

Alois Švec

Généralisation d'une construction de M. B. Segre

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 2, 304–308

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100412>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1960

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

GÉNÉRALISATION D'UNE CONSTRUCTION DE M. B. SEGRE

ALOIS ŠVEC, Praha
(Reçu le 4 juin 1959)

On étudie les correspondances existant entre des surfaces d' S_{2n} au réseau conjugué dont toutes les deux transformées de Laplace dégénèrent.

Dans mes travaux [2] et [3], j'ai trouvé de larges généralisations de la construction, donné par M. B. SEGRE [1], de tous les réseaux R dans S_3 dont toutes les deux transformées de Laplace sont dégénérées. J'ai montré, en effet, qu'une construction analogue conduit à toutes les surfaces $x = x(u, v)$ avec $x_{uv} = 0$, dans S_{2n+1} et admettant des déformations projectives du type C_{n+1} ainsi qu'à toutes les variétés $x = x(u_1, \dots, u_n)$ avec $\partial_{u_i u_j} x = 0$ dans S_{2n-1} admettant des déformations projectives du type C_2 . Dans ce qui suit j'étudie d'une façon détaillée les correspondances T entre des surfaces $x = x(u, v)$, $x_{uv} = 0$, dans S_{2n} et je montre que les surfaces admettant des transformations T d'un certain type particulier peuvent être obtenues à l'aide d'une construction généralisant d'une manière évidente celle donnée par M. B. Segre.

Une surface $x = x(u, v)$ au réseau conjugué, dont toutes les deux transformées de Laplace sont dégénérées et qui se trouve située dans l'espace projectif S_{2n} à $2n$ dimensions, sera donnée par les équations

$$(1) \quad x^{1,1} = 0, \quad x^{n+1,0} = ax + \sum_{i=1}^n b^{(i)} x^{i,0} + \sum_{i=1}^n c^{(i)} x^{0,i},$$

$$x^{0,n+1} = ax + \sum_{i=1}^n \beta^{(i)} x^{i,0} + \sum_{i=1}^n \gamma^{(i)} x^{0,i}$$

où j'écris

$$f^{i,j} = \frac{\partial^{i+j} f}{\partial u^i \partial v^j}.$$

Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$(3) \quad \begin{aligned} a_v + c^{(n)} a &= 0, & \alpha_u + \beta^{(n)} a &= 0, \\ b_v^{(i)} + c^{(n)} \beta^{(i)} &= 0, & \gamma_u^{(i)} + \beta^{(n)} c^{(i)} &= 0 & (i = 1, \dots, n), \\ c_v^{(1)} + a + c^{(n)} \gamma^{(1)} &= 0, & \beta_u^{(1)} + a + \beta^{(n)} b^{(1)} &= 0, \\ c_v^{(i)} + c^{(i-1)} + c^{(n)} \gamma^{(i)} &= 0, & \beta_v^{(i)} + \beta^{(i-1)} + \beta^{(n)} b^{(i)} &= 0 & (i = 2, \dots, n). \end{aligned}$$

La surface $\bar{x} = \bar{x}(u, v)$ de l'espace \bar{S}_{2n} qui est en déformation projective d'ordre n (c'est-à-dire en correspondance C_n) avec la surface (1) sera manifestement donnée par les équations ($\bar{1}$) que l'on obtient à partir de (1) en ajoutant la barre à toutes les expressions (sauf u et v); l'homographie n -oscultatoire générale sera alors

$$(4) \quad \begin{aligned} K\bar{x} &= x; \quad K\bar{x}^{i,0} = x^{i,0}, \quad K\bar{x}^{0,i} = x^{0,i} \quad (i = 1, \dots, n-1); \\ K\bar{x}^{n,0} &= x^{n,0} + \lambda x, \quad K\bar{x}^{0,n} = x^{0,n} + \mu x; \end{aligned}$$

voir [2]. Pour l'homographie (4) j'obtiens

$$(5) \quad \begin{aligned} K\bar{x} &= x, \quad Kd^i\bar{x} = d^i x \quad (i = 1, \dots, n-1), \\ Kd^n\bar{x} &= d^n x + (\lambda du^n + \mu dv^n) x, \\ Kd^{n+1}\bar{x} &= d^{n+1}x + (n+1)(\lambda du^n + \mu dv^n) dx + (\cdot) x + \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \varphi_i x^{i,0} + \sum_{i=1}^n \psi_i x^{0,i} \end{aligned}$$

où

$$(6) \quad \begin{aligned} \varphi_1 &= (b^{(1)} - \bar{b}^{(1)} + \overline{n+1} \lambda) du^{n+1} + (n+1) \mu du dv^n + (\beta^{(1)} - \bar{\beta}^{(1)}) dv^{n+1}, \\ \psi_1 &= (c^{(1)} - \bar{c}^{(1)}) du^{n+1} + (n+1) \lambda du^n dv + (\gamma^{(1)} - \bar{\gamma}^{(1)} + \overline{n+1} \mu) dv^{n+1}, \\ \varphi_i &= (b^{(i)} - \bar{b}^{(i)}) du^{n+1} + (\beta^{(i)} - \bar{\beta}^{(i)}) dv^{n+1}, \\ \psi_i &= (c^{(i)} - \bar{c}^{(i)}) du^{n+1} + (\gamma^{(i)} - \bar{\gamma}^{(i)}) dv^{n+1} \\ &\quad (i = 2, \dots, n). \end{aligned}$$

La transformation qui associe la droite $p = [x, \sum_{i=1}^n (\varphi_i x^{i,0} + \psi_i x^{0,i})]$ à la tangente $[x, dx]$ sera appelée *transformation K -linéarisante*; elle jouit des propriétés suivantes: Soit γ une courbe arbitraire située sur la surface (x) , passant par le point x et ayant $[x, dx]$ pour la tangente, soit $\bar{\gamma}$ la courbe correspondante située sur (\bar{x}) , alors

1) si la droite p est indéterminée (c'est-à-dire si $\varphi_i = \psi_i = 0$; $i = 1, \dots, n$), alors les courbes γ et $K\bar{\gamma}$ ont au point x un contact analytique d'ordre $n+1$;

2) si les deux droites $[x, dx]$ et p coïncident, (c'est-à-dire si $\varphi_i = \psi_i = 0$ pour $i = 2, \dots, n$ et $\varphi_1 dv - \psi_1 du = 0$), alors les courbes γ et $K\bar{\gamma}$ ont au point x un contact analytique d'ordre exactement n et un contact géométrique d'ordre $n+1$;

3) si ni le premier ni le second cas ne se présente, p sera le lieu géométrique des centres de projection tels que les projection des courbes γ et $K\bar{\gamma}$ dans un hyperplan arbitraire passant par x ont au point x un contact analytique d'ordre $n+1$ (mais les courbes γ et $K\bar{\gamma}$ elles-mêmes ont un contact analytique d'ordre exactement n).

Une transformation T entre deux surfaces (\bar{x}) et (x) sera dite *du type $C_n(x)$* si pour chaque couple de points correspondants x, \bar{x} il existe une homographie

n -osculatoire (4) pour laquelle les droites K -linéarisantes de toutes les tangentes sont situées dans l'espace α -osculatoire de la surface (x) au point x . La condition nécessaire et suffisante pour que T soit du type $C_{n(\alpha)}$ ($1 \leq \alpha \leq n$) est évidemment

$$(7) \quad l^{(i)} = \bar{l}^{(i)}, \beta^{(i)} = \bar{\beta}^{(i)}, c^{(i)} = \bar{c}^{(i)}, \gamma^{(i)} = \bar{\gamma}^{(i)} \quad (i = \alpha + 1, \dots, n).$$

Soit T une correspondance du type $C_{n(1)}$, alors les courbes $\varphi_1 dv - \psi_1 du = 0$ dont les tangentes déterminent les directions des courbes de contact élevé (voir ci-dessus, alinéa 2, des propriétés des transformations K -linéarisantes), seront

$$(8) \quad (c^{(1)} - \bar{c}^{(1)}) du^{n+2} - (l^{(1)} - \bar{l}^{(1)}) du^{n+1} dv + \\ + (\gamma^{(1)} - \bar{\gamma}^{(1)}) du dv^{n+1} - (\beta^{(1)} - \bar{\beta}^{(1)}) dv^{n+2} = 0.$$

Pour les correspondances T dont les courbes du réseaux conjugué sont caractéristiques on a

$$(9) \quad c^{(1)} = \bar{c}^{(1)}, \beta^{(1)} = \bar{\beta}^{(1)},$$

les courbes caractéristiques sont alors constituées par le réseau conjugué et par la n -couche

$$(10) \quad (b^{(1)} - \bar{b}^{(1)}) du^n - (\gamma^{(1)} - \bar{\gamma}^{(1)}) dv^n = 0$$

apolaire au réseau conjugué.

Je dirai que T est du type C^u (resp. C^v) si elle est du type $C_{n(1)}$, que les courbes du réseau conjugué soient caractéristiques et que la n -couche (10) se réduise à $du^n = 0$ (resp. $dv^n = 0$). Si deux surfaces (1) et $(\bar{1})$ sont en correspondance T du type C^u , j'obtiens

$$(11) \quad b^{(i)} = \bar{b}^{(i)} \quad \text{pour } i = 2, \dots, n; \\ \beta^{(i)} = \bar{\beta}^{(i)}, c^{(i)} = \bar{c}^{(i)}, \gamma^{(i)} = \bar{\gamma}^{(i)} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Si la surface (1) admet des surfaces qui soient avec elle en correspondance T du type C^u , il doit y avoir des fonctions $\bar{a}, \bar{\alpha}, \bar{b}^{(1)}$ pour lesquelles on n'a pas simultanément $\bar{a} = a, \bar{\alpha} = \alpha, \bar{b}^{(1)} = b^{(1)}$ et qui vérifient avec les fonctions $b^{(i)}$ ($i = 2, \dots, n$) et $\beta^{(i)}, c^{(i)}, \gamma^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$) les conditions d'intégrabilité (3). Or, il découle de (11), (3₃) et (3₃)

$$(12) \quad a = \bar{a},$$

donc on ne peut pas avoir simultanément $\bar{\alpha} = \alpha, \bar{b}^{(1)} = b^{(1)}$. Mais si $\bar{b}^{(1)} = b^{(1)}$, j'obtiendrais à partir de (3₇) et (3₇) l'égalité $\alpha = \bar{\alpha}$, ce qui est impossible. De (3_{7,1}) il vient

$$c^{(n)}\beta_n^{(1)} - a_v + c^{(n)}\beta^{(n)}l^{(1)} = 0,$$

si (1) admet des transformations du type C^u , on a nécessairement

$$(13) \quad c^{(n)}\beta^{(n)} = 0.$$

Supposons $c^{(n)} = 0$. De (3₂) il vient $b^{(1)} = U(u)$, $\bar{b}^{(1)} = \bar{U}(u)$; de (3₇), (3₇) j'obtiens

$$(14) \quad \bar{\alpha} - \alpha = \beta^{(n)}(U - \bar{U})$$

de sorte que les transformations du type C^u d'une surface donnée dépendent au plus d'une fonction d'une variable (à savoir de la fonction $\bar{U} = \bar{U}(u)$). Je vais étudier les surfaces qui admettent des transformations du type C^u de cette généralité maximum; de telles surfaces seront désignées par R^u (les surfaces R^v étant définies d'une manière analogue). De (3₅) et (3₅) il vient $\bar{\alpha}_u - \alpha_u = 0$, et j'obtiens ainsi à partir de (14)

$$(15) \quad (\beta^{(n)}U^*)_u = 0, \quad U^* = U - \bar{U},$$

pour une fonction arbitraire \bar{U} , donc aussi pour une fonction U^* arbitraire, ce qui donne

$$(16) \quad \beta^{(n)} = 0$$

pour toute surface R^u .

Une surface qui est R^u et R^v simultanément sera désignée par R^0 , j'ai alors

$$(17) \quad c^{(n)} = \beta^{(n)} = 0.$$

Il s'ensuit alors des conditions d'intégrabilité (3)

$$(18) \quad a = 0, \quad b^{(i)} = U_i, \quad c^{(i)} = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta^{(i)} = 0, \quad \gamma^{(i)} = V_i;$$

$$U_i = U_i(u), \quad V_i = V_i(v) \quad (i = 1, \dots, n)$$

et, par un nouveau choix des paramètres u et v , on peut rendre à l'équation (1) la forme suivante

$$(19) \quad x^{1,1} = 0, \quad x^{n+1,0} = \sum_{i=1}^{n-1} U_i x^{i,0} + x^{n,0}, \quad x^{0,n+1} = \sum_{i=1}^{n-1} V_i x^{0,i} + x^{0,n}.$$

Les courbes de chaque couche du réseaux conjugué de la surface (19) sont projectives mutuellement et chacune d'elles est située dans un sous-espace n -dimensionnel; chacune des transformées de Laplace est située dans un sous-espace à $n - 1$ dimensions. On trouve ensuite aisément que chaque surface (19) est R^0 et peut être obtenue par la construction suivante:

Supposons que nous ayons dans l'espace S_{2n} des espaces $S_0, S_n, S'_n, S_{n-1}, S'_{n-1}$ et deux courbes γ, γ' tels que $S_0 \notin S_{n-1} \subset S_n, S_0 \notin S'_{n-1} \subset S'_n, S_0 = S_n \cap S'_n, S_0 \in \gamma \subset S_n, S_0 \in \gamma' \subset S'_n$. Soit P un point arbitraire de la courbe γ' , $S_n^P = [P, S_{n-1}]$, $S_0^P = [S_0, P] \cap S'_{n-1}$ et soit γ_P la projection de la courbe γ dans S_n^P du point S_0^P . La surface R^0 est alors l'ensemble des courbes $\gamma_P, P \in \gamma'$.

Bibliographie

- [1] B. Segre: Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili ..., Mem. della Acc. Italia, Vol. II., No 3, 1931.
- [2] A. Švec: Les surfaces R dans les espaces projectifs de dimension impaire, Чех. мат. ж. 9 (84) 1959, 243—264.
- [3] A. Švec: Déformation projective des systèmes n -conjuguées dans S_{2n-1} dont toutes les transformations de Laplace dégénèrent, Чех. мат. ж. 9 (84) 1959, 440—444.

Резюме

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОГО ПОСТРОЕНИЯ Б. СЕГРЕ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

Поверхность $x = x(u, v)$ с $x_{uv} = 0$ в S_{2n} называется R^u , если она допускает преобразования $\bar{x} = \bar{x}(u, v)$, зависящие от одной функции одного переменного, K -линеаризирующие прямые (K есть n -соприкасающаяся коллинеация преобразования $x \rightarrow \bar{x}$) всех касательных лежат в касательной плоскости поверхности (x) и характеристические кривые выражаются уравнением $du^{n+1}dv = 0$. Поверхность будет R° , если она R^u и R^v ; построение поверхности R° в общем случае производится так:

Пусть в пространстве S_{2n} даны пространства $S_0, S_n, S'_n, S_{n-1}, S'_{n-1}$ и кривые γ, γ' , для которых $S_0 \text{ поп } \in S_{n-1} \subset S_n, S_0 \text{ поп } \in S'_{n-1} \subset S'_n, S_0 = S_n \cap S'_n, S_0 \in \gamma \subset S^n, S_0 \in \gamma' \subset S'_n$. Пусть $P \in \gamma', S_n^P = [P, S_{n-1}], S_0^P = [S_0, P] \cap S'_{n-1}$ и γ_P — проекция γ в S_n^P из точки S_0^P . Тогда поверхностью R° будет совокупность кривых $\gamma_P, P \in \gamma'$.

Значение этих результатов ясно обрисовывается только после сравнения с аналогичными результатами в [1], [2] и [3].