pi$ et $K\bar{\gamma}$ en correspondance, passant par le point principal y ont un contact analytique d'ordre $n + 1$.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'homographie

$$H(t_1y + t_2z) = T_1y + T_2z$$

soit identité est que

$$\bar{f}_0(t) = f_0(t) . \tag{23}$$

Mais alors chaque point de la droite $[y, z]$ est principal et les deux surfaces $\pi$ et $\bar{\pi}$ sont en déformation projective d'ordre $n + 1$. Le cas où $H$ est une involution est caractérisé par la relation

$$\bar{j}_0 = j_0 . \tag{24}$$

Pour compléter, il reste d'établir *la signification géométrique de l'homographie* $H$ (22). Soit $r = r(v)$ la quasiasymptotique passant par le point $t_1y(v_0) + t_2z(v_0)$ et soit $\bar{r} = \bar{r}(v)$ la quasiasymptotique correspondante dans $T : \pi \to \bar{\pi}$. On a (j'écris partout dans la suite $y_0^{(i)} = y^{(i)}(v_0)$, etc.)

$$r(v) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (v - v_0)^i\, (t_1y_0^{(i)} + t_2z_0^{(i)})$$

et d'une manière analogue pour $\bar{r}(v)$. Pour $K\bar{r}$ je reçois

$$K\bar{r}(v) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} (v - v_0)^i\, (t_1y_0^{(i)} + t_2z_0^{(i)}) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i!} (v - v_0)^i\, (t_1K\bar{y}_0^{(i)} + t_2K\bar{z}_0^{(i)}) .$$

Je fixe $t_1$ et $t_2$ et je construis la surface réglée $P(t_1, t_2)$ dont les droites génératrices joignent les paires de points correspondants (c'est-à-dire de même $v$) des courbes $r$ et $K\bar{r}$; je définis la droite génératrice passant par $t_1y_0 + t_2z_0$

comme $\lim\limits_{v \to v_0} [r, K\bar{r}]$. Si le point $t_1 y_0 + t_2 z_0$ n'est pas principal, $P(t_1, t_2)$ est déterminée par les courbes $r = r(v)$ et $s = s(v)$ où

$$\frac{1}{(n+1)!} s = \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i!} (v - v_0)^{i-n-1} [t_1(K\bar{y}_0^{(i)} - y_0^{(i)}) + t_2(K\bar{z}_0^{(i)} - z_0^{(i)})] ;$$

on a évidemment

$$r_0 = t_1 y_0 + t_2 z_0 , \quad r_0' = t_1 y_0' + t_2 z_0' ,$$

$$s_0 = T_1 y_0 + T_2 z_0 , \quad s_0' = \frac{1}{n+2} (T_1 y_0' + T_2 z_0') + (.)\, y_0 + (.)\, z_0$$

où $T_i$ sont déterminés (pour $\varrho = 1$) par (22). Le plan tangent à la surface $P(t_1, t_2)$ au point $U_1 r_0 + U_2 s_0$ est déterminé par les points

$$y_0, z_0, w_1 = U_1(t_1 y_0' + t_2 z_0') + \frac{1}{n+2} U_2(T_1 y_0' + T_2 z_0') ,$$

le plan tangent de la surface $\pi$ étant donné par

$$y_0, z_0, w_2 = U_1(t_1 y_0' + t_2 z_0') + U_2(T_1 y_0' + T_2 z_0') .$$

le point $t_1 y_0 + t_2 z_0$ n'étant pas principal, $w_1$ et $w_2$ sont linéairement dépendants seulements pour $U_1 U_2 = 0$ de sorte que les plans tangents aux surfaces $\pi$ et $P(t_1, t_2)$ ne coïncident qu'aux points $t_1 y_0 + t_2 z_0$, $T_1 y_0 + T_2 z_0$. Par là, l'homographie (22) est suffisamment décrite du point de vue géométrique.

*Bibliographie*


[1] *E. Čech:* Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces II, Čas. pěst. mat. a fys., *75* (1950), 123—136.

[2] *E. Čech:* Géometrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces, V (en russe), Чех. мат. ж. *2* (*77*) 1952, 167—188.

[3] *E. Čech:* Géométrie projective des surfaces réglées dans les espaces à un nombre quelconque de dimensions, Bull. int. de l'Acad. des Sci. des Bohême, 1924, 1—6.

[4] *M. Jůza:* Quelques homographies associées à une correspondance entre deux courbes (en russe), Чех. мат. ж. *9* (*83*) 1958, 563—572.

[5] *G. Fubini - E. Čech:* Geometria proiettiva differenziale, Bologna 1927; tomo *II*, § 112, 650—655.

[6] *A. Švec:* Sur la déformation projective des surfaces réglées, Чех. мат. ж. *5* (*80*) 1955, 355—361.

## Резюме

# К ТЕОРИИ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ НЕЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Пусть в пространстве $S_{2n+1}$ даны линейчатые поверхности $\pi$, $\bar{\pi}$ уравнениями (5), (6), соотв. аналогичными уравнениями ($\bar{5}$), ($\bar{6}$), и между ними соответствие $T$: $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v$. Далее геометрически охарактеризована $n$-соприкасающаяся коллинеация (14), благодаря которой для каждой пары соответствующих друг другу точек возникает тотально $K$-линеаризирующая прямая $l(u, v)$, свойства которой обобщают свойства $K$-линеаризирующих прямых соответствия между двумя пространствами (Эд. Чех). $T$ есть соответствие типа $T^{\circ}_{pq}$, если $l(u, v)$ лежит в линейном соединении $p$-соприкасающегося пространства поверхности $\pi$ вдоль прямой $p(v) \in \pi$ с $q$-соприкасающимся пространством квазиасимптотической кривой, проходящей через точку $(u, v)$; $T$ будет типа $T^{\circ}_{pq}$, если и только если $\bar{f}_i(t) = f_i(t)$ для $i = n - 1, n - 2, \ldots, p + 1$ и $\bar{j}_i = j_i$ для $i = n - 1, n - 2, \ldots, q + 1$; здесь $f_i(t)$ и $j_i$ означают формы и инварианты Э. Чеха (см. [4]). В случае $p = q = 0$ будут точки прямой $p(v)$, в которых $q(u, v)$ неопределенна, самосопряженными точками коллинеации $H(t_1 y + t_2 z) = T_1 y + T_2 z$, где $T_1$ и $T_2$ даны соотношениями (22); $H$ является тождеством для $\bar{f}_0(t) = f_0(t)$ и инволюцией для $\bar{j}_0 = j_0$. В заключение найдено геометрическое построение коллинеации $H$.