Ludvík Janoš

Вывод одного неравенства для первых собственных значений двух краевых задач

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 10 (1960), No. 1, 68–82

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100394

Чехословацкий математический журнал, т. 10 (85) 1960, Прага

ВЫВОД ОДНОГО НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПЕРВЫХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДВУХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

ЛЮДВИК ЯНОШ (Ludvík Janoš), Прага

(Поступило в редакцию 6/I 1959 г.)

Работа посвящена выводу простого соотношения между первыми собственными числами двух краевых задач, первая из которых представляет поперечные колебания балки, а вторая — струны.

Будем доказывать следующую теорему:

Теорема. *Пусть* $M(x)$ *и* $P(x)$ — *произвольные неубывающие функции на* $\langle 0, 1\rangle$, *пусть функция* $K(x, t)$ *определена соотношениями*

$$K(x, t) = \begin{cases} x(1-t) & \text{для} \quad 0 \leqq x \leqq t \leqq 1\,, \\ t(1-x) & \text{для} \quad 0 \leqq t \leqq x \leqq 1\,; \end{cases}$$

пусть, далее, α, β *означают соответственно наибольшие собственные числа системы однородных интегральных уравнений* (1) *и интегральных уравнений* (2) *и* (3):

$$\int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t) = \alpha z(x)\,, \tag{1}$$

$$\int_0^1 K(x, t)\, z(t)\, \mathrm{d}P(t) = \alpha y(x)\,;$$

$$\int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}M(t) = \beta\varphi(x)\,; \tag{2}$$

$$\int_0^1 K(x, t)\, \psi(t)\, \mathrm{d}P(t) = \gamma\psi(x)\,. \tag{3}$$

Тогда справедливо неравенство $\alpha^2 \leqq \beta\gamma$.

Прежде чем приступим к доказательству этой теоремы. введем некоторые обозначения и понятия, которыми будем в дальнейшем пользоваться.

Определение 1. Обозначим через $\mathfrak{S}_0$ множество всех классов M неубывающих функций m на интервале $\langle 0, 1\rangle$, причем две неубываюших функции m_1 и m_2 принадлежат одному классу тогда и только тогда, если $\int_0^1 \varphi\, \mathrm{d}m_1 =$

$= \int\limits_0 \varphi \, \mathrm{d}m_2$ для произвольной фукнции $\varphi \in C$ (C — это множество непрерывных на $\langle 0, 1\rangle$ функций).

Определенные таким образом классы являются, очевидно, неотрицательными мерами на $\langle 0, 1\rangle$. В множестве $\mathfrak{S}_0$ можем теперь ввести топологию, а именно ,,слабую сходимость'', следующим образом:

Определение 2. Если $M_i \in \mathfrak{S}_0$, $M \in \mathfrak{S}_0$, $i = 1, 2, \ldots$, то $\lim\limits_{i\to\infty} M_i = M$ тогда и только тогда, если $\lim\limits_{i\to\infty} \int\limits_0^1 \varphi \, \mathrm{d}M_i = \int\limits_0^1 \varphi \, \mathrm{d}M$ для любой функции $\varphi \in C$.

Если теперь введем в $\mathfrak{S}_0$ операции сложения и умножения на неотрицательное число обычным способом, то $\mathfrak{S}^0$ станет полумодулем. Нулевым элементом O полумодуля $\mathfrak{S}_0$ является такая мера, для которой $\int\limits_0^1 \varphi \, \mathrm{d}O = 0$ (φ — произвольная непрерывная функция из множества C).

Для любой меры $M \in \mathfrak{S}_0$ символ L_2^M будет означать линейное пространство функций инегрируемых с квадратом по мере M в смысле Лебега-Стильтьеса. L_2^M представляет собой полное гильбертово пространство со скалярным произведением, определенным соотношением

$$(\varphi_1 \cdot \varphi_2)_M = \int\limits_0^1 \varphi_1 \varphi_2 \, \mathrm{d}M \,, \quad \varphi, \varphi_2 \in L_2^M \,.$$

Максимальное собственное число α состемы (1) зависит от выбора M, $P \in \mathfrak{S}_0$ и является, следовательно, функционалом, определенным на $\mathfrak{S}_0 \times \times \mathfrak{S}_0$; так же и β является функционалом на $\mathfrak{S}_0$. Итак, мы будем иногда писать $\alpha(M, P)$; $\beta(M)$; M, $P \in \mathfrak{S}_0$. Очевидно, что $\gamma = \beta(P)$.

Доказательство основной теоремы проведем при помощи нескольких лемм. В качестве первой докажем экстремальный принцип для числа α.

Лемма 1. *Пусть $O \neq M$, $P \in \mathfrak{S}_0$; тогда*

$$\alpha = \sup_{y, z \in C} \frac{\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 K(x, t) \, y(x) \, z(t) \, \mathrm{d}M(x) \, \mathrm{d}P(t)}{\sqrt{\int\limits_0^1 y^2 \, \mathrm{d}M \int\limits_0^1 z^2 \, \mathrm{d}P}} \,,^1) \tag{4}$$

причем $y(x)$ и $z(x)$ пробегают, конечно, множество таких непрерывных функций, чтобы знаменатель был отличным от нуля.

Доказательство. Образуем декартово произведение пространств L_2^M и $L_2^P : L_2^M \times L_2^P$. Возникшее таким образом пространство будет опять-таки гильбертовым пространством, если на нем определим скалярное произведение следующим образом:

$$([\varphi_1, \psi_1] \cdot [\varphi_2, \psi_2]) = (\varphi_1 \varphi_2)_M + (\psi_1 \psi_2)_P = \int \varphi_1 \varphi_2 \, \mathrm{d}M + \int \psi_1 \psi_2 \, \mathrm{d}P \,,$$

[1]) Ради большей ясности будем иногда писать $\mathrm{d}M(x)$, $\mathrm{d}P(t)$ и т. под. вместо $\mathrm{d}M$, $\mathrm{d}P$.

где

$$[\varphi_1, \psi_1] \in L_2^M \times L_2^P , \quad [\varphi_2, \psi_2] \in L_2^M \times L_2^P .$$

Теперь определим на $L_2^M \times L_2^P$ оператор R, предписав

$$R[\varphi, \psi] = [\int_0^1 K(x, t)\, \psi(t)\, \mathrm{d}P(t) , \quad \int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}M(t)] .$$

Легко видеть, что оператор R отображает $L_2^M \times L_2^P$ в себя и что он вполне непрерывен (см С. Л. Соболев); это вытекает из непрерывности ядра $K(x, t)$. Теперь мы докажем, что оператор R является самосопряженным, т. е. что имеет место соотношение

$$([\varphi_1, \psi_1] \,.\, R[\varphi_2, \psi_2]) = ([\varphi_2, \psi_2] \,.\, R[\varphi_1, \psi_1])$$

для $[\varphi_1, \psi_1], [\varphi_2, \psi_2] \in L_2^M \times L_2^P$.

Вычислим, например, левую часть:

$$([\varphi_1, \psi_1] \,.\, R[\varphi_2, \psi_2]) = ([\varphi_1, \psi_1] \,.\, [\int_0^1 K(x, t)\, \psi_2(t)\, \mathrm{d}P(t) , \quad \int_0^1 K(x, t)\, \varphi_2(t)\, \mathrm{d}M(t)]) =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 K(x, t)\, \varphi_1(x)\, \psi_2(t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}P(t) + \int_0^1\int_0^1 K(x, t)\, \psi_1(x)\, \varphi_2(t)\, \mathrm{d}P(x)\, \mathrm{d}M(t).$$

Заменяя переменные во втором двойном интеграле и учитывая симметричность ядра, получим для левой части выражение

$$\int_0^1\int_0^1 K(x, t)[\varphi_1(x)\, \psi_2(t) + \varphi_2(x)\, \psi_1(t)]\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}P(x) .$$

Это выражение симметрично относительно замены индексов, откуда следует, что ему равна и правая часть; этим самосопряженность оператора доказана.

Опираясь на оператор R, можем систему (1) написать в виде

$$R[y, z] = \alpha[y, z] , \quad [y, z] \in L_2^M \times L_2^P .$$

Так как R является вполне непрерывным самосопряженным оператором, для числа α имеем следующее (см. С. Л. Соболев).

$$\alpha = \sup \frac{([\varphi, \psi]\, R[\varphi, \psi])}{([\varphi, \psi]\, [\varphi, \psi])} , \quad 0 \neq [\varphi, \psi] \in L_2^M \times L_2^P .$$

Если в выше приведенном выражении (при помощи которого мы доказали самосопряженность) положить $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, $\psi_1 = \psi_2 = \psi$, получим для числа α соотношение

$$\alpha = \sup \frac{2\int_0^1\int_0^1 K(x,t)\, \varphi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\int_0^1 \varphi^2 \mathrm{d}M + \int_0^1 \psi^2 \mathrm{d}P} , \tag{5}$$

причем правая часть действительно достигнет своего супремума для $\varphi = y$, $\psi = z$, где пара y, z есть решение задачи (1). Для любого $\varphi \neq \emptyset$ $\psi \neq \emptyset$, $[\varphi, \psi] \in L_2^M \times L_2^P$ справедливо неравенство

$$\alpha \geqq \frac{2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x, t)\, \varphi(x)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\int\limits_0^1 \varphi^2\, \mathrm{d}M + \int\limits_0^1 \psi^2\, \mathrm{d}P}\,.$$

Выберем теперь два произвольных числа $a > 0$, $b > 0$. Если в правую часть неравенства подставим $a\varphi(x)$ вместо $\varphi(x)$ и $b\psi(x)$ вместо $\psi(x)$, получим опять правильное неравенство, зависящее от двух параметров a, b:

$$\alpha \geqq \frac{2ab\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x, t)\, \varphi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}P(t)}{a^2\int\limits_0^1 \varphi^2\, \mathrm{d}M + b^2\int\limits_0^1 \psi^2\, \mathrm{d}P}\,.$$

При фиксированных φ, ψ достигнет правая часть своего максимума, если положить

$$a^2 = \int\limits_0^1 \psi^2\, \mathrm{d}P\,, \quad b^2 = \int\limits_0^1 \varphi^2\, \mathrm{d}M\,,$$

откуда получим уже экстремальный принцип

$$\alpha = \sup \frac{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x, t)\, \varphi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\sqrt{\int\limits_0^1 \varphi^2\, \mathrm{d}M \int\limits_0^1 \psi^2\, \mathrm{d}P}}\,,$$

где φ пробегает те функции $\varphi \in L_2^M$, для которых $\varphi \neq 0$; аналогично $\psi \in L_2^P$, $\psi \neq 0$.

Правая часть достигает своего максимума на паре функций $y(x)$ и $z(x)$, которая является решением системы (1). Потому что функция $K(x, t)$ непрерывна, непрерывны и функции $y(z)$ и $z(x)$, откуда вытекает соотношение (4); лемма 1 доказана.

Отметим еще, что в том случае, когда меры M и P были бы нулевыми, равнялся бы или $\int\limits_0^1 y^2\, \mathrm{d}M$ или $\int\limits_0^1 z^2\, \mathrm{d}P$ нулю для каждой непрерывной функции $y(x)$ или $z(x)$, и правая часть соотношения (4) не имела бы смысла. Но в таком случае $\alpha = 0$, как сразу видно по системе (1).

То обстоятельство, что мы вместо неубывающих функций на интервале $\langle 0, 1 \rangle$ рассматривали меры, представленные классами этих функций, оправдано тем, что — как непосредственно видно из уравнений (1), (2), и (3) — числа α, β, γ зависят только от меры, а не от функции, принадлежащей соответствующему классу.

Из системы (1) вытекает, что $\alpha(M, P) = 0$, если или M или P равно нулю. В случае, когда $M \neq 0$, $P \neq 0$, имеет правая часть соотношения (4) смысл, так для подходящих, функций можно знаменатель сделать различным от нуля. Нетрудно убедиться в том, что, за исключением одного тривиального случая, $\alpha(M, P) \neq 0$. Чтобы легче увбедиться в этом, введем еще одно важное понятие, которым воспользуемся в будущем. Каждому $M \in \mathfrak{S}_0$ поставим в соответствие определенное множество I_M действительных чисел на $\langle 0, 1\rangle$ по следующему правилу:

Определениа 3. $x \in I_M$ тогда и только тогда, если мера M не является нулевой ни на какой окрестности точки $x \in \langle 0,1\rangle$.

Припомним теперь, что ядро $K(x, t) > 0$ на $(x, t) \in (0, 1) \times (0, 1)$. Из этого легко вытекает, что $\alpha(M, P) = 0$ тогда и только тогда, если или $I_M \cap (0, 1) = 0$ или $I_P \cap (0, 1) = 0$.

По этой причине можем определить множество $\mathfrak{S}$ следующим образом:

Определение 4. $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 - \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — множество тех мер M, для которых $I_M \neq 0$, $I_M \cap (0, 1) = 0$. Теперь уже вытекает из системы (1) и из экстремального принципа (4), что для $M \in \mathfrak{S}$ и $P \in \mathfrak{S}$ будет $\alpha(M, P) = 0$ тогда и только тогда, если или $M = 0$ или $P = 0$. В дальнейшем будем работать только со множеством $\mathfrak{S}$.

Теперь мы докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть* M, $P \neq 0$; *тогда функции* $y(x)$, $z(x)$, *на которых достигает своего максимума правая часть соотношения* (4), *не меняют знака на интервале* $(0, 1)$ $y(x) \neq 0$, $z(x) \neq 0$, $x \in (0, 1)$.

Доказательство. Пара функций $y(x)$, $z(x)$, максимилизирующая правую часть соотношения (4), является решением системы (1). Исключив функцию $z(x)$ из этой системы, получим одно уравнение

$$\int_0^1 \Gamma(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t) = \lambda y(x)\,, \tag{6}$$

где

$$\lambda = \alpha^2\,, \quad \Gamma(x, t) = \int_0^1 K(x, s)\, K(t, s)\, \mathrm{d}P(s)\,.$$

Так как по предложению $P \neq 0$, то $\Gamma(x, t) > 0$ для $x, t \in (0, 1)$. Для числа λ справедливо тогда экстремальное соотношение

$$\lambda = \sup_{y \in C} \frac{\int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, t)\, y(x)\, y(t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}M(t)}{\int_0^1 y^2\, \mathrm{d}M}\,, \tag{7}$$

причем функции $y(x)$ должны быть опять такими, чтобы знаменатель не равнялся нулю.

Функция $y(x)$, максимилизирующая правую часть соотношения (7), удовлетворяет уравнению (6). Но ввиду того, что

$$\int_0^1 |y(x)|^2 \, \mathrm{d}M(x) = \int_0^1 y^2(x) \, \mathrm{d}M(x)$$

и

$$\int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, t)|y(x)||y(t)| \, \mathrm{d}M(x) \, \mathrm{d}M(t) \geqq \int_0^1\int_0^1 \Gamma(x, t) \, y(x) \, y(t) \, \mathrm{d}M(x) \, \mathrm{d}M(t) \, ,$$

то и функция $|y(x)|$ максимилизирует правую часть соотношения (7) и является, следовательно, решением уравнения

$$\int_0^1 \Gamma(x, t) \, |y(t)| \, \mathrm{d}M(t) = \lambda |y(x)| \, .$$

Если бы для некоторого $x \in (0, 1)$ было $|y(x)| = 0$, был бы и

$$\int_0^1 \Gamma(x, t)|y(t)| \, \mathrm{d}M(t) = 0 \, ,$$

что — ввиду предположения $M \neq 0$ и, следовательно, $I_M \neq 0$ — возможно только в том случае, когда $y(t) \equiv 0$ на $(0, 1)$; это, однако, невозможно, так как функция $y(x)$ не могла бы максимилизировать правую часть соотношения (7). Аналогично мы могли бы доказать, что ни функция $z(x)$ не может на интервале $(0, 1)$ достичь нуля; этим лемма 2 доказана.

Как следствие леммы 2 можем сформулировать лемму 3.

Лемма 3. *При условии* $M \neq 0$, $P \neq 0$ *число* α *является невырожденным собственным числом системы* (1), *и решение* $y(x)$, $z(x)$ *этой системы можно выбрать так, чтобы было*

$$\max \{\|y\|, \|z\|\} = 1 \, , \quad y(x) > 0 \, , \quad z(x) > 0 \, , \quad x \in (0, 1)$$

где символ $\|y\|$ *означает норму непрерывной функции в* C, *определенную следующим образом*:

$$\|y\| = \sup_{x \in \langle 0,1 \rangle} |y(x)| \, .$$

Доказательство. Доказывая лемму 1, мы ввели оператор R, при помощи которого система (1) переписалась в виде $R[y, z] = \alpha[y, z]$, причем $[y, z] \in L_2^M \times L_2^P$.

Если бы собственное число α было вырожденным, существовало бы подпространство размерности большей единицы пространства $L_2^M \times L_2^P$, элементы $[y, z]$ которого были бы решением приведенного выше уравнения и, следовательно, также системы (1). Но тогда можно было бы в этом подпространстве отыскать по крайней мере два ортогональных не равных нулю, элемента:

$$([y_1, z_1][y_2, z_2]) = \int_0^1 y_1 y_2 \, \mathrm{d}M + \int_0^1 z_1 z_2 \, \mathrm{d}P = 0 \, .$$

Однако, согласно лемме 2, это невозможно, потому что функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, $z_1(x)$, $z_2(x)$ не меняют на $(0, 1)$ знака и, ввиду того, что $K(x, t) > 0$, можем их для $x, t \in (0, 1)$ считать положительными на $(0, 1)$. Этим доказана первая часть нашего утверждения. Потому что можем считать $y(x) > 0$ и потому на интервале $(0, 1)$ будет автоматически и $z(x) > 0$, можем при помощи подходящего фактора достичь того, чтобы было $\max\{\|y\|, \|z\|\} = 1$, причем нормированное таким образом решение системы (1) единственно.

Теперь мы можем приступить к доказательству непрерывности функционала $\alpha(M, P)$ на $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ в смысле топологии, введенной на $\mathfrak{S}$.

Лемма 4. *Пусть* $\lim M_i = M$, $M_i, M \in \mathfrak{S}$; $\lim P_i = P$, $P_i, P \in \mathfrak{S}$; *тогда* $\lim \alpha(M_i, P_i) = \alpha(M, P)$.

Доказательство. Прежде всего докажем, что каждая пара M, P, в которой или $M = 0$ или $P = 0$ является точкой непрерывности функционала $\alpha(M, P)$. Итак, пусть $M = 0$, пусть P — произвольный элемент $\mathfrak{S}$ и пусть $\lim M_i = 0$, $\lim P_i = P$. Будем писать

$$\alpha(M_i, P_i) = \alpha_i\,; \quad \alpha(M, P) = \alpha\,.$$

В нашем случае $\alpha = 0$, и нам надо, следовательно, доказать, что $\lim \alpha_i = 0$. Если бы существовал индекс n так, что для всех $i \geqq n$ было бы $M_i = 0$, было бы также $\alpha_i = 0$ и, следовательно, также $\lim \alpha_i = 0$. Значит, остатется предположить, что такого индекса нет, и что, следовательно, существует избранная последовательность M_{k_i} так, что $M_{k_i} \neq 0$ для всех $i = 1, 2, 3, \dots$. Этого же можно было бы добиться и для последовательности P_i в том случае, когда было бы и $P = 0$. Итак, остается рассмотреть предел $\lim \alpha_{k_i}$, причем

$$\lim M_{k_i} = 0\,, \quad M_{k_i} \neq 0\,, \quad \lim P_{k_i} = P\,, \quad P_{k_i} \neq 0\,.$$

По лемме (1) имеем для каждого i

$$\alpha_{k_i} = \frac{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x, t)\, y_{k_i}(x)\, z_{k_i}(x)\, \mathrm{d}M_{k_i}(x)\, \mathrm{d}P_{k_i}(t)}{\sqrt{\int\limits_0^1 y_{ki}^2\, \mathrm{d}M_{ki} \int\limits_0^1 z_{ki}^2\, \mathrm{d}P_{ki}}}\,,$$

где $y_{k_i}(x)$, $z_{k_i}(x)$ служат решением системы (1) для M_{k_i}, P_{k_i}.

Читатель дроби можем ограничить сверху, используя неравенство Шварца:

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x, t)\, y_{ki}(x)\, z_{ki}(t)\, \mathrm{d}M_{ki}(x)\, \mathrm{d}P_{ki}(t) \leqq$$

$$\leqq \sqrt{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K^2(x, t)\, \mathrm{d}M_{ki}(x)\, \mathrm{d}P_{ki}(t) \int\limits_0^1\int\limits_0^1 y_{ki}^2(x)\, z_{ki}^2(x)\, \mathrm{d}M_{ki}(x)\, \mathrm{d}P_{ki}(t)}\,,$$

откуда получаем верхнюю оценку для α_{k_i}:

$$\alpha_{k_i} \leqq \sqrt{\int_0^1\int_0^1 K^2(x, t)\, \mathrm{d}M_{k_i}(x)\, \mathrm{d}P_{k_i}(t)}\,.$$

Но предел правой части равен нулю, следовательно, и $\lim \alpha_{ki} = 0$.

Итак, последовательность α_i имеет только одну точку сгущения, равную нулю, так что и ее предел равен нулю; этим доказано утверждение, что точка $0, P$ является точкой непрерывности функционала $\alpha(M, P)$; аналогичное утверждение, конечно, справедливо и для точки $M, 0$.

Останется доказать наше утверждение для случая, когда $M \neq 0$, $P \neq 0$.

Итак, чусть $\lim M_i = M \neq 0$, $\lim P_i = P \neq 0$. Дело заключается в доказательстве того, что $\lim \alpha_i = \alpha = \alpha(M, P)$. Прежде всего докажем, что последовательность α_i ограничена. Потому что $M \neq 0$, $P \neq 0$, будет и $M_i \neq 0$, $P_i \neq 0$ начиная с некоторого индекса n (для $i \geqq n$); используя лемму 1 и неравенство Шварца можем найти оценку, справедливую, собственно говоря, для какой угодно точки M, P:

$$\alpha_i \leqq \sqrt{\int_0^1\int_0^1 K^2(x, t)\, \mathrm{d}M_i(x)\, \mathrm{d}P_i(t)}\,.$$

Потому что правая часть сходится к числу $\sqrt{\int_0^1\int_0^1 K^2(x, t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}P(t)}$, вытекает из этого уже ограниченность последовательности α_i.

Выберем теперь произвольный индекс $i \geqq n$. Тогда по лемме 1 будет

$$\alpha_i = \sup_{y,z \in C} \frac{\int_0^1\int_0^1 K^2(x, t)\, y(x)\, z(t)\, \mathrm{d}M_i(x)\, \mathrm{d}P_i(t)}{\sqrt{\int_0^1 y^2\, \mathrm{d}M_i \int_0^1 z^2\, \mathrm{d}P_i}}\,.$$

Следовательно, для двух произвольных функций $y(x)$, $z(x)$, положительных на $(0, 1)$, справедливо неравенство

$$\alpha_i \geqq \frac{\int_0^1\int_0^1 K^2(x, t)\, y(x)\, z(t)\, \mathrm{d}M_i(x)\, \mathrm{d}P_i(t)}{\sqrt{\int_0^1 y^2\, \mathrm{d}M_i \int_0^1 z^2\, \mathrm{d}P_i}}\,.$$

В частности, это неравенство справедливо и для пары функций y, z, образующих решение системы (1) для M и P, откуда следует, что правая часть сходится к числу $\alpha(M, P) = \alpha$.

Ни одна из точек сгущения последовательности α_i не меньше α и каждая из них положительна, т. е.

$$\lim\inf \alpha_i \geqq \alpha(M, P) > 0\,,$$

потому что по предположению $M \neq 0$, $P \neq 0$.

Так как последовательность α_i, как мы показали, также сверху ограничена, то она имеет по крайней мере одну точку сгущения. Если бы точка $M, P \in \mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$ не была точкой непрерывности функционала $\alpha(M, P)$ можно бы было выбрать из последовательности α_i последовательность α_{ki}, которая сходилась бы к некоторому числу $\bar{\alpha}, \bar{\alpha} \neq \alpha$, и согласно приведенному выше соотношению должно было бы быть $\lim \alpha_{k_i} = \bar{\alpha} > \alpha$.

Но мы докажем, что такой случай наступить не может.

Возьмем пространство $C \times C$ и определим в нем норму следующим образом:

Для $[y, z] \in C \times C$ положим $\|[y, z]\| = \max\{\|y\|, \|z\|\}$. Для любых $N, S \in \mathfrak{S}$ определим затем оператор $R_{N,S}$, отображающий $C \times C$ в себя, так:

$$R_{N,S}[y, z] = [\int_0^1 K(x, t)\, z(t)\, \mathrm{d}S(t)\ ,\quad \int_0^1 K(z, t)\, y(t)\, \mathrm{d}N(t)]\ .$$

Оператор $R_{N,S}$ вполне непрерывен.

Через $\mathfrak{H}$ обозначим множество тех $[y, z] \in C \times C$, для которых $\|[y, z]\| = 1$, $y(x) > 0$, $z(x) > 0$, $x \in (0, 1)$. Согласно теореме о вполне непрерывных операторах будет множество $\mathfrak{K}_{N,S}$ определенное равенством $\mathfrak{K}_{N,S} = R_{N,S}(\mathfrak{H})$, компактным.

Для каждого i положим $\mathfrak{K}_i = \mathfrak{K}_{MiPi}$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_{M,P}$. Докажем теперь, что и множество $\mathfrak{L} = \mathfrak{K} \cup \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{K}_i$ компактно.

Введем еще два множества $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \subset C$, $\mathfrak{B} \subset C$, определенные следующим образом: $\mathfrak{A}$ — это множество функций вида

$$\int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}P_i\ ,\quad i = 1, 2, 3, \dots\ ,$$

где $\|\varphi\| \leqq 1$, $\varphi(x) > 0$, $x \in (0, 1)$; аналогично $\mathfrak{B}$ — это множество функций вида

$$\int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}M_i(t)\ ,\quad \|\varphi\| \leqq 1\ ,\quad \varphi(x) > 0\ ,\quad x \in (0, 1)\ .$$

Очевидно, что $\mathfrak{L} \subset \bar{\mathfrak{A}} \times \bar{\mathfrak{B}}$.

Покажем, что $\mathfrak{A}$ имеет компактное замыкание $\bar{\mathfrak{A}}$. Вытекает это из того (см. напр., С. Л. Соболев), что функции множества $\mathfrak{A}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны.

Равномерная ограниченность следует из оценки

$$\int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}P_i(t) \leqq \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} K(x, t)\, \varphi(t) \operatorname{Var} P_i \leqq \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} K(x, t) \int_0^1 \mathrm{d}P_i$$

так как $\|\varphi\| < 1$ и полное изменение неубывающей функции P_i равно $\int_0^1 \mathrm{d}P_i$. Но ввиду того, что $\lim P_i = P$, последовательность чисел $\int_0^1 \mathrm{d}P_i$

имеет предел $\int\limits_0^1 \mathrm{d}P$ и является, следовательно, ограниченной: $\int\limits_0^1 \mathrm{d}P_i \leqq L$.
Это доказывает равномерную ограничиенность, так как

$$\int\limits_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}P_i(t) \leqq \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} K(x, t)\, L \leqq L\,,$$

потому что $\max\limits_{x,t \in \langle 0,1 \rangle} K(x, t) \leqq 1$.

Аналогично докажем равностепенную непрерывность. Достаточно оценить разность

$$\left| \int\limits_0^1 [K(x_1, t) - K(x_2, t)]\, \varphi(t)\, \mathrm{d}P_i(t) \leqq \max_{t \in \langle 0,1 \rangle} |K(x_1, t) - K(x_2, t)]\, L.$$

Так как функция $K(x, t)$ непрерывна на $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, 1\rangle$, то она там равностепенно непрерывна; следовательно, разность $|K(x_1, t) - K(x_2, t)|$ можно сделать как угодно малой, если только разность $|x_1 - x_2|$ достаточно мала, независимо от $t \in \langle 0, 1\rangle$; из этого уже вытекает равностепенная непрерывность функций множества $\mathfrak{A}$. Значит, $\overline{\mathfrak{A}}$ компактно, и по той же причине и $\overline{\mathfrak{B}}$ компактно. Но отсюда следует, что также и $\mathfrak{L}$ компактно.

Предположим, что $\lim \alpha_i = \bar{\alpha} > \alpha$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots$ найдем нормированное решение системы (1) для M_i и P_i и обозначим его $[y_i, z_i]$. Очевидно, что $[y_i, z_i] \in \mathfrak{H}$. Потому что

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_0^1 K(x, t)\, y_i(t)\, \mathrm{d}M_i(t) &= \alpha_i z_i(x)\,, \\ \int\limits_0^1 K(x, t)\, z_i(t)\, \mathrm{d}P_i(t) &= \alpha_i y_i(x)\,, \end{aligned}\right\} i = 1, 2, \ldots,$$

то и $\alpha_i[y_i, z_i] \in \mathfrak{K}_i$ и, следовательно, $\alpha_i[y_i, z_i] \in \mathfrak{L}$, $i = 1, 2, \ldots$.

Так как $\mathfrak{L}$ компактно, существует избранная последовательность n_i так, что $\alpha_{n_i}[y_{n_i}, z_{n_i}]$ сходится к некоторой точке $[u, v] \in \mathfrak{L}$:

$$\lim \alpha_{n_i}[y_{n_i}, z_{n_i}] = [u, v]\,.$$

Норма $[u, v]$ есть положительное число, так как имеем

$$\|[u, v]\| = \lim \alpha_{n_i} \|[y_{n\,i}, z_{n_i}]\| = \lim \alpha_{ni} = \bar{\alpha} > 0\,.$$

Потому что функции $y_{n_i}(x), z_{n_i}(x)$ положительны на $(0, 1)$ и потому что $[u, v]$ имеет положительную норму, функции $u(x)$ и $v(x)$ будут неотрицательными на $\langle 0, 1\rangle$ и хотя бы одна из них будет для определенной точки $x \in (0, 1)$ положительной.

Напишем опять систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} \int\limits_0^1 K(x, t)\, y_{n_i}(t)\, \mathrm{d}M_{n_i}(t) &= \alpha_{n_i} z_{n_i}(x)\,, \\ \int\limits_0^1 K(x, t)\, z_{n_i}(t)\, \mathrm{d}P_{n_i}(t) &= \alpha_{n_i} y_{n_i}(x)\,, \end{aligned}\right\} i = 1, 2, 3, \ldots.$$

Умножая оба уравнения на α_{n_i} и переходя к пределу, получим систему

$$\int_0^1 K(x,t)\,u(t)\,\mathrm{d}M(t) = \bar{\alpha} v(x)\,, \quad \int_0^1 K(x,t)\,v(t)\,\mathrm{d}P(t) = \bar{\alpha} u(x)\,.$$

Из сказанного о функциях $u(x)$ и $v(x)$ теперь вытекает, что обе они положительны на $(0, 1)$, т. е. $u(x) > 0$, $v(x) > 0$, $x \in (0, 1)$. Умножая первое уравнение на $v(x)$ и интегрируя по P, получим

$$\int_0^1\int_0^1 K(x,t)\,u(t)\,v(x)\,\mathrm{d}M(t)\,\mathrm{d}P(x) = \bar{\alpha}\int_0^1 v^2(x)\,\mathrm{d}P(x)\,;$$

аналогично получим

$$\int_0^1\int_0^1 K(x,t)\,u(x)\,v(t)\,\mathrm{d}M(x)\,\mathrm{d}P(t) = \bar{\alpha}\int_0^1 u^2(x)\,\mathrm{d}M(x)\,,$$

откуда следует

$$\bar{\alpha} = \frac{\int_0^1\int_0^1 K(x,t)\,u(x)\,v(t)\,\mathrm{d}M(x)\,\mathrm{d}P(t)}{\sqrt{\int_0^1 u^2\,\mathrm{d}M \int_0^1 v^2\,\mathrm{d}P}}\,,$$

Причем знаменатель не равен нулю, так как $u(x)$ и $v(x)$ положительны на $(0, 1)$ и по предположению $M \neq 0$, $P \neq 0$.

Так как правая часть выведенного уравнения не превышает, согласно лемме 1, числа α и так как $\bar{\alpha}$ по предположению больше α, получаем желанное противоречие; следовательно, функционал $\alpha(M, P)$ непрерывен и в точках M, P при $M \neq 0$, $P \neq 0$; итак, он непрерывен на $\mathfrak{S} \times \mathfrak{S}$, что требовалось доказать.

Доказанная только что непрерывность функционала $\alpha(M, P)$ позволяет нам при доказательстве неравенства $\alpha^2 \leqq \beta\gamma$ ограничиться такими $M, P \in \mathfrak{S}$, которые лежат в некотором плотном подмножестве $\mathfrak{S}$. В качестве этого плотного подмножества возьмем множество $\mathfrak{S}'$ тех мер множества $\mathfrak{S}$, которые имеют непрерывные первые производные.

Теперь мы докажем последнюю лемму:

Лемма 5. *Пусть $M \in \mathfrak{S}'$, $P \in \mathfrak{S}'$; тогда справедливо неравенство*

$$\alpha^2 \geqq \beta\gamma\,.$$

Доказательство. Пока еще выберем $M \in \mathfrak{S}$, $P \in \mathfrak{S}$, $M \neq 0$, $P \neq 0$. Для собственного числа β уравнения (2) имет место экстремальный принцип

$$\beta(M) = \sup_{\varphi \in C} \frac{\int_0^1\int_0^1 K(x,t)\,\varphi(x)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}M(x)\mathrm{d}M(t)}{\int_0^1 \varphi^2\,\mathrm{d}M}\,; \tag{8}$$

аналогично будет

$$\gamma = \beta(P) = \sup_{\psi\in C} \frac{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x, t)\, \psi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}P(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\int\limits_0^1 \psi^2\, \mathrm{d}P}. \tag{9}$$

Таким же образом, как в лемме 2, можно доказать, что функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, на которых правые части соотношений (8) и (9) достигают своих максимумов, положительны на (0,1). Очевидно, $\beta(M) = 0 \Leftrightarrow M = 0$.

Возвысив в степень соотношение (4), получим:

$$\alpha^2 = \sup \frac{\left[\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x, t)\, y(x)\, z(t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}P(t)\right]^2}{\int\limits_0^1 y^2\, \mathrm{d}M \int\limits_0^1 z^2\, \mathrm{d}P}. \tag{10}$$

Пусть $\varphi(x)$, соотв., $\psi(x)$ означают мненно те функции, на которых правые части соотношений (8), соотв., (9) достигают своих максимумов. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ являются тогда, соответственно, решениями уравнений (2) и (3). Через $y(x)$, $z(x)$ обозначим пару тех функций, на которых достигает своего максимума правая часть соотношения (10). Пара функций $y(x)$, $z(x)$ является решением системы (1).

Подставляя функции $y(x)$ и $z(x)$, соответственно, в правые части соотношений (8) и (9), получим неравенства

$$\beta \geqq \frac{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x, t)\, y(x)\, y(t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}Mt}{\int\limits_0^1 y^2\, \mathrm{d}M},$$

$$\gamma \geqq \frac{\int\limits_0^1\int\limits_0^1 K(x, t)\, z(x)\, z(t)\, \mathrm{d}P(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\int\limits_0^1 z^2\, \mathrm{d}P}.$$

Но так как пара функций $y(x), z(x)$ является решением (1), получим, используя систему (1), легко неравенства

$$\frac{\beta}{\alpha} \geqq \frac{\int\limits_0^1 yz\, \mathrm{d}M}{\int\limits_0^1 y^2\, \mathrm{d}M} \qquad \frac{\gamma}{\alpha} \geqq \frac{\int\limits_0^1 yz\, \mathrm{d}P}{\int\limits_0^1 z^2\, \mathrm{d}P}$$

откуда, перемножив их, получим соотношение

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha^2} \geqq \frac{\int\limits_0^1 yz\, \mathrm{d}M \int\limits_0^1 yz\, \mathrm{d}P}{\int\limits_0^1 y^2\, \mathrm{d}M \int\limits_0^1 z^2\, \mathrm{d}P}. \tag{11}$$

Если, наоборот, подставим пару функцией $\varphi(x), \psi(x)$ в правую часть соотношения (10), получим неравенство

$$\alpha^2 \geqq \frac{\int_0^1\int_0^1 K(x, t)\, \varphi(x)\, \psi(t)\, \mathrm{d}M(x)\, \mathrm{d}P(t)}{\int_0^1 \varphi^2\, \mathrm{d}M \int_0^1 \psi^2\, \mathrm{d}P}\,;$$

используя уравнения (2) и (3), получим неравенство

$$\frac{\alpha^2}{\beta\gamma} \geqq \frac{\int_0^1 \varphi\psi\, \mathrm{d}M \int_0^1 \varphi\psi\, \mathrm{d}P}{\int_0^1 \varphi^2\, \mathrm{d}M \int_0^1 \psi^2\, \mathrm{d}P}\,. \tag{12}$$

Теперь воспользуемся возможностью предполагать, что $M \in \mathfrak{S}'$, $P \in \mathfrak{S}'$; обозначим $M'(x) = m(x)$; $P'(x) = p(x)$.

Непосредственным интегрированием с учетом краевых условий мы могли бы легко обнаружить, что система (1) эквивалентна следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} &\alpha z''(x) + y(x)\, m(x) = 0\,, \quad y(0) = y(1) = 0\,,\\ &\alpha y''(x) + z(x)\, p(x) = 0\,, \quad z(0) = z(1) = 0\,; \end{aligned} \tag{1a}$$

так же и уравнения (2) и (3) эквивалентны, соответственно, следующим краевым задачам (2a) и (3a):

$$\beta\varphi''(x) + \varphi(x)\, m(x) = 0\,, \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0\,, \tag{2a}$$

$$\gamma\psi''(x) + \psi(x)\, p(x) = 0\,, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0\,. \tag{3a}$$

Умножая первое уравнение системы (1a) на функцию $y(x)$ и интегрируя по частям с учетом краевых условий, получим соотношение

$$\int_0^1 y^2(x)\, m(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 y^2\, \mathrm{d}M = \alpha \int_0^1 y'z'\, \mathrm{d}x \tag{13}$$

и аналогично

$$\int_0^1 z^2\, \mathrm{d}P = \alpha \int_0^1 y'z'\, \mathrm{d}x\,. \tag{14}$$

Умножая правую часть уравнения (1a) на функцию $z(x)$, получим подобным способом соотношение

$$\int_0^1 yz\, \mathrm{d}M = \alpha \int_0^1 z'^2\, \mathrm{d}x \tag{15}$$

и аналогично

$$\int^1 yz\, \mathrm{d}P = \alpha \int_0^1 y'^2\, \mathrm{d}x\,. \tag{16}$$

Таким же образом вытекают из (2а), соотв., (3а) соотношения

$$\int_0^1 \varphi^2 \, \mathrm{d}M = \beta \int_0^1 \varphi'^2 \, \mathrm{d}x \,, \tag{17}$$

$$\int_0^1 \psi^2 \, \mathrm{d}P = \gamma \int_0^1 \psi'^2 \, \mathrm{d}x \,, \tag{18}$$

$$\int_0^1 \varphi\psi \, \mathrm{d}M = \beta \int_0^1 \varphi'\psi' \, \mathrm{d}x \,, \tag{19}$$

$$\int_0^1 \varphi\psi \, \mathrm{d}P = \gamma \int_0^1 \varphi'\psi' \, \mathrm{d}x \,. \tag{20}$$

При помощи уравнений (13), (14), (15), (16) сведем неравенство (11) в виду

$$\frac{\beta\gamma}{\alpha^2} \geqq \frac{\int_0^1 y'^2 \, \mathrm{d}x \int_0^1 z' \, \mathrm{d}x}{[\int_0^1 y'z' \, \mathrm{d}x]^2} \,,$$

откуда по неравенству Шварца следует $\alpha^2 \leqq \beta\gamma$, что требовалось доказать.

Используя уравнения (17), (18), (19), (20) и неравенство (12) получим для α^2 еще нижнюю оценку в виде

$$\beta\gamma \frac{[\int_0^1 \varphi'\psi' \, \mathrm{d}x]^2}{\int_0^1 \varphi'^2 \, \mathrm{d}x \int_0^1 \psi'^2 \, \mathrm{d}x} \leqq \alpha^2 \,,$$

которая может также быть полезной, потому что установление левой части — это вопрос решения задач (2а) и (3а), которые более просты, чем задача (1а). Этим лемма 5 полностью доказана.

Доказательство теоремы. Основная теорема является следствием леммы 5, леммы 4 о непрерывности функционала $\alpha(M, P)$ и, наконец, того обстоятельства, что множество $\mathfrak{S}'$ плотно в $\mathfrak{S}$.

Замечание. Обратим еще внимание на следующее обстоятельство: сравнивая экстремальные принципы (4) и (8), мы видим, что $\beta(M) = \alpha(M, M)$; это, собственно говоря, видно и непосредственно из (1) и (2) и из того, что число α невырождено, так как в случае $M = P$ можем системе (1) удовлетворить, полагая $y(x) = z(x) = \varphi(x)$ и, следовательно, $\alpha = \beta$.

С этой точки зрения выведенное неравенство представляет собой функциональное соотношение

$$\alpha^2(M, P) \leqq \alpha(M, M)\, \alpha(P, P) \,.$$

Zusammenfassung

ABLEITUNG EINER GEWISSEN UNGLEICHUNG FÜR DIE ERSTEN EIGENWERTE ZWEIER RANDAUFGABEN

LUDVÍK JANOŠ, Praha

In dieser Arbeit ist eine Ungleichung für die Eigenwerte gewisser physikalischer Randaufgaben abgeleitet. (Für die Eigenfrequenz des Trägers und der Saite).

Nach der Integration der ersten Randaufgabe bekommt man ein äquivalentes System zweier Integralgleichungen

$$\int_0^1 K(x, t)\, y(t)\, \mathrm{d}M(t) = \alpha z(x)\,,$$

$$\int_0^1 K(x, t)\, z(t)\, \mathrm{d}P(t) = \alpha y(x)$$

und nach der Integration der anderen Randaufgaben bekommt man analog folgende zwei Integralgleichungen:

$$\int_0^1 K(x, t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}M(t) = \beta\varphi(x)\,,$$

$$\int_0^1 K(x, t)\, \psi(t)\, \mathrm{d}P(t) = \gamma\psi(x)\,,$$

wo $K(x, t)$ durch

$$K(x, t) = \begin{cases} x(1 - t)\,, & 0 \leqq x \leqq t \leqq 1\,, \\ t(1 - x)\,, & 0 \leqq t \leqq x \leqq 1 \end{cases}$$

definiert ist.

Unter α, β, γ verstehen wir die ersten Eigenwerte, M, P sind nichtnegative Maße auf dem Interval $\langle 0, 1 \rangle$.

Das Hauptresultat dieser Arbeit ist die Ableitung der Ungleichung

$$\alpha^2 \leqq \beta\gamma\,.$$