

Vladimír Horák

Theorie der Torsen des Kleinschen fünfdimensionalen projektiven Raumes und ihre Applikation auf Segresche W -Kongruenzen des dreidimensionalen projektiven Raumes

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 4, 590–628

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100385>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1959

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

THEORIE DER TORSEN DES KLEINSCHEN
FÜNFDIMENSIONALEN PROJEKTIVEN RAUMES UND IHRE
APPLIKATION AUF SEGRESCHEN W -KONGRUENZEN
DES DREIDIMENSIONALEN PROJEKTIVEN RAUMES

VLADIMÍR HORÁK, Brno

(Eingelangt am 9. Jänner 1959)

Prof. Otakar Borůvka zu seinem 60. Geburtstag gewidmet.

In dem ersten Teile dieser Abhandlung werden die Torsen des Kleinschen fünfdimensionalen projektiven Raumes untersucht, welche in diesem Raume die Segreschen W -Kongruenzen des dreidimensionalen projektiven Raumes darstellen, d. h. die W -Kongruenzen mit geradlinigen Fokalflächen. Für verschiedene Typen der Segreschen Kongruenzen und deren assoziierten Kongruenzen sind vollständige Systeme der projektiven Differentialinvarianten und die gegenseitigen Verhältnisse derselben bestimmt. Dieser Teil knüpft an die synthetischen Betrachtungen von CORRADO SEGRE an, die in der Arbeit [5] enthalten sind.

In dem zweiten Teile wird die Theorie der Torsen des Kleinschen fünfdimensionalen projektiven Raumes \bar{P}_5 mit der Theorie der Segreschen W -Kongruenzen von Jiří KLAPKA verglichen. Das Hauptergebnis dieses Teiles besteht in der Bestimmung der K -Invarianten der Torsen des Raumes \bar{P}_5 , welche die gegebenen Segreschen W -Kongruenzen des projektiven Raumes P_3 darstellen, bzw. die Formulierung derselben mittels der projektiven Differentialinvarianten der W -Kongruenzen.

Die Anregung zu dieser Arbeit hat mir Herr Professor J. Klapka gegeben; ich danke ihm für seine Ratschläge und das Interesse, mit welchem er meine Arbeit verfolgt hat.

I

1. Einführung.

1.1. CORRADO SEGRE hat in der Arbeit [5] durch die synthetische Methode folgende Behauptungen bewiesen. Es sei in dreidimensionalem projektiven Raume eine beliebige W -Kongruenz mit geradlinigen Fokalflächen gegeben.¹⁾

¹⁾ Im Folgenden benennen wir W -Kongruenzen mit geradlinigen Fokalflächen als Segreschen W -Kongruenzen, wobei die fleknodale W -Kongruenzen ausgeschlossen werden.

Diese W -Kongruenz bestimmt eine asymptotische Transformation der Fokalflächen und bestimmt also eindeutig Paare einander entsprechender Erzeugenden der Fokalflächen. Wenn man in bekannter Weise die Erzeugenden auf die Kleinsche *Hyperquadrik* Γ (K -*Quadrik* Γ) abbildet, erzeugen die Verbindungsgeraden der Bilder eine Torse. Das Bild der Fokalflächen einer Segreschen W -Kongruenz ist also der Schnitt der zugehörigen Torse mit der K -*Quadrik* Γ . Wenn der Einbettungsraum der Torse ein vierdimensionaler, bzw. dreidimensionaler Unterraum des Kleinschen Raumes ist, dann gehören die Fokalflächen der gegebenen Segreschen Kongruenz einem linearen Komplex, bzw. einer linearen Kongruenz an.

Die asymptotische Transformation der Fokalflächen der Segreschen Kongruenz bestimmt eine Zerlegung derselben auf eine Schicht (ein einparametrisches System) von Regelscharen; die komplementären Regelscharen bilden wieder eine Segresche W -Kongruenz, die so genannte *assoziierte* W -*Kongruenz*. Wenn die Fokalflächen einer Segreschen Kongruenz einem linearen Komplex, bzw. einer linearen Kongruenz angehören, gehört die assoziierte W -Kongruenz demselben Komplex, bzw. derselben Kongruenz an.

Die Torse, welche die assoziierte W -Kongruenz im Raume \bar{P}_5 darstellt, gewinnt man von der Torse, die die ursprüngliche W -Kongruenz darstellt, mittels Polarität in bezug auf die K -*Quadrik* Γ . Wenn die Tangentenfläche einer Raumkurve (welche nicht auf der K -*Quadrik* liegt) im Raume \bar{P}_5 , bzw. Unterräume \bar{P}_4 , bzw. \bar{P}_3 eingebettet ist, dann ist die Torse, welche die assoziierte W -Kongruenz darstellt, wieder eine Tangentenfläche einer Raumkurve im \bar{P}_5 , deren Rückkehrkante durch die Pole der Schmiegräume \bar{P}_4 der ursprünglichen Tangentenfläche beschrieben wird, bzw. ein Kegel mit dem Scheitel im Pole des Einbettungsraumes \bar{P}_4 , bzw. ein Kegel mit einer Scheitelgeraden, die die Polare des Raumes \bar{P}_3 darstellt. Den Schmiegräumen und den Punkten der Rückkehrkante korrespondieren in der Polarität die Schmiegräume der Torsen, die die assoziierten W -Kongruenzen darstellen. Erwähnen wir noch, dass in dem letzten Falle die Schnittpunkte der Scheitelgeraden mit der K -*Quadrik* Γ Bilder der Leitgeraden der linearen Kongruenz sind, welche zugleich die assoziierte Segresche W -Kongruenz zu der ursprünglichen ist. Die Schnitte der Schmiegräume der Torsen mit der K -*Quadrik* haben eine gewisse geometrische Bedeutung; z. B. die Schmiegeebenen \bar{P}_2 einer Torse, die eine gegebene Segresche Kongruenz darstellt, schneiden die K -*Quadrik* Γ in einem System von Kegelschnitten, das ein Bild der Schicht von Regelscharen der assoziierten Kongruenz ist.

1.2. Man sieht leicht aus den voranstehenden Ergebnissen von C. Segre, dass die Untersuchung der Segreschen W -Kongruenzen mit der Untersuchung der Torsen des Kleinschen Raumes äquivalent ist.

In den folgenden Untersuchungen der Torsen des Kleinschen Raumes werden wir folgende Begriffe und Bezeichnungen benützen.

Die Gleichung der K -Quadrik Γ , welche regulär mit der Signatur $(3,3)$ ist,²⁾ sei in der Form

$$x \cdot x \equiv 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) = 0 \quad (1.1)$$

geschrieben.

Alle linearen Unterräume und die Gebilde des Kleinschen projektiven Raumes \bar{P}_5 wollen wir mit Querstrichen bezeichnen, zum Unterschied von den Gebilden des dreidimensionalen projektiven Raumes P_3 .³⁾ Die Punkte des Raumes \bar{P}_5 , die Kleinsche Bilder (K -Bilder) der Geraden des Raumes P_3 sind (d. h. die Punkte der K -Quadrik Γ) wollen wir K -Punkte und aus K -Punkten zusammengesetzte Gebilde K -Gebilde nennen.

Die sechs linear unabhängigen geometrischen Punkte ${}^1y, {}^2y, \dots, {}^6y$, welche paarweise, mit Ausnahme eines Paares, bezüglich der K -Quadrik Γ konjugiert sind, bilden ein *quasipolares Sechseck* der K -Quadrik Γ .

Die Gruppe der regulären Kollineationen und Korrelationen des Raumes P_3 ist isomorph mit der Gruppe der projektiven Transformationen des Raumes \bar{P}_5 , welche die K -Quadrik Γ in sich überführen; diese Transformationen des Raumes \bar{P}_5 nennen wir K -Transformationen. Die Polarform $x \cdot y \equiv x_1y_4 + x_2y_5 + x_3y_6 + x_4y_1 + x_5y_2 + x_6y_3$ der Form $x \cdot x$ wird durch eine beliebige K -Transformation nach der Formel $\tilde{x} \cdot \tilde{y} = A(x \cdot y)$ transformiert; A ist die Wahl der Determinante der projektiven Transformation des Raumes P_3 , die der erwähnten K -Transformation korrespondiert.

Falls nicht anders bemerkt wird, werden wir uns in den folgenden Untersuchungen auf die Untergruppe der *unimodularen K -Transformationen* beschränken, die der Gruppe der unimodularen projektiven Transformationen des Raumes P_3 entspricht.

2. Orientation der K -Quadrik Γ . Es ist nützlich folgende Orientation der K -Quadrik einzuführen.

Definition 2.1. Die Relation $x \cdot x = 0$ ($-x \cdot x = 0$) bestimmt die *positiv (negativ) orientierte K -Quadrik*. Diese zwei K -Quadriken seien mit Γ^+ , bzw. Γ^- bezeichnet.

Ein reeller Punkt $\bar{x} \in \bar{P}_5$ ist *positiv (negativ) bezüglich der K -Quadrik Γ^+* , wenn für einen beliebigen zu \bar{x} gehörigen arithmetischen Punkt x (mit reellen Koordinaten) $x \cdot x > 0$ ($x \cdot x < 0$) gilt.

Für weitere Untersuchungen sind die Eigenschaften eines polaren und quasipolaren Sechsecks wichtig.

Lemma 2.1. Von den 6 Ecken eines polaren Sechsecks sind genau drei positiv. Es seien ${}^1\bar{y}$ und ${}^2\bar{y}$ zwei nicht konjugierte reellen Ecken eines quasipolaren Sechsecks. Dann und nur dann, wenn die Verbindungsgerade dieser Ecken mit einer beliebig orientierten K -Quadrik zwei reelle Punkten besitzt, sind eben zwei

²⁾ S. [2], S. 121f. und S. 195.

³⁾ \bar{x} , bzw. x bezeichnet einen geometrischen, bzw. arithmetischen Punkt des Raumes \bar{P}_5 .

von den Ecken ${}^3\bar{y}$, ${}^4\bar{y}$, ${}^5\bar{y}$, ${}^6\bar{y}$ positiv. Dann und nur dann, wenn die Gerade $\{{}^1\bar{y}, {}^2\bar{y}\}$ keinen reellen Punkt mit der K -Quadrik gemeinsam hat, sind die Punkte ${}^1\bar{y}$ und ${}^2\bar{y}$ positiv, bzw. negativ und von den Punkten ${}^3\bar{y}$, ${}^4\bar{y}$, ${}^5\bar{y}$, ${}^6\bar{y}$ sind genau drei negativ, bzw. genau drei positiv.

Beweis. Wenn 4 Ecken eines polaren Sechsecks alle z. B. positiv sind, dann sind alle Punkte des Raumes \bar{P}_3 , der durch die 4 Punkte bestimmt ist, positiv, und daher hat dieser Raum \bar{P}_3 mit der K -Quadrik Γ^+ keinen gemeinsamen reellen Punkt; dies ist aber ein Widerspruch. Da man ein quasipolares Sechseck durch eine passende Wahl (der zwei Ecken auf der Geraden $\{{}^1\bar{y}, {}^2\bar{y}\}$) in ein polares Sechseck überführen kann, so gilt auch die zweite Behauptung.

3. Segresche W -Kongruenzen, die keinem linearen Komplex angehören. Nach dem Satze von C. Segre (Abschn. 1.1) sind die Kongruenzen des vorstehenden Types durch die Tangentenfläche einer Raumkurve \bar{C} des Raumes \bar{P}_5 dargestellt, die in keinem Unterraum des \bar{P}_5 eingebettet ist.

Im Weiteren wollen wir voraussetzen, dass die Koordinaten der Punkte der Kurve \bar{C} stetige reelle Funktionen eines reellen Parameters sind und dass sie alle Ableitungen der geforderten Ordnung besitzen. Alle Punkte der untersuchten Kurvenbögen sind regular und es existieren in jedem Punkte eindeutig lineare Schmiegräume \bar{P}_1 (Tangente) $\bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$; dabei berühre der Raum \bar{P}_4 die Kurve gerade in 4-ter Ordnung.

Weil die Schmiegräume eindeutig bestimmt sind, so folgt daraus, dass jeder von diesen Räumen \bar{P}_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die Kurve \bar{C} gerade in i -ter Ordnung berührt. Wenn in einem Punkte \bar{x} der Schmiegraum \bar{P}_4 die Kurve in 5-ter Ordnung berührt, so besitzt die Kurve, welche die assoziierte W -Kongruenz darstellt, in dem entsprechenden Punkte \bar{x} (Pole des Schmiegraumes \bar{P}_4) einen Rückkehrpunkt, da diese Singularitäten einander in der Dualität entsprechen.

Setzen wir im Weiterem noch voraus, dass keiner von den untersuchten Kurvenpunkten ein *spezieller Punkt bezüglich der K -Quadrik* Γ^+ ist, d. i. ein K -Punkt, oder ein Punkt, in welchem irgendeiner von den Schmiegräumen ein Tangentialraum der K -Quadrik ist. Die geometrische Bedeutung der speziellen Punkte ersehen wir aus den folgenden Beispielen. Wenn die Tangente \bar{P}_1 in einem Kurvenpunkte \bar{x} die K -Quadrik berührt, so fallen die entsprechenden Erzeugenden der Fokalflächen der W -Kongruenz in P_3 zusammen; wenn \bar{P}_1 die K -Quadrik nicht berührt, aber der Schmiegraum \bar{P}_2 ein Tangentialraum der K -Quadrik ist, so fallen die Erzeugenden der Fokalflächen nicht zusammen, sondern die zugehörige Regelschar der assoziierten Kongruenz zerfällt in zwei Geradenbüschel usw.

Die Normierung des Homogenitätsfaktors und des Parameters für die Koordinaten der Kurvenpunkte führen wir folgendermassen ein.

Satz 3.1. *Ist in dem Raume \bar{P}_5 ein Bogen einer reellen Kurve $\bar{C} \equiv \{x(t)\}$ gegeben, die durch den Punkt \bar{x} beschrieben ist (\bar{C} ist in keinem Unterraum des Raumes \bar{P}_5 eingebettet), so kann man einen reellen Homogenitätsfaktor der Kurvenpunkte bis auf das Vorzeichen so bestimmen, dass für die arithmetische Kurve $[x]$ mit Parameterdarstellung*

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.1)$$

die Gleichung

$$x \cdot x = \varepsilon_1 \quad (\varepsilon_1^2 = 1) \quad (3.2)$$

gilt und gleichzeitig kann man einen neuen Parameter τ bis auf eine additive Konstante so einführen, dass

$$x' \cdot x' = \varepsilon_2 \quad (\varepsilon_2^2 = 1) \quad (3.3)$$

ist, wobei x' die Ableitung von x nach τ bedeutet.

Weil die Punkte des Kurvenbogens infolge unserer Annahme nicht speziell sind, so kann man leicht der Forderung (3.2) nachkommen. Durch Differentiation der Formel (3.2) erhält man $x \cdot \frac{dx}{dt} = 0$; die Punkte x und $\frac{dx}{dt}$ sind also bezüglich der K -Quadrik Γ^+ konjugiert und der Punkt $\frac{dx}{dt}$ ist kein K -Punkt. Der neue Parameter in der Relation (3.3) wird durch die Differentialgleichung $\left| \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \right| = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$ bestimmt und es folgt noch $\varepsilon_2 = \operatorname{sgn} \left(\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} \right)$.

Wir werden im Folgenden die arithmetische Kurve (3.1), die die Relationen (3.2) und (3.3) erfüllt, untersuchen und voraussetzen, dass schon für den Parameter t die Relation (3.3) gilt. Es werde kurz gesagt, dass die *arithmetische Kurve in Normaldarstellung (Normalform)* gegeben ist. Der wachsende Parameter t bestimmt den positiven Durchlaufsinne des Kurvenbogens (3.1).

Satz 3.2. *In jedem Punkte des Kurvenbogens, der durch die Relation (3.1) in Normaldarstellung gegeben ist, existiert ein Schmiegsimplex mit den Ecken*

$${}^1\bar{N} = \varrho_1 x, \quad {}^2\bar{N}, {}^3\bar{N}, {}^4\bar{N}, {}^5\bar{N}, {}^6\bar{N}, \quad (\varrho_1 \neq 0, \text{ belieb.}), \quad (3.4)$$

der gleichzeitig ein polares Sechseck der K -Quadrik Γ^+ repräsentiert.⁴⁾

Man kann die arithmetischen Punkte ${}^i N$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) bis auf die Vorzeichen π_i derselben so bestimmen, dass

$${}^i N \cdot {}^i N = \varepsilon_i \quad (\varepsilon_i^2 = 1, i = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.5)$$

⁴⁾ Das bedeutet: Die geometrischen Punkte ${}^1\bar{N}, {}^2\bar{N}, \dots, {}^6\bar{N}$, der vorstehenden Reihe nach, bestimmen den Schmiegraum \bar{P}_{i-1} in dem betrachteten Punkte.

ist; dann gelten die sechs folgenden Frenetschen Formeln

$$\begin{aligned}
 {}^1N' &= \pi_2 {}^2N, \\
 {}^2N' &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \pi_2 {}^1N + \varepsilon_1 \pi_3 K_1 {}^3N, \\
 {}^3N' &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \pi_3 K_1 {}^2N + \varepsilon_2 \pi_4 K_2 {}^4N, \\
 {}^4N' &= -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \pi_4 K_2 {}^3N + \varepsilon_3 \pi_5 K_3 {}^5N, \\
 {}^5N' &= -\varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \pi_5 K_3 {}^4N + \varepsilon_4 \pi_6 K_4 {}^6N, \\
 {}^6N' &= -\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 \pi_6 K_4 {}^5N;
 \end{aligned} \tag{3.6}_{1-6}$$

wobei

$$K_j = \sqrt{|{}^{j+1}N' \cdot {}^{j+1}N' - \varepsilon_j K_{j-1}^2|} \quad (K_0 = 1, j = 1, 2, 3, 4) \tag{3.7}$$

ist und die Striche bedeuten die Ableitungen nach dem Parameter t . Von den Zahlen ε_i sind drei positiv und drei negativ.

Den Beweis des vorstehenden Satzes kann man leicht durch direkte Ausrechnung durchführen. Weil die Punkte x und x' konjugiert sind, stellen die arithmetischen Punkte ${}^1N = \pi_1 x$ und ${}^2N = \pi_2 {}^1N'$ die zwei ersten Ecken des polaren Sechsecks dar. In der Schmiegeebene $\bar{P}_2 \equiv [{}^1N, {}^2N, {}^2N']$ der untersuchten Kurve bestimmen wir den Punkt ${}^3\bar{N}$, der mit den Punkten ${}^1\bar{N}$ und ${}^2\bar{N}$ konjugiert ist (der Punkt ${}^3\bar{N}$ und die Gerade $[{}^1N, {}^2N]$ sind Pol und Polare des Kegelschnittes, in welchem die Ebene \bar{P}_2 die K -Quadrik Γ^+ schneidet). Weil der Punkt ${}^1\bar{N}$ kein Speziellpunkt und daher der Punkt ${}^3\bar{N}$ kein K -Punkt ist, so kann man den arithmetischen Punkt 3N so bestimmen, dass ${}^3N \cdot {}^3N = \varepsilon_3 (\varepsilon_3^2 = 1)$ gilt. Im allgemeinen: Der Punkt ${}^{i+1}\bar{N}$ ($3 \leq i \leq 5$) und der Raum $\bar{P}_i \equiv [{}^1N, {}^2N, \dots, {}^iN]$ sind Pol und Polarraum der Schnittmannigfaltigkeit des Schmiegraumes $[{}^1N, {}^2N, \dots, {}^iN, {}^iN']$ mit der K -Quadrik Γ^+ . Da die Punkte ${}^1N, {}^2N, \dots, {}^6N$ Ecken eines Polarsechsecks sind, so sind drei von den Zahlen ε_i positiv und drei negativ.

Satz 3.3. Keine von den Funktionen K_j ($j = 1, 2, 3, 4$) in dem betrachteten Intervall des Parameters t verschwindet.

Wirklich wenn $K_j = 0$ aber K_1, K_2, \dots, K_{j-1} nicht verschwindet, so existiert nicht der Schmiegraum \bar{P}_{j+1} der Kurve \bar{C} , was gegen die Voraussetzungen ist.

Bemerkung 3.1. Die Funktionen K_j haben wir positiv gewählt. Wählt man einige von den Funktionen K_j negativ, so genügt nur gleichzeitig das zugehörige Vorzeichen π_{j+2} zu verändern und wir bekommen dasselbe Ergebnis. Die Voraussetzung $K_j > 0$ hat also keinen Einfluss auf die Allgemeinheit.

Die unimodularen K -Transformationen ändern nicht die Wahl der Determinante $[{}^1N, {}^2N, \dots, {}^6N]$. Setzen wir voraus, dass für zwei arithmetische Kurven in Normalform $K_j > 0, {}^1K_j > 0$ gilt; $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_6 = {}^1\pi_1 {}^1\pi_2 \dots {}^1\pi_6$ ist die notwendige Bedingung dafür, dass die arithmetischen Sechsecke der Kur-

ven durch unimodulare K -Transformationen ineinander transformiert werden können. Für jede zwei Kurven \bar{C} und ${}^1\bar{C}$ des Raumes \bar{P}_5 werden wir $K_j > 0$, ${}^1K_j > 0$ und $\pi_i = {}^1\pi_i$ voraussetzen.

Erwähnen wir noch, dass die Koeffizienten A_k der linearen homogenen Differentialgleichung 6-ter Ordnung ${}^1N^{(VI)} + A_1{}^1N^{(V)} + \dots + A_6{}^1N = 0$ nicht von den Vorzeichen π_i abhängen.

Da nach dem Abs. 1.2 die unimodulare K -Transformation den Wert der Form $x \cdot y$ nicht ändert, so gelten folgende Sätze.

Satz 3.4. Die Funktionen $K_j > 0$ und die Zahlen ε_i sind die unimodularen Projektivdifferential- K -Invarianten einer orientierten Kurve des Raumes \bar{P}_5 bezüglich der Gruppe der unimodularen K -Transformationen.

Folgerung 3.1. Die vier Funktionen $K_j > 0$ einer Veränderlichen und sechs Zahlen ε_i , von deren drei positiv und drei negativ sind, bestimmen im Raume \bar{P}_5 eindeutig eine orientierte Kurve bis auf unimodulare K -Transformationen. Die vorstehenden Ausdrücke bilden ein vollständiges System der unimodularen K -Invarianten. Der orientierten Kurve entspricht im Raume P_3 eine Segresche W -Kongruenz, die als orientierte Schicht der Regelscharen bis auf unimodulare projektive Transformationen bestimmt ist.

Der Punkt ${}^6\bar{N}$ beschreibt im Raume \bar{P}_5 eine Kurve \tilde{C} , welche der assoziierten W -Kongruenz entspricht.

Die K -Invarianten der assoziierten W -Kongruenz kann man in analoger Weise wie in den vorstehenden Untersuchungen bestimmen. Der arithmetische Punkt 6N (Satz 3.2) erfüllt die Forderung der Normalisation ${}^6N \cdot {}^6N = \varepsilon_6$, aber für den Punkt ${}^6N'$ bekommt man ${}^6N' \cdot {}^6N' = \varepsilon_5 K_4^2$. Die geometrischen Punkte ${}^6\bar{N}$, ${}^5\bar{N}$, ${}^4\bar{N}$, ${}^3\bar{N}$, ${}^2\bar{N}$, ${}^1\bar{N}$ in der vorstehenden Reihe bilden den polaren Schmiegsimplex der Kurve, die der assoziierten W -Kongruenz entspricht. Für diese Kurve gilt der

Satz 3.5. Die geometrischen Punkte

$${}^1\bar{M} = {}^6\bar{N}, \quad {}^2\bar{M} = {}^5\bar{N}, \quad {}^3\bar{M} = {}^4\bar{N}, \quad {}^4\bar{M} = {}^3\bar{N}, \quad {}^5\bar{M} = {}^2\bar{N}, \quad {}^6\bar{M} = {}^1\bar{N} \quad (3.8)$$

bilden ein polares Sechseck der K -Quadrik Γ^+ , das ein Schmiegsimplex der durch den Punkt ${}^1\bar{M}$ beschriebenen Kurve ist. Führt man in die arithmetische Kurve, die der arithmetische Punkt ${}^1M = {}^6N$ beschreibt, einen neuen Parameter mittels der Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = K_4 \quad (3.9)$$

ein, so kann man, bis auf die Vorzeichen $\hat{\pi}_i$, die arithmetischen Punkte iM ($i = 1, 2, \dots, 6$) so bestimmen, dass

$${}^iM \cdot {}^iM = \tilde{\varepsilon}_i \quad (\tilde{\varepsilon}_i^2 = 1, i = 1, 2, \dots, 6) \quad (3.10)$$

ist; es gelten Frenetsche Formeln, die man aus den Formeln (3.6)₁₋₆ durch Substitution

$$\begin{pmatrix} {}^iN', & {}^iN, & \pi_i, & \varepsilon_j, & K_j \\ \frac{d {}^iM}{du}, & {}^iM, & \tilde{\pi}_i, & \tilde{\varepsilon}_j, & \tilde{K}_j \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

bekommt, wobei

$$\tilde{K}_j = \sqrt{\left| \frac{d^{j+1}M}{du} \cdot \frac{d^{j+1}M}{du} - \tilde{\varepsilon}_j \tilde{K}_{j-1}^2 \right|}, \quad (\tilde{K}_0 = 1; j = 1, 2, 3, 4) \quad (3.12)$$

ist.

Zwischen den K -Invarianten K_j, ε_i und $\tilde{K}_j, \tilde{\varepsilon}_i$ gelten die Relationen

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{7-i}, \quad \tilde{K}_j = \frac{K_{4-j}}{K_4} \quad (i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3, 4). \quad (3.13)$$

Die Vorzeichen $\tilde{\pi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) kann man beliebig wählen.

Den Beweis führt man in analoger Weise wie den Beweis des Satzes 3.2 durch.

Führen wir in die arithmetische Kurve, welche der assoziierten Kongruenz entspricht, nicht den neuen Parameter u nach (3.9) ein, sondern behalten den Parameter t , so bekommen wir ebenfalls Frenetsche Formeln, die wir auch direkt aus den Frenetschen Formeln im Satz 3.5 durch Multiplizieren des ersten Glieds mit dem Faktor $\frac{du}{dt}$ und des zweiten mit K_4 erhalten. Dann werden die beiden Kurven, die den assoziierten Kongruenzen entsprechen, den selben Parameter besitzen.

In dem zweiten Teile dieser Arbeit werden wir folgende Sätze, welche man leicht beweisen kann, benützen.

Satz 3.6. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Tangente $[{}^1N, {}^2N]$ der Kurve $[x]$, bzw. die Tangente $[{}^1M, {}^2M]$ der Kurve, die der Punkt 1M beschreibt, die K -Quadrik Γ^+ in reellen Punkten schneidet, ist

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2, \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_5 = -\varepsilon_6. \quad (3.14)$$

Die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der K -Quadrik Γ^+ werden durch die Relationen

$${}^1p = \lambda({}^1N + {}^2N), \quad {}^2p = \lambda({}^1N - {}^2N),$$

bzw.

$${}^1q = \mu({}^1M + {}^2M), \quad {}^2q = \mu({}^1M - {}^2M)$$

(3.15)₁₋₄

bestimmt, wobei λ , bzw. μ beliebige, von Null verschiedene Faktoren sind.

Folgerung 3.2. Die Fokalflächen der entsprechenden Kongruenz, bzw. der assoziierten W -Kongruenz sind dann und nur dann reell, wenn $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, bzw. $\varepsilon_5 = -\varepsilon_6$ ist.

Satz 3.7. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Schmiegeebene \bar{P}_2 der betrachteten Kurve $[x]$ (und gleichzeitig auch die Schmiegeebene \bar{P}_2 der durch den Punkt eN beschriebenen Kurve) die K -Quadrik Γ^+ im reellen Kegelschnitt schneidet, ist, dass die Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ nicht einander gleich sind.*

4. Segresche W -Kongruenzen, die einem linearen nicht ausgearteten Komplex angehören. Nach dem Satze von C. Segre wird eine W -Kongruenz, die einem linearen (nicht speziellen) Komplex angehört, im Raume \bar{P}_5 durch einen Kegel dargestellt, dessen Scheitel kein K -Punkt ist. Eine W -Kongruenz, deren assoziierte W -Kongruenz in einem nicht speziellen Komplex enthalten ist, wird im \bar{P}_5 durch eine Tangentenfläche einer Kurve, die in einem Raum \bar{P}_4 (und in keinem Unterraum dieses Raumes) eingebettet ist, dargestellt; der Einbettungsraum \bar{P}_4 ist kein Tangentialraum der K -Quadrik. Als Leitkurve eines solchen Kegels kann man eine beliebige Kurve des Raumes \bar{P}_5 wählen. Es ist aber vorteilhaft, wie wir ferner ersehen werden, die allgemein ausgewählte Leitkurve durch die Schnittkurve des gegebenen Kegels mit dem polaren Raum des Kegelscheitels zu ersetzen.

Dieses Kapitel enthält nur eine Übersicht der Ergebnisse, da die Beweise den Beweisen der Sätze des 3. Kapitel ganz analog sind.

Setzen wir voraus, dass alle Koordinaten der Punkte der Kurve $\bar{C} \in \bar{P}_4$, die die Leitkurve des Kegels mit dem Scheitel im Pole des Raumes \bar{P}_4 ist (dieser Raum ist kein Tangentialraum der K -Quadrik Γ^+), reelle Funktionen eines reellen Parameters sind, und dass sie alle geforderten Ableitungen besitzen. Alle Punkte der betrachteten Kurvenbögen sind regulär und in jedem Punkt existieren eindeutig die linearen Schmiegräume \bar{P}_1 (Tangente) \bar{P}_2, \bar{P}_3 ; dabei berühre der Schmiegrum \bar{P}_3 die Kurve gerade in 3-ter Ordnung.

In den nächsten Betrachtungen schliessen wir wieder die bezüglich der K -Quadrik Γ^+ speziellen Punkte der Kurve $\bar{C} \in \bar{P}_4$ aus; dieselben werden ganz analog definiert, wie für die Kurven, die in dem Raum \bar{P}_5 eingebettet sind.

Es sei zu dem festen Punkte $\{^1x\}$ im polaren Raume \bar{P}_4 ($\{^1x\}$ ist kein K -Punkt) ein Kurvenbogen $\{^2x(t)\}$ gegeben, der in keinem Unterraum von \bar{P}_4 liegt. Betrachten wir wieder die Kurve in Normaldarstellung, d. i. die arithmetische Kurve $[^2x]$ der Gleichung

$${}^2x_i = {}^2x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (4.1)$$

die die Relation

$${}^2x \cdot {}^2x = \varepsilon_2 \quad (\varepsilon_2^2 = 1) \quad (4.2)$$

und

$${}^2x' \cdot {}^2x' = \varepsilon_3 \quad (\varepsilon_3^2 = 1) \quad (4.3)$$

erfüllt.

Unabhängig von der vorstehenden Normalisation, kann man den Homogenitätsfaktor des Punktes $\{^1x\}$ bis auf das Vorzeichen π_1 so bestimmen, dass für den arithmetischen Punkt 1x die Relation

$$^1x \cdot ^1x = \varepsilon_1 \quad (\varepsilon_1^2 = 1) \quad (4.4)$$

gilt.

In jedem Punkte des Bogens der in Normaldarstellung gegebenen Kurve existiert ein Schmiegsimplex mit Ecken

$${}^2\bar{N}, {}^3\bar{N}, {}^4\bar{N}, {}^5\bar{N}, {}^6\bar{N}, {}^5) \quad (4.5)$$

der mit dem Punkte ${}^1N = \pi_1 \cdot ^1x$ ($\pi_1^2 = 1$, beliebig) ein polares Sechseck der K -Quadrik bildet.

Man kann bis auf Vorzeichen π_i ($i = 2, 3, \dots, 6$) die arithmetischen Punkte iN so bestimmen, dass

$${}^iN \cdot {}^iN = \varepsilon_i \quad (\varepsilon_i^2 = 1, \quad i = 2, 3, \dots, 6) \quad (4.6)$$

ist; es gelten die *Frenetschen Formeln*

$$\begin{aligned} {}^2N' &= \pi_3 {}^3N, \\ {}^3N' &= -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \pi_3 {}^2N + \varepsilon_2 \pi_4 K_1 {}^4N, \\ {}^4N' &= -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \pi_4 K_1 {}^3N + \varepsilon_3 \pi_5 K_2 {}^5N, \\ {}^5N' &= -\varepsilon_3 \varepsilon_4 \varepsilon_5 \pi_5 K_2 {}^4N + \varepsilon_4 \pi_6 K_3 {}^6N, \\ {}^6N' &= -\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 \pi_6 K_3 {}^5N, \end{aligned} \quad (4.7)_{1-5}$$

wobei

$$K_j = \sqrt{|{}^{j+2}N' \cdot {}^{j+2}N' - \varepsilon_{j+1} K_{j-1}^2|} \quad (K_0 = 1, \quad j = 1, 2, 3) \quad (4.8)$$

ist und die Striche Ableitungen nach t bedeuten. Für den Punkt 1N bekommen wir ${}^1N \cdot {}^1N = \varepsilon_1$ ($\varepsilon_1^2 = 1$). Von den Zahlen ε_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) sind drei positiv und drei negativ.

Die Funktionen K_j ($j = 1, 2, 3$) sind in dem betrachteten Intervall des Parameters t positiv und bilden mit den Zahlen ε_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) ein vollständiges System der *Projektivdifferential-K-Invarianten* eines Kegels des Raumes \bar{P}_5 bezüglich der Gruppe der unimodularen K -Transformationen.

Wenden wir uns jetzt zur Untersuchung der assoziierten W -Kongruenz.

Die Torse, welche die *assoziierte W-Kongruenz* darstellt, ist in dem polaren Raume des Kegelscheitels eingebettet und ist eine Tangentenfläche der, durch den Punkt 6N beschriebenen Kurve. Die Fokalfächen der assoziierten W -Kongruenz gehören einem linearen Komplex an, dessen Bild im Raume \bar{P}_5 die Schnittmannigfaltigkeit des Raumes \bar{P}_4 mit der K -Quadrik I^+ bildet.

⁵⁾ Die Punkte ${}^2\bar{N}, {}^3\bar{N}, \dots, {}^6\bar{N}$ bilden ein polares Fünfeck der Schnittquadrik der K -Quadrik I^+ mit dem polaren Raum \bar{P}_4 des Punktes $\{^1x\}$.

Die geometrischen Punkte ${}^1\bar{M} = {}^6\bar{N}$, ${}^2\bar{M} = {}^5\bar{N}$, ..., ${}^6\bar{M} = {}^1\bar{N}$ bilden ein polares Sechseck der K -Quadrik Γ^+ . Die fünf ersten bilden den Schmiegsimplex der durch den Punkt ${}^1\bar{M}$ beschriebenen Kurve; dieser Simplex ist ein polares Fünfeck der Schnittmannigfaltigkeit des polaren Raumes $\bar{P}_4 \equiv \equiv [{}^1\bar{M}, {}^2\bar{M}, \dots, {}^5\bar{M}]$ des Punktes ${}^6\bar{M}$ bezüglich der K -Quadrik Γ^+ .

Behandeln wir jetzt die durch den arithmetischen Punkt ${}^1M = {}^6M$ beschriebene arithmetische Kurve. Wenn wir einen neuen Parameter u durch die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = K_3 \quad (4.9)$$

eingeführen, so kann man bis auf die Vorzeichen, die wir $\tilde{\pi}_i$ bezeichnen, die arithmetischen Punkte iM ($i = 1, 2, \dots, 5$) so bestimmen, dass

$${}^iM \cdot {}^iM = \tilde{\varepsilon}_i \quad (\tilde{\varepsilon}_i^2 = 1, i = 1, 2, \dots, 5) \quad (4.10)$$

ist; es gelten die *Frenetschen Formeln*

$$\begin{aligned} \frac{d{}^1M}{du} &= \tilde{\pi}_2 {}^2M, \\ \frac{d{}^2M}{du} &= -\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\pi}_2 {}^1M + \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\pi}_3 \tilde{K}_1 {}^3M, \\ \frac{d{}^3M}{du} &= -\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\varepsilon}_3 \tilde{\pi}_3 \tilde{K}_1 {}^2M + \tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\pi}_4 \tilde{K}_2 {}^4M, \\ \frac{d{}^4M}{du} &= -\tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\varepsilon}_3 \tilde{\varepsilon}_4 \tilde{\pi}_4 \tilde{K}_2 {}^3M + \tilde{\varepsilon}_3 \tilde{\pi}_5 \tilde{K}_3 {}^5M, \\ \frac{d{}^5M}{du} &= -\tilde{\varepsilon}_3 \tilde{\varepsilon}_4 \tilde{\varepsilon}_5 \tilde{\pi}_5 \tilde{K}_3 {}^4M, \end{aligned} \quad (4.11)_{1-5}$$

wobei

$$\tilde{K}_j = \sqrt{\left| \frac{d^{j+1}M}{du} \cdot \frac{d^{j+1}M}{du} - \tilde{\varepsilon}_j \tilde{K}_{j-1}^2 \right|} \quad (\tilde{K}_0 = 1; j = 1, 2, 3) \quad (4.11)_6$$

ist.

Wählt man die Normierung des Homogenitätsfaktors des Punktes ${}^6\bar{M}$ so, dass ${}^6M \cdot {}^6M = \tilde{\varepsilon}_6$ ($\tilde{\varepsilon}_6^2 = 1$) ist, dann gilt zwischen den K -Invarianten K_j, ε_i der ursprünglichen W -Kongruenz und den K -Invarianten $\tilde{K}_j, \tilde{\varepsilon}_i$ der assoziierten W -Kongruenz

$$\tilde{K}_j = \frac{K_{3-j}}{K_3}, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_{7-i} \quad (j = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, 6). \quad (4.12)$$

Die Vorzeichen $\tilde{\pi}_i$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) sind beliebig.

Die Fokalflächen einer W -Kongruenz, die einem allgemeinen Komplex angehört, bzw. die Fokalflächen ihrer assoziierten W -Kongruenz, sind dann und nur dann reell, wenn $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$, bzw. $\varepsilon_5 = -\varepsilon_6$ ist.

Bemerkung 4.1. Führen wir in die Relationen (3.6)₁₋₂ die Funktion K_0 so ein, dass ${}^1N' = \varepsilon_0\pi_2K_0{}^2N$ und ${}^2N' = -\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_2\pi_2K_0{}^1N + \varepsilon_1\pi_3K_1{}^3N$ ist, wobei formal nach (3.6)₇ $K_0 = \sqrt{|{}^1N' \cdot {}^1N' - \varepsilon_0K_1{}^2|}$ ($\varepsilon_0 = 1$) und $K_{-1} = 0$ ist. Daraus folgt, dass $K_0 = 0$ dann und nur dann gilt, wenn ${}^1N' \cdot {}^1N' = 0$ ist, d. i. entweder ist ${}^1N'$ ein K -Punkt, der die Relation ${}^1N \cdot {}^1N' = 0$ erfüllt, sodass 1N ein spezieller Punkt ist, oder ist 1N ein fester Punkt mit konstanten Koordinaten, da ${}^1N \cdot {}^1N = \varepsilon_1$ ist. Eine weitere geometrische Folgerung der Relation $K_0 = 0$ ist, dass die Verbindungsgerade der Punkte 2N und 3N die Tangente der, durch den Punkt 2N beschriebenen Kurve ist. Für die assoziierte W -Kongruenz bekommen wir nach (3.13) die Relation $\tilde{K}_4 = 0$. Aus den Formeln (3.6)₁₋₇ erhalten wir eben die Formeln (4.8)₁₋₆ so, dass wir $K_0 = 0$, $\varepsilon_1 = 1$ und statt K_1, K_2, K_3, K_4 der Reihe nach $K_0 = 1, K_1, K_2, K_3$ einsetzen. In ähnlicher Weise kann man die assoziierte W -Kongruenz untersuchen.

5. Segresche W -Kongruenzen, die einem speziellen linearen Komplex angehören.⁶⁾ Eine beliebige Regelfläche P und eine Gerade p (die nicht auf der Fläche P liegt) des projektiven Raumes P_3 bestimmen eine W -Kongruenz, die einem speziellen linearen Komplex angehört; p ist die Leitgerade des erwähnten Komplexes. Die Gerade p und die Fläche P werden im \bar{P}_5 als ein fester Punkt $\{^2x\}$ und eine K -Kurve \bar{C} abgebildet, welche nicht in dem Tangentialraum \bar{P}_4 der K -Quadrik Γ^+ im Punkte $\{^2x\}$ liegt. Eine W -Kongruenz des vorstehenden Types wird durch einen Kegel mit dem Scheitel im K -Punkte $\{^2x\}$ und mit der K -Leitkurve \bar{C} dargestellt.

Setzen wir im Weiterem voraus, dass alle Koordinaten der Punkte der Kegelleitkurve \bar{C} stetige Funktionen eines reellen Parameters sind und dass sie alle Ableitungen der geforderten Ordnung besitzen. Alle Punkte der untersuchten K -Kurvenbögen sind regulär und in jedem Punkt derselben existieren eindeutig die linearen Schmiegräume $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ und dabei berührt der Raum \bar{P}_4 die Kurve \bar{C} gerade in 4-ter Ordnung.

Aus den Voraussetzungen folgt, dass die Regelfläche, die in \bar{P}_5 durch die K -Kurve dargestellt wird, keinem linearen Komplex angehört und dass sie auch keinen linearen Hyperschmiegleichkomplex in dem untersuchten Intervall des Parameters besitzt.

Setzen wir noch voraus, dass keiner von den Punkten der K -Kurve ein spezieller K -Punkt in bezug auf die K -Quadrik Γ^+ ist, d. i. ein K -Punkt, der im Tangentialraum \bar{P}_4 der K -Quadrik Γ^+ im Punkte $\{^2x\}$ liegt, oder dessen Verbindungsraum eines beliebigen von seinen Schmiegräumen und des K -Punktes $\{^2x\}$ ein Tangentialraum der K -Quadrik Γ^+ ist.

Satz 5.1. *Es sei im Raume \bar{P}_5 ein fester K -Punkt $\{^2x\}$ und ein Bogen einer reellen durch den geometrischen Punkt $\{^1x\}$ beschriebenen K -Kurve $\bar{C} \equiv \{^1x(t)\}$*

⁶⁾ In der Arbeit [5] wird dieser Typ der W -Kongruenzen nicht untersucht.

gegeben. Zu einem beliebigen arithmetischen Punkt 2x , bzw. ${}^2x^* = c {}^2x$ ($c = \text{konst} \neq 0$) mit konstanten Koordinaten, kann man eine arithmetische durch den arithmetischen Punkt 1x , bzw. ${}^1x^*$ beschriebene K -Kurve mit der Gleichung

$${}^1x_i = {}^1x_i(t), \quad \text{bzw.} \quad {}^1x_i^* = {}^1x_i^*(t) \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (5.1)_{1,2}$$

so bestimmen, dass

$${}^1x \cdot {}^2x = \varepsilon_0, \quad \text{bzw.} \quad {}^1x^* \cdot {}^2x^* = \varepsilon_0 \quad (\varepsilon_0^2 = 1) \quad (5.2)_{1,2}$$

und

$${}^1x_i = \frac{1}{c} {}^1x_i^*. \quad (5.2)_3$$

gilt.

Für die arithmetische Kurve $[{}^1x]$, bzw. $[{}^1x^*]$ kann man einen neuen Parameter τ , bzw. τ^* bis auf eine additive Konstante so wählen, dass

$$\frac{d {}^1x}{d\tau} \cdot \frac{d {}^1x}{d\tau} = \varepsilon_3, \quad \text{bzw.} \quad \frac{d {}^1x^*}{d\tau^*} \cdot \frac{d {}^1x^*}{d\tau^*} = \varepsilon_3^* \quad (\varepsilon_3^2 = \varepsilon_3^{*2} = 1) \quad (5.3)_{1,2}$$

und

$$d\tau = |c| d\tau^*, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_3^* \quad (5.4)_{1,2}$$

ist.

Man führt zuerst den Beweis für beide arithmetischen Punkte 2x und ${}^2x^*$ durch. Aus dem Vergleich der Ergebnisse folgt dann (5.2) und (5.4). In der Formel (5.2)₂ wäre es möglich ε_0^* statt ε_0 zu schreiben, wobei entweder $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^*$, oder $\varepsilon_0 = -\varepsilon_0^*$ ist; die Wahl $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^*$ hat aber keinen Einfluss auf die Allgemeinheit.

Wir wollen sagen, dass der Scheitel und die K -Leitkurve, deren positiven Durchlaufsinne der wachsende Parameter t bestimmt, in der Normaldarstellung (Normalform) gegeben wird, wenn die Scheitelkoordinaten konstant sind und die Punkte der K -Kurve die Relationen (5.2) und (5.3) erfüllen.

Zum Unterschied von den vorangegangenen Fällen ist die in der Normaldarstellung gegebene K -Leitkurve nicht eindeutig bestimmt. Darum müssen wir in den folgenden Betrachtungen die Ergebnisse verschiedener analytischer Normaldarstellungen vergleichen.

Satz 5.2. In jedem Punkt des durch den Punkt ${}^1x(t)$ beschriebenen K -Kurvengogens, der in der Normaldarstellung gegeben wird, existiert ein Schmiegsimplex, dessen Ecken die geometrischen Punkte

$${}^1\bar{N} = \varrho_1 {}^1x, \quad {}^3\bar{N}, {}^4\bar{N}, {}^5\bar{N}, {}^6\bar{N} \quad (\varrho_1 \neq 0, \text{ beliebig.})^7 \quad (5.5)$$

bilden; die letzteren bilden mit dem Punkt ${}^2N = \varrho_2 {}^2x$ ($\varrho_2 \neq 0$, beliebig.) ein quasipolares Sechseck der K -Quadrik Γ^+ .

⁷⁾ Ein beliebiger Schmiegraum $\bar{P}_i \equiv \{{}^1\bar{N}, {}^3\bar{N}, \dots, {}^{i+2}\bar{N}\}$ ($3 \leq i+2 \leq 6$) wird ein Tangentialraum der K -Quadrik Γ^+ und berührt sie in dem Punkt ${}^1\bar{N}$ und nicht in einem Raum von höherer Dimension.

Man kann bis auf die Vorzeichen π_i die arithmetischen Punkte iN ($i = 1, 2, \dots, 6$) (die Koordinaten des Punktes 2N sind konstant) so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} {}^1N \cdot {}^2N &= \varepsilon, \quad {}^iN \cdot {}^iN = \varepsilon_i \\ (\varepsilon^2 &= 1; \varepsilon_i^2 = 0 \text{ für } i = 1, 2; \varepsilon_i^2 = 1, \text{ für } i = 3, 4, 5, 6) \end{aligned} \quad (5.6)_{1-5}$$

gilt, wobei $\varepsilon = \pi_1\pi_2\varepsilon_0$ ist; es gelten die Frenetschen Formeln

$$\begin{aligned} \frac{d^1N}{dt} &= \pi_3 {}^3N, \\ \frac{d^3N}{dt} &= -\varepsilon\varepsilon_3\pi_3 {}^2N + \varepsilon\pi_4k_1 {}^4N, \\ \frac{d^4N}{dt} &= -\varepsilon\varepsilon_3\varepsilon_4\pi_4k_1 {}^3N + \varepsilon_3\pi_5k_2 {}^5N, \\ \frac{d^5N}{dt} &= -\varepsilon_3\varepsilon_4\varepsilon_5\pi_5k_2 {}^4N + \varepsilon_4\pi_6k_3 {}^6N, \\ \frac{d^6N}{dt} &= -\varepsilon_4\varepsilon_5\varepsilon_6\pi_6k_3 {}^5N, \end{aligned} \quad (5.7)$$

wobei

$$k_j = \sqrt{\left| \frac{d^{j+2}N}{dt} \cdot \frac{d^{j+2}N}{dt} - \varepsilon_{j+1}k_{j-1}^2 \right|} \neq 0 \quad (k_0 = 0, j = 1, 2, 3) \quad (5.8)$$

ist. Zwei von den Zahlen $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ sind positiv und zwei negativ und die Vorzeichen π_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) sind beliebig.

Satz 5.2*. Für die durch den arithmetischen Punkt ${}^1x^* = {}^1x^*(t^*) = c {}^1x(t)$ beschriebene K -Kurve gelten analoge Relationen (wir bezeichnen sie (5.5)*–(5.8)*), die wir aus den Relationen (5.5)–(5.8) durch Transformation

$$\begin{pmatrix} {}^iN, & \pi_i, & \varepsilon_i, & \varepsilon, & k_i, & t \\ {}^iN^*, & \pi_i^*, & \varepsilon_i^*, & \varepsilon^*, & k_i^*, & t^* \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, 6; j = 1, 2, 3) \quad (5.9)$$

erhalten; wobei ($\text{sgn } c = \gamma$)

$$\begin{aligned} \pi_1^* {}^1N^* &= \pi_1 \frac{1}{c} {}^1N, \quad \pi^* {}^2N^* = \pi_2 c {}^2N, \quad \pi_1^* \pi_3^* {}^3N^* = \gamma \pi_1 \pi_3 {}^3N, \\ \pi_2^* \pi_3^* \pi_4^* {}^4N^* &= \gamma \pi_2 \pi_3 \pi_4 {}^4N, \quad \pi_2^* \pi_3^* \pi_4^* \pi_5^* {}^5N^* = \gamma \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 {}^5N \\ \pi_2^* \pi_3^* \pi_4^* \pi_5^* \pi_6^* {}^6N^* &= \gamma \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_6 {}^6N; \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \varepsilon_i^*, \quad k_j = \frac{1}{|c|} k_j^*, \quad dt = |c| dt^*, \quad \varepsilon \pi_1 \pi_2 = \varepsilon^* \pi_1^* \pi_2^* \\ (i &= 1, 2, \dots, 6; j = 0, 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (5.11)_{1-4}$$

ist; die Vorzeichen π_i^* sind beliebig.

Den Beweis der beiden vorstehenden Sätze kann man durch direkte Ausrechnung durchführen. Bemerken wir nur, dass die Punkte $\frac{d^k {}^1x}{dt^k}$ (k beliebige

natürliche Zahl) mit dem Punkt 2x in bezug auf die K -Quadrik Γ^+ konjugiert sind, da $\frac{d^k {}^1x}{dt^k} \cdot {}^2x = 0$ ist und alle in dem Tangentialraum \bar{P}_4 der K -Quadrik im Punkt 2x , der nicht mit 1x konjugiert ist, liegen. Man kann also in jedem Punkt der Kurve $[{}^1x(t)]$ einen quasipolaren Schmiegsimplex konstruieren (Abs. 1.2). Im Verlauf des Beweises haben wir ${}^1N = \pi_1 {}^1x$, ${}^2N = \pi_2 {}^2x$ ($\pi_1^2 = \pi_2^2 = 1$) gesetzt. Die Punkte 1N und 2N sind die nicht konjugierten Ecken des vorliegenden quasipolaren Simplexes. Vergleicht man die Formeln (5.5) bis (5.8) mit den Formeln (5.5)*–(5.8)* so folgen daraus die Relationen (5.10). Die Voraussetzung, dass die Koordinaten des K -Punktes 2N konstant sind, hat keinen Einfluss auf die Allgemeinheit; da durch die Formel (5.6)₁ der K -Punkt 1N bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist, erklären (5.10) und (5.11) den Einfluss der Wahl eines anderen arithmetischen Punktes ${}^1N^* = c {}^1N$ auf die Ergebnisse.

Satz 5.3. Die Funktionen k_1, k_2, k_3 bilden ein vollständiges System von relativen Projektivdifferential- K -Invarianten der Kurve \bar{C} in bezug auf die Gruppe der unimodularen K -Transformationen. Die Funktionen

$$\frac{k_1}{k_3}, \quad \frac{k_2}{k_3}, \quad \frac{k_1}{k_3} \quad (5.12)$$

und

$$\frac{dk_i}{dt} : k_j k_l \quad (i, j, l = 1, 2, 3, \text{beliebige, von einander unabhängige}) \quad (5.13)$$

sind (absolute) Projektivdifferential- K -Invarianten in bezug auf die vorliegende Gruppe. Zwei beliebige von den K -Invarianten (5.12) und eine beliebige von den K -Invarianten (5.13) bilden ein vollständiges System von Projektivdifferential- K -Invarianten der Kurve \bar{C} .

Beweis. Da

$$\frac{dk_i}{dt} : k_j k_l = \frac{1}{|c|} \frac{dk_i^*}{dt^*} \frac{dt^*}{dt} : \frac{1}{c^2} k_j^* k_l^* = \frac{dk_i^*}{dt^*} : k_j^* k_l^*$$

ist, so sind die Funktionen (5.13) K -Invarianten. Die übrigen Behauptungen sind offensichtlich.

Wenden wir uns jetzt zur Untersuchung der assoziierten W -Kongruenz.

Die mit der ausgegangenen W -Kongruenz assoziierte W -Kongruenz wird im Raum \bar{P}_5 durch eine Tangentenfläche der durch den geometrischen Punkt ${}^6\bar{N} = \varrho {}^6N$ ($\varrho \neq 0$, beliebige Funktion) beschriebenen Kurve \tilde{C} dargestellt. Diese Torse ist in dem Tangentialraum \bar{P}_4 der K -Quadrik Γ^+ im Punkt $\{{}^2x\}$ eingebettet.

Satz 5.4. Der durch den Punkt ${}^6\bar{N}$ beschriebenen Kurve \tilde{C} entspricht eine einzige arithmetische Kurve in Normaldarstellung, welche von dem Punkt

${}^1M = {}^1M(u) = \tilde{\pi}_1 {}^6N(t) = \pi_1^* {}^6N^*(t^*)$ ($\tilde{\pi}_1^2 = \tilde{\pi}_1^{*2} = 1$) beschrieben wird und deren Parameter u die Differentialgleichung

$$du = k_3 dt = k_3^* dt^* \quad (5.14)$$

definiert.

Zunächst gilt ${}^1M \cdot {}^1M = \varepsilon_6$. Führt man den Parameter u , bzw. u^* durch die Differentialgleichung $\frac{du}{dt} = k_3$, bzw. $\frac{du^*}{dt^*} = k_3^*$ ein, so folgt aus diesen Relationen nach (5.11)₃ sofort $du = du^*$.

Die geometrischen Punkte $\bar{M}^1 \equiv {}^6\bar{N}$, ${}^2\bar{M} \equiv {}^5\bar{N}$, ${}^3\bar{M} \equiv {}^4\bar{N}$, ${}^4\bar{M} \equiv {}^3\bar{N}$, ${}^5\bar{M} = {}^2\bar{N}$ bilden einen Schmiegsimplex der durch den Punkt ${}^1\bar{M}$ beschriebenen Kurve \tilde{C} , die in dem Tangentialraum \bar{P}_4 der K -Quadrik Γ^+ im Punkt ${}^5\bar{M}$ eingebettet ist. Die vorstehenden Punkte und der K -Punkt ${}^6\bar{M} \equiv {}^1\bar{N}$ bilden ein quasipolares Sechseck der K -Quadrik Γ^+ , dessen Ecken ${}^5\bar{M}$ und ${}^6\bar{M}$ nicht konjugiert sind; dabei ist der K -Punkt ${}^6\bar{M}$ ($\neq {}^5\bar{N}$) der Berührungspunkt des zu der K -Quadrik aus dem Raum $\bar{P}_3 \equiv \{{}^1\bar{M}, {}^2\bar{M}, {}^3\bar{M}, {}^4\bar{M}\}$ geführten Tangentialraumes \bar{P}_4 .

Satz 5.5. *Zu den geometrischen Punkten ${}^1\bar{M}, {}^2\bar{M}, \dots, {}^6\bar{M}$ kann man bis auf die Vorzeichen $\tilde{\pi}_i$ die arithmetischen Punkte iM ($i = 1, 2, 3, 4$) und bis auf eine beliebige Funktion ρ ($\neq 0$) die arithmetischen Punkte ${}^5M_{(\rho)}$, ${}^6M_{(\rho)}$ so bestimmen, dass*

$${}^iM \cdot {}^iM = \tilde{\varepsilon}_i \quad (\tilde{\varepsilon}_i^2 = 1, i = 1, 2, 3, 4) \quad (5.15)$$

und

$${}^5M_{(\rho)} \cdot {}^6M_{(\rho)} = \tilde{\varepsilon} \quad (\tilde{\varepsilon}^2 = 1) \quad (5.16)$$

ist; es gelten die Frenetschen Formeln

$$\begin{aligned} \frac{d {}^1M}{du} &= \tilde{\pi}_2 {}^2M, \\ \frac{d {}^2M}{du} &= -\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\pi}_2 {}^1M + \tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\pi}_3 \tilde{K}_1 {}^3M, \\ \frac{d {}^3M}{du} &= -\tilde{\varepsilon}_1 \tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\varepsilon}_3 \tilde{\pi}_3 \tilde{K}_1 {}^2M + \tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\pi}_4 \tilde{K}_2 {}^4M, \\ \frac{d {}^4M}{du} &= -\tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\varepsilon}_3 \tilde{\varepsilon}_4 \tilde{\pi}_4 \tilde{K}_2 {}^3M + \tilde{\varepsilon}_3 \frac{1}{\rho} {}^5M_{(\rho)}, \\ \frac{d {}^5M_{(\rho)}}{du} &= \varkappa_e {}^5M_{(\rho)}, \end{aligned} \quad (5.17)_{1-5}$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{K}_j &= \sqrt{\left| \frac{d {}^{j+1}M}{du} \cdot \frac{d {}^{j+1}M}{du} - \tilde{\varepsilon}_j \tilde{K}_{j-1}^2 \right|} \quad (\tilde{K}_0 = 1, j = 1, 2), \\ \varkappa_e &= +\tilde{\varepsilon} \frac{d {}^6M_{(\rho)}}{du} \cdot {}^5M_{(\rho)} = -\tilde{\varepsilon} \frac{d {}^5M_{(\rho)}}{du} \cdot {}^6M_{(\rho)} \end{aligned} \quad (5.18)_{1-3}$$

ist. Dabei ist

$$\frac{d {}^6M_{(\varrho)}}{du} = -\tilde{\varepsilon}\tilde{\varepsilon}_3\tilde{\varepsilon}_4 \frac{1}{\varrho} {}^4M + \varkappa_{\varrho} {}^6M_{(\varrho)}. \quad (5.19)$$

Zwei von den Zahlen ε_i sind positiv und zwei negativ.

Der Beweis folgt aus direkter Ausrechnung die wir auslassen wollen. Erwähnen wir nur: der geometrische K -Punkt ${}^5\bar{M}$ ist apriori gegeben, sodass, wenn wir beliebig einen arithmetischen K -Punkt ${}^5M_{(\varrho)}$ wählen, wird durch (5.17)₄ eindeutig die Function $\varrho (\neq 0)$ bestimmt und umgekehrt wählen wir die Funktion ϱ , wird eindeutig der arithmetische K -Punkt ${}^5M_{(\varrho)}$ definiert. Der K -Punkt ${}^5M_{(\varrho)}$ ist ein fester Punkt, so dass die Formel (5.17)₅ gilt, wobei $\varkappa_{\varrho} \equiv 0$ oder $\varkappa_{\varrho} \neq 0$ jenachdem die Koordinaten des arithmetischen Punktes ${}^5M_{(\varrho)}$ konstant oder nicht konstant sind.

Der K -Punkt ${}^6\bar{M}$ ist ein Berührungspunkt ($\neq {}^5\bar{M}$) des aus dem Raume $\bar{P}_3 \equiv [{}^1M, {}^2M, {}^3M, {}^4M]$ zu der K -Quadrik Γ^+ geführten Tangentialraumes \bar{P}_4 . Der arithmetische Punkt ${}^6M_{(\varrho)}$ wird durch

$${}^iM \cdot {}^6M_{(\varrho)} = 0, \quad {}^5M_{(\varrho)} \cdot {}^6M_{(\varrho)} = \tilde{\varepsilon} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 6; \tilde{\varepsilon}^2 = 1) \quad (5.20)$$

bestimmt.

Den Punkt $\frac{d {}^6M_{(\varrho)}}{du}$ kann man als lineare Kombination der unabhängigen Punkte ${}^1M, {}^2M, {}^3M, {}^4M, {}^5M_{(\varrho)}, {}^6M_{(\varrho)}$ ausdrücken.

Im Folgenden wählen wir die Funktion ϱ so, dass die Funktion \varkappa_{ϱ} zu einer K -Invariante der durch den Punkt 1M beschriebenen Kurve wird.

Satz 5.6. *Es seien $\varrho_1 \neq \varrho_2$ ($\varrho_1, \varrho_2 \neq 0$) beliebige Funktionen, für welche durch (5.18)₃ bestimmte Funktionen \varkappa_{ϱ_1} und \varkappa_{ϱ_2} von Null verschieden sind. Wenn $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \text{konst}$ ist, so gilt*

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_2} (\varkappa_{\varrho_2} - \varkappa_{\varrho_1}) = 0. \quad (5.21)_1$$

und wenn $\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \tilde{c} = \text{konst}$, dann ist

$$\varkappa_{\varrho_1} = \varkappa_{\varrho_2}. \quad (5.21)_2$$

Setzt man in den Formeln

$$\frac{d {}^5M_{(\varrho_1)}}{du} = \varkappa_{\varrho_1} {}^5M_{(\varrho_1)}, \quad \frac{d {}^5M_{(\varrho_2)}}{du} = \varkappa_{\varrho_2} {}^5M_{(\varrho_2)}$$

nach der aus (5.17)₄ für $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ folgenden Relationen ein, so bekommt man nach einer einfachen Ausrechnung (5.21)₁, bzw. (5.21)₂.

Satz 5.7. *Es sei*

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_0} = \tilde{\pi}_5 \tilde{c} \tilde{K}_2 \quad (\tilde{c} > 0, \text{ belieb.}, \text{ konst.}, \tilde{\pi}_5^2 = 1). \quad (5.22)$$

Dann bilden die Funktionen \tilde{K}_j ($j = 1, 2$), $\tilde{K} = \kappa_{e_9}$ und die Zahlen ε_i ($i = 1, 2, 3, 4$) K -Invarianten der behandelten Kurve \tilde{C} und es gilt

$$\tilde{K}_1 = \frac{k_2}{k_3}, \quad \tilde{K}_2 = \frac{k_1}{k_3}, \quad \tilde{K} = -\frac{dk_1}{du} : k_1 = \frac{dk_1}{dt} : k_1 k_3 \quad (5.23)_{1-3}$$

und

$$\tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_{7-i} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (5.24)_{1-4}$$

wobei k_1, k_2, k_3 und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ in dem Satz 5.2 bestimmt werden.

Beweis. Durch Vergleichen der Formeln aus den Sätzen 5.5 und 5.2 bekommen wir die Relationen (5.23)_{1,2} und (5.24)₁₋₄ und weiter

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_1 {}^1M &= {}^6N, \\ \tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2 {}^2M &= -\varepsilon_4 \varepsilon_5 \varepsilon_6 \pi_6 {}^5N, \\ \tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2 \tilde{\pi}_3 {}^3M &= \varepsilon_3 \pi_5 \pi_6 {}^4N, \\ \tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2 \tilde{\pi}_3 \tilde{\pi}_4 {}^4M &= -\varepsilon_4 \varepsilon_5 \pi_4 \pi_5 \pi_6 {}^3N. \end{aligned} \quad (5.25)_{1-4}$$

Da die geometrischen Punkte ${}^5\bar{M}$ und ${}^2\bar{N}$ identisch sind, gelten für die arithmetischen Punkte ${}^5M_{(e_9)} = {}^5M$ und 2N (mit konstanten Koordinaten) die Formeln

$${}^5M = \tilde{k} {}^2N, \quad \frac{d{}^5N}{du} = \tilde{K} {}^5M, \quad (5.26)$$

wobei

$$\tilde{K} = \frac{d\tilde{k}}{du} : \tilde{k} \quad (5.27)$$

ist. Berechnen wir die Funktionen \tilde{k} und \tilde{K} . Setzt man in (5.17)₄ nach (5.23)_{1,2}, (5.24)₁₋₄ und (5.25)₁₋₄ ein und vergleicht mit (5.7)₂, so folgt

$$\tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2 \tilde{\pi}_3 \tilde{\pi}_4 \tilde{\pi}_5 \tilde{c} {}^5M = \varepsilon_3 \varepsilon_5 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_6 \frac{1}{k_1} {}^2N \quad (5.25)_5$$

und also

$$\tilde{k} = \tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2 \tilde{\pi}_3 \tilde{\pi}_4 \tilde{\pi}_5 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_6 \varepsilon_3 \varepsilon_5 \frac{1}{\tilde{c} k_1};$$

eine formale Nachrechnung ergibt (5.23)₃. Erwähnen wir, dass die Funktion \tilde{K} von der Konstant \tilde{c} nicht abhängt.

Für die arithmetischen Punkte ${}^6M_{(e_9)} = {}^6M$ und 1N gilt

$$\tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2 \tilde{\pi}_3 \tilde{\pi}_4 \tilde{\pi}_5 \tilde{c} {}^6M = -\pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_6 \varepsilon_3 \varepsilon_5 k_1 {}^1N. \quad (5.25)_6$$

In Hinsicht darauf, dass die Funktionen der rechten Glieder der Relationen (5.23)₁₋₃ K -Invarianten der ursprünglichen Kongruenz sind, so sind die Funktionen $\tilde{K}_1, \tilde{K}_2, \tilde{K}$ K -Invarianten der assoziierten Kongruenz, da jede von diesen Kongruenzen die andere eindeutig bestimmt.

Bemerkung 5.1. Setzt man formal nach den Betrachtungen im allgemeinen Fall $\tilde{K}_3 = \sqrt{\left| \frac{d^4 M}{du} \cdot \frac{d^4 M}{du} - \tilde{\varepsilon}_4 \tilde{K}_2^2 \right|}$, so bekommt man $\tilde{K}_3 \equiv 0$ und für $\tilde{K}_4 = \sqrt{\left| \frac{d^5 M}{du} \cdot \frac{d^5 M}{du} - \tilde{\varepsilon}_5 \tilde{K}_3^2 \right|}$ folgt in ähnlicher Weise $\tilde{K}_4 \equiv 0$. Daraus ersehen wir, dass die letzte K -Invariante in anderer Weise einzuführen ist.

Bemerkung 5.2. Durch Differentiation der Relation (5.20) bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{d^5 M_{(\varrho)}}{du} = & \tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\varepsilon}_4 \tilde{\pi}_4 \left(\frac{d\varrho}{du} \tilde{K}_2 + \varrho \frac{d\tilde{K}_2}{du} \right) {}^3M + \varrho \tilde{\varepsilon}_2 \tilde{\varepsilon}_4 \tilde{\pi}_4 \tilde{K}_2 \frac{d^3 M}{du} + \\ & + \frac{d\varrho}{du} \tilde{\varepsilon}_3 \frac{d^4 M}{du} + \varrho \tilde{\varepsilon}_3 \frac{d^2 {}^4M}{du^2}; \end{aligned} \quad (5.28)$$

daraus folgt, dass die Punkte 3M , $\frac{d^3 M}{du}$, $\frac{d^4 M}{du}$, $\frac{d^2 {}^4M}{du^2}$ und ${}^5M_{(\varrho)}$ linear abhängig sind und darum in demselben Raum \bar{P}_3 liegen. Da aber nach (5.17)₄ die Punkte ${}^5M_{(\varrho)}$, 3M und $\frac{d^4 M}{du}$ auch linear abhängig sind, so liegen die fünf vorliegenden Punkte sogar in demselben Raum \bar{P}_2 . Der Punkt $Y_{(\varrho)} = \frac{d^5 M_{(\varrho)}}{du} - \varrho \tilde{\varepsilon}_3 \frac{d^2 {}^4M}{du^2}$, bei verschiedener Wahl der Funktion ϱ , liegt im allgemeinen (bei veränderlichem u) auf der Verbindungsgeraden des Punktes 3M und eines gewissen Punktes der Geraden $y \equiv \left[\frac{d^3 M}{du}, \frac{d^4 M}{du} \right]$. Wenn (5.22) gilt, dann ist der Koeffizient bei 3M in der Relation (5.28) identisch gleich Null und der Punkt $Y_{(\varrho)} = Y_{(\varrho_0)}$ liegt auf der Geraden y (bei veränderlichem u) und ebenso umgekehrt. So wird die Bedingung (5.22) geometrisch interpretiert.

Satz 5.7. *Die Fokalflächen der Kongruenz, die zu einer einem speziellen linearen Komplex angehörnden Kongruenz assoziiert ist, sind dann und nur dann reell, wenn $\tilde{\varepsilon}_1 = -\tilde{\varepsilon}_2$ ist. Die Regelscharen der beiden assoziierten Kongruenzen des vorstehenden Types sind immer reell.*

6. Segresche W -Kongruenzen, deren Fokalflächen einer linearen Kongruenz angehören. W -Kongruenzen des vorliegenden Types werden im Raume \bar{P}_5 durch eine Tangentenfläche einer Kurve \bar{C} , die in einem Raum \bar{P}_3 eingebettet ist, dargestellt; \bar{P}_3 ist kein Tangentialraum der K -Quadrik Γ^+ . Die zu der vorstehenden assoziierte Kongruenz artet in eine lineare Kongruenz aus, deren Fokalflächen der W -Kongruenz angehören; die Leitgeraden dieser linearen Kongruenz bilden sich als Schnittpunkte der Geraden \bar{P}_1 (polaren zu dem Einbettungsraum \bar{P}_3) mit der K -Quadrik Γ^+ ab. Je zwei beliebige

Regelflächen einer linearen Kongruenz bilden die Fokalflächen einer bestimmten Segreschen W -Kongruenz, deren assoziierte Kongruenz die lineare Kongruenz ist.

Setzt man voraus, dass für die Kurve $\bar{C} \subset \bar{P}_3$ analoge Vereinbarungen wie am Anfang des Absatzes 3 gelten, definieren wir zu der geometrischen Kurve $\bar{C} \equiv \{x(t)\}$ die arithmetische Kurve $[x]$ in Normaldarstellung für welche folgender Satz gilt.

Satz 6.1. *Es seien ${}^5\bar{N}$ und ${}^6\bar{N}$ zwei beliebige feste Punkte des Raumes \bar{P}_5 , deren Verbindungsgerade keine Tangente der K -Quadrik Γ^+ ist und die Kurve \bar{C} sei im polaren Raum \bar{P}_3 der Geraden $\{{}^5\bar{N}, {}^6\bar{N}\}$ eingebettet.⁸⁾*

In jedem Punkt der arithmetischen Kurve

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, 6) \quad (6.1)$$

in Normaldarstellung existiert ein Schmiegsimplex mit den Ecken ${}^1\bar{N} = \rho x$, ${}^2\bar{N}$, ${}^3\bar{N}$, ${}^4\bar{N}$, die mit den Punkten ${}^5\bar{N}$ und ${}^6\bar{N}$ ein polares, bzw. quasipolares Sechseck der K -Quadrik Γ^+ bilden, falls ${}^5\bar{N}$ und ${}^6\bar{N}$ konjugierte oder nicht konjugierte Punkte in bezug auf die K -Quadrik sind. Man kann bis auf die Vorzeichen π_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die arithmetischen Punkte iN so bestimmen, dass

$${}^iN \cdot {}^iN = \varepsilon_i \quad (\varepsilon_i^2 = 1, i = 1, 2, 3, 4) \quad (6.2)$$

ist, für welche die Frenetschen Formeln

$$\begin{aligned} {}^1N' &= \pi_2 {}^2N, \\ {}^2N' &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \pi_2 {}^1N + \varepsilon_1 \pi_3 K_1 {}^3N, \\ {}^3N' &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 \pi_3 K_1 {}^2N + \varepsilon_2 \pi_4 K_2 {}^4N, \\ {}^4N' &= -\varepsilon_2 \varepsilon_3 \varepsilon_4 \pi_4 K_2 {}^3N, \end{aligned} \quad (6.3)_{1-4}$$

gelten, wobei

$$K_j = \sqrt{|{}^{j+1}N' \cdot {}^{j+1}N' - \varepsilon_j K_{j-1}^2|} \quad (K_0 = 1, j = 1, 2) \quad (6.4)$$

und ${}^iN \cdot {}^5\bar{N} = {}^iN \cdot {}^6\bar{N} = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$) ist.

Schneidet die Verbindungsgerade $\{{}^5\bar{N}, {}^6\bar{N}\}$ die K -Quadrik Γ^+ in reellen Punkten (nicht), dann werden zwei von den Zahlen ε_i positiv und zwei negativ (eine von den Zahlen ε_i positiv, bzw. negativ und die anderen drei negativ, bzw. positiv).

Nach C. Segre kann man zu der ursprünglichen W -Kongruenz des untersuchten Types noch eine assoziierte Segresche W -Kongruenz (die keine lineare Kongruenz ist) einführen. Diese assoziierte Kongruenz (der zweiten Art) wird in \bar{P}_5 durch die Tangentenfläche der durch den Punkt ${}^4\bar{N} = {}^1\bar{M}$ beschriebenen Kurve dargestellt. Wir bekommen dann den

⁸⁾ Für die Punkte x der Kurve \bar{C} gilt $x^{(k)} \cdot {}^5\bar{N} = x^{(k)} \cdot {}^6\bar{N} = 0$ (k natürliche Zahl).

Satz 6.2. Für die K -Invarianten \tilde{K}_j und $\tilde{\varepsilon}_i$ ($j = 1, 2; i = 1, 2, 3, 4$) der durch den Punkt ${}^4N = {}^1M$ beschriebenen arithmetischen Kurve in Normaldarstellung, deren Parameter u die Differentialgleichung

$$\frac{du}{dt} = K_2 \quad (6.5)$$

bestimmt, gilt

$$\tilde{K}_j = \frac{K_{2-j}}{K_2}, \quad \tilde{\varepsilon}_i = \varepsilon_{5-i} \quad (\tilde{K}_0 = 1; j = 1, 2; i = 1, 2, 3, 4). \quad (6.6)$$

Die Torse der vorstehenden arithmetischen Kurve stellt in \bar{P}_5 eine assoziierte W -Kongruenz der 2. Art dar.

7. Dualisation der Segreschen W -Kongruenzen. Die Grundelemente des projektiven Raumes P_3 in den vorangegangenen Betrachtungen waren Punkte. Darum fassen wir die Koordinaten der K -Punkte, die in den Betrachtungen im 2.—6. Absatz vorkommen, als Linienkoordinaten der entsprechenden Geraden auf.

Betrachten wir jetzt den dualen Raum P_3^* , in welchem eine Gerade als Schnitt zweier Ebenen dargestellt wird. Die Dualisation L^* einer Segreschen W -Kongruenz wird im Raum \bar{P}_5^* (mit der K^* -Quadrik Γ^{*+}) wieder durch eine Torse dargestellt. Führen wir in dem dualen Fall die analogen Betrachtungen aus dem Absatz 1—6 durch, bekommen wir durchaus übereinstimmende Ergebnisse, sodass wir die dem dualen Fall entsprechenden Relationen aus den Relationen des Absatz 1—6 durch die Transformation

$$\left(\begin{array}{l} (x, P_i, \bar{P}_i, K\text{-Gebilde, } \varepsilon_i, K_j, \pi_i, {}^iN, t, {}^iM \text{ usw.})^9 \\ (x^*, P_i^*, \bar{P}_i^*, K^*\text{-Gebilde, } \varepsilon_i^*, K_j^*, \pi_i^*, {}^iN^*, t^*, {}^iM^* \text{ usw.}) \end{array} \right) \quad (7.1)$$

gewinnen.

Die Koordinaten der K^* -Punkte im dreidimensionalen Raum werden entweder zu Linienkoordinaten im Raum P_3^* oder zu Achsenkoordinaten in P_3 .

Satz 7.1. Die K -Invarianten einer Torse des Raumes \bar{P}_5 , die eine Segresche W -Kongruenz des Raumes P_3 darstellt und K^* -Invarianten der Torse des Raumes \bar{P}_5^* , die die Dualisation derselben W -Kongruenz darstellt, sind einander gleich.

Folgerung 7.1. Das vollständige System der K -Invarianten bestimmt im fünf-dimensionalen projektiven Kleinschen Raum eine orientierte Torse bis auf unimodulare K -Transformationen. Dieser Torse entspricht im dreidimensionalen projektiven Raum eine W -Kongruenz mit geradlinigen Fokalflächen, und zwar

⁹⁾ Die Bezeichnung der Punkte mit Sternchen im Absatz 5 hängt nicht mit der Dualisation zusammen. Da wir die dualen Betrachtungen nicht explizite durchführten werden, ist auf diese Kollision der Bezeichnung keine Rücksicht zu nehmen.

eine W -Kongruenz als orientierte Schicht von Regelscharen, die bis auf projektive Transformationen und bis auf die Dualisation bestimmt ist.

Beweis. Die Linien- und Achsenkoordinaten p_i und p_i^* einer Geraden erfüllen die Relationen

$$p_1 = \lambda p_4^*, p_2 = \lambda p_5^*, p_3 = \lambda p_6^*, p_4 = \lambda p_1^*, p_5 = \lambda p_2^*, p_6 = \lambda p_3^* \quad (\lambda \neq 0),$$

welche eine gegenseitige Korrespondenz der geometrischen K -Punkte des Raumes \bar{P}_5 und der geometrischen K^* -Punkte von \bar{P}_5^* bestimmen. Diese Korrespondenz kann man auf alle Punkte der Räume \bar{P}_5 und \bar{P}_5^* durch die Gleichung

$$x_1 = \lambda x_4^*, x_2 = \lambda x_5^*, x_3 = \lambda x_6^*, x_4 = \lambda x_1^*, x_5 = \lambda x_2^*, x_6 = \lambda x_3^* \quad (7.2)$$

erweitern.

Man sieht leicht, dass für die Punkte x einer in Normaldarstellung gegebenen Kurve des Raumes \bar{P}_5 und die Punkte x^* einer in Normaldarstellung gegebenen Kurve des Raumes \bar{P}_5^* die Transformation (7.2) mit $|\lambda| = 1$ gilt. Daraus folgt, dass die K -Invarianten und K^* -Invarianten in den korrespondierenden Punkten x und x^* einander gleich sind.

II

1. Einführung.

1.1. In der Abhandlung [4] werden folgende Behauptungen bewiesen:

Das System der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} y' &= \left(Q + S - \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) y - Pz + \alpha \bar{y}, \\ z' &= Ry + \left(S - Q - \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) z + \alpha \bar{z}, \\ \bar{y}' &= - \left(Q + S + \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \bar{y} + P\bar{z} + \pi \alpha y, \\ \bar{z}' &= - R\bar{y} + \left(Q - S - \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \bar{z} + \pi \alpha z, \end{aligned} \tag{1.1}_1$$

(wobei $\pi^2 = 1$ und $P, Q, R, S, \alpha \neq 0$ Funktionen des Parameters v sind und die Striche Ableitungen nach demselben Parameter bedeuten, der die Relation

$$\left(y, z, \frac{dy}{dv}, \frac{dz}{dv} \right) = \left(\bar{y}, \bar{z}, \frac{d\bar{y}}{dv}, \frac{d\bar{z}}{dv} \right) = \omega \quad (\omega^2 = 1) \tag{1.1}_2$$

erfüllt) bestimmt im Raume P_3 bis auf unimodulare Kollineationen zwei Paare der Leitkurven C_y, C_z , bzw. $C_{\bar{y}}, C_{\bar{z}}$ zweier reellen Regelflächen, die Fokalfächen einer W -Kongruenz sind. Dabei korrespondieren die Geraden

der Fokalflächen, welche denselben Wert des Parameters v besitzen, in der durch die W -Kongruenz realisierten asymptotischen Transformation miteinander.

Im Weiteren sind noch folgende Funktionen und Konstanten wichtig:

$$\omega, \pi, Q^2 - PR, H = Q'^2 - P'R', \alpha \neq 0, S, K = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix}, \quad (1.2)$$

wobei $\omega^2 = \pi^2 = 1$ und $H, \alpha \neq 0, S, K$ Funktionen des Parameters v sind und die Striche Ableitungen nach v bedeuten.

Die Relation $S \equiv 0$ ($K \equiv 0$) drückt aus, dass die gegebene W -Kongruenz (die zu der gegebenen assoziierten W -Kongruenz) einem linearen Komplex angehört. Die fleknodalen W -Kongruenzen werden durch $Q^2 - PR \equiv 0$ gekennzeichnet. W -Kongruenzen, deren assoziierte W -Kongruenzen einem speziellen linearen Komplex angehören, werden durch die Bedingung $U = (Q^2 - PR)^2 - 4(Q^2 - PR)H \equiv 0$, die zur Folge $K \equiv 0$ hat und durch die Bedingung, dass die Matrix $\begin{pmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \end{pmatrix}$ vom Rang 2 ist, bestimmt. Wenn $U \equiv 0$ und die erwähnte Matrix von Rang 1 ist, so artet die assoziierte W -Kongruenz in eine lineare Kongruenz aus.

Ist der Parameter v ein s. g. normaler Parameter,¹⁰⁾ dann bilden die Ausdrücke

$$\omega, \pi, \varepsilon = Q^2 - PR, H, \alpha \neq 0, S, K \quad (1.3)$$

($\omega^2 = \pi^2 = \varepsilon^2 = 1$ und $H \neq 0, \alpha, S, K$ sind Funktionen des normalen Parameters) ein vollständiges System von Projektivdifferentialinvarianten der betrachteten W -Kongruenz, als einer orientierten Schicht von Regelscharen, wobei die assoziierte W -Kongruenz keinem speziellen linearen Komplex angehört. Durch diese Invarianten wird die W -Kongruenz bis auf unimodulare Kollineationen bestimmt.

Ist $H \equiv 0$, wobei H eine Funktion des normalen Parameters ist, so gehört die assoziierte W -Kongruenz einem speziellen linearen Komplex an; die Relation $H \equiv 0$ hat gleichzeitig $K \equiv 0$ zur Folge. Die Invarianten H und K werden nicht unabhängig und es ist also eine neue Invariante einzuführen. Für diesen Typ der W -Kongruenzen kann man in das System (1.1)₁

$$P = 0, \quad Q = -\varphi, \quad R = 2\beta_1 \quad (\varphi^2 = \varepsilon = 1) \quad (1.4)$$

einführen; die Vorzeichen und die Funktionen

$$\omega, \pi, \varepsilon = Q^2 - PR = 1, \quad \alpha \neq 0, \quad S, \quad \lambda = \frac{R''}{R'} = \frac{\beta_1''}{\beta_1'} \quad (1.5)$$

¹⁰⁾ Der normale Parameter \bar{v} und der allgemeine Parameter v , der durch die Relation (1.1)₂ definiert wird, erfüllen die Differentialgleichung $d\bar{v} = \sqrt{|Q^2 - PR|} dv$, wobei $Q^2 - PR (\neq 0)$ Funktion von v ist. ([4], S. 16.)

bilden dann ein vollständiges System von unimodularen Projektivdifferentialinvarianten der Kongruenz des erwähnten Types. Aus (1.5) folgt

$$\beta_1 = c_1 \int e^{\lambda dv} dv + c_2 \quad (c_1 \neq 0), \quad (1.6)$$

sodass λ die Funktion β_1 bis auf die Substitutionen mit konstanten Koeffizienten bestimmt; verschiedener Wahl der Konstanten c_1 und c_2 entsprechen verschiedene Leitkurven der Fokalfächen.

1.2. Damit man die weiteren Untersuchungen ohne lange Rechnung ausführen kann, führen wir in dem folgenden Lemma einige Relationen ein, die aus den Relationen der Abhandlung [4] folgen.

Lemma 1.1. *Es sei eine W-Kongruenz durch ein System der Differentialgleichungen (1.1)₁ gegeben und der Parameter, der die Relation (1.1)₂ erfüllt, sei kein normaler Parameter. Dann gilt, so die Striche Ableitungen nach v bedeuten:*

$$\begin{aligned} (yz)' &= \left(2S - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)(yz) + \alpha \overline{(y\bar{z})} - (z\bar{y}), \\ (\bar{y}\bar{z})' &= -\left(2S + \frac{\alpha'}{\alpha}\right)(\bar{y}\bar{z}) + \pi\alpha \overline{(y\bar{z})} - (z\bar{y}), \\ (y\bar{y})' &= -\frac{\alpha'}{\alpha}(y\bar{y}) + P \overline{(y\bar{z})} - (z\bar{y}), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} (z\bar{z})' &= -\frac{\alpha'}{\alpha}(z\bar{z}) + R \overline{(y\bar{z})} - (z\bar{y}), \\ (y\bar{z})' &= \left(2Q - \frac{\alpha'}{\alpha}\right)(y\bar{z}) - P(z\bar{z}) - R(y\bar{y}) + \alpha \overline{\pi(yz) + (\bar{y}\bar{z})}, \\ (z\bar{y})' &= -\left(2Q + \frac{\alpha'}{\alpha}\right)(z\bar{y}) + P(z\bar{z}) + R(y\bar{y}) - \alpha \overline{\pi(yz) + (\bar{y}\bar{z})}, \\ (y, z, \bar{y}, \bar{z}) &= \frac{\omega}{\alpha^2}, \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$(Q^2 - PR)' = 2QQ' - PR' - P'R, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} 2(Q^2 - PR)R' - (Q^2 - PR)'R &= 2Q^2R' - PRR' - 2QRQ' + R^2P' (= A), \\ 2(Q^2 - PR)P' - (Q^2 - PR)'P &= 2Q^2P' - PRP' - 2PQQ' + P^2R' (= B), \\ 2(Q^2 - PR)Q' - (Q^2 - PR)'Q &= -2PRQ' + RQP' + PQR' (= C),^{11)} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$U = \begin{vmatrix} P & 2Q & R & 0 \\ 0 & P & 2Q & R \\ P' & 2Q' & R' & 0 \\ 0 & P' & 2Q' & R' \end{vmatrix} = (Q^2 - PR)^2 - 4(Q^2 - PR)H, \quad (1.17)$$

¹¹⁾ Die Ausdrücke A, B, C hängen nicht mit den Ausdrücken A, B, C in der Abhandlung 4], S. 6, zusammen.

$$U = (PR' - RP')^2 - 4(QR' - RQ')(PQ' - QP'), \quad (1.18)$$

$$(Q^2 - PR)U = AB - C^2, \quad (1.19)$$

$$AP + BR - 2CQ = 0, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} [U(Q^2 - PR)]' A - 2U(Q^2 - PR) A' &= 8K(Q^2 - PR)^2(QR' - RQ') - RU^2, \\ [U(Q^2 - PR)]' B - 2U(Q^2 - PR) B' &= 8K(Q^2 - PR)^2(PQ' - QP') - PU^2, \\ [U(Q^2 - PR)]' C - 2U(Q^2 - PR) C' &= -4K(Q^2 - PR)^2(PR' - RP') + \\ &+ QU^2. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Beweis. Die Relationen (1.13) folgen unter Verwendung von (1.1)₁ und durch Differentiation. Setzt man in (1.1)₂ nach (1.1)₁ ein, so folgt die Relation (1.14). Die anderen Identitäten werden durch Ausschreiben der beiden Glieder verifiziert.

Bemerkung 1.1. Die vorliegenden Relationen kann man leicht für einen normalen Parameter, bzw. für einzelne Typen der W -Kongruenzen abändern.

2. Segresche W -Kongruenzen, die keinem linearen Komplex angehören. In diesem Absatz werden W -Kongruenzen als orientierte Schichte von Regelscharen und ihre assoziierte Kongruenzen untersucht; dabei gehört keine von den untersuchten W -Kongruenzen einem linearen Komplex an. In dem betrachteten Intervall eines beliebigen Parameters v , der (1.1)₂ erfüllt, seien die Funktionen $S, U, K, Q^2 - PR$ von Null verschieden.

Satz 2.1. *Es sei eine W -Kongruenz durch das System der Differentialgleichungen (1.1)₁ gegeben, wobei die Striche Ableitungen nach dem Parameter v bedeuten, der (1.1)₂ erfüllt und kein normaler Parameter ist. Diese Kongruenz wird im Raume \bar{P}_5 durch die arithmetische Kurve (in Normalform), welche der arithmetische Punkt*

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} v|\alpha|[(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})] \quad (2.1)$$

(wobei v ($v^2 = 1$) das Vorzeichen des Homogenitätsfaktors ist) beschreibt, dargestellt; diese arithmetische Kurve besitzt einen Parameter t , der durch die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2|S|} \quad (2.2)$$

definiert wird.

¹²⁾ Der positive Durchlaufsinne der Schicht der Regelscharen einer W -Kongruenz, bzw. der Kurve \bar{C} im \bar{P}_5 wird durch den wachsenden Parameter v , bzw. t definiert.

Die Ecken des polaren Schmiegechsecks, der durch den Punkt (2.1) beschriebenen Kurve, bilden folgende Punkte

$$\begin{aligned}
 {}^1N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \nu |\alpha| [(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})], \\
 {}^2N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 \nu |\alpha| \operatorname{sgn} S[(yz) + \pi(\bar{y}\bar{z})], \\
 {}^3N &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi \omega \nu \alpha \operatorname{sgn} S[(y\bar{z}) - (z\bar{y})], \\
 {}^4N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \nu (\operatorname{sgn} S) \frac{\alpha}{\sqrt{|Q^2 - PR|}} [R(y\bar{y}) + P(z\bar{z}) - Q(y\bar{z}) - Q(z\bar{y})], \\
 {}^5N &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \omega \nu \operatorname{sgn} [(S(Q^2 - PR))] \frac{\alpha}{\sqrt{|U(Q^2 - PR)|}} [A(y\bar{y}) + B(z\bar{z}) - \\
 &\quad - C(y\bar{z}) + (z\bar{y})], \\
 {}^6N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_6 \nu \operatorname{sgn} [(Q^2 - PR) SUK] \frac{\alpha}{\sqrt{|U|}} [2(QR' - RQ')(y\bar{y}) + \\
 &\quad + 2(PQ' - QP')(z\bar{z}) - (PR' - RP')(\bar{y}\bar{z}) - (z\bar{y})], \\
 &\quad (\pi_1^2 = \pi_2^2 = \dots = \pi_6^2 = 1, \text{ belieb.}).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

K -Invarianten der Kurve $[x]$ werden durch die Formeln

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \left| \frac{\alpha}{S} \right|, \quad K_2 = \frac{\sqrt{|Q^2 - PR|}}{|S|}, \quad K_3 = \frac{\sqrt{|U|}}{4|S(Q^2 - PR)|}, \\
 K_4 &= \frac{|K| \sqrt{|Q^2 - PR|}}{|SU|}
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

und

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &= -\pi\omega, \quad \varepsilon_2 = \pi\omega, \quad \varepsilon_3 = -\omega, \quad \varepsilon_4 = \omega \operatorname{sgn} (Q^2 - PR), \\
 \varepsilon_5 &= -\omega \operatorname{sgn} [U(Q^2 - PR)], \quad \varepsilon_6 = \omega \operatorname{sgn} U
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

bestimmt.

Beweis. Es sei $\bar{x} = \nu_1(yz) + \nu_2(\bar{y}\bar{z})$ (ν_1, ν_2 Funktionen von ν) ein Punkt auf der Verbindungsgeraden der K -Punkte (yz) und $(\bar{y}\bar{z})$, die Bilder zweier einander korrespondierenden Erzeugenden der Fokalflächen der gegebenen W -Kongruenz sind.

Der Punkt \bar{x} beschreibt die Rückkehrkante der Torse, die durch die Verbindungsgeraden der K -Punkte (yz) und $(\bar{y}\bar{z})$ erzeugt wird, dann und nur dann, wenn $\nu_2 + \pi\nu_1 = 0$ ist, sodass die Rückkehrkante durch den geometrischen Punkt

$$\bar{x} = \nu_1[(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})]$$

beschrieben wird.

Für den arithmetischen Punkt (2.1) bekommt man $x.x = -\pi\omega$, also gilt (2.5)₁. Statt des Parameters ν führen wir einen neuen Parameter t so ein,

damit $\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \varepsilon_2$ ist. Da $x' \cdot x' = 4\pi\omega S^2$ ist, so ist der neue Parameter durch die Differentialgleichung

$$4\pi\omega S^2 = \varepsilon_2 \left(\frac{dt}{dv}\right)^2 \quad (2.6)$$

bestimmt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass der Parameter t reell ist, ist gerade (2.5)₂. Dass die Fokalflächen reell sind, ersieht man aus den Relationen (2.5)₁ und (2.5)₂, sodass die Bedingung $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ erfüllt ist. Setzen wir voraus, dass der Schicht mit positivem Durchlaufsinne die Kurve des Raumes \bar{P}_5 entspricht, die auch positiven Durchlaufsinne besitzt; die Differentialgleichung (2.6) wird daher so erfüllt, dass (2.2) gilt.

Benützt man die Frenetschen Formeln (3.6) (Abs. I.3) und die Relationen des Lemmas 1.2 (Abs. II.1) so folgen durch direkte Nachrechnung die Relationen (2.3) und der Reihe nach noch

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N}{dt} &= \frac{\sqrt{2}\pi_1\pi_2\nu|\alpha|}{2S} [S(yz) - \pi S(\bar{y}\bar{z}) + \alpha(y\bar{z}) - \alpha(\bar{z}y)], \\ \frac{d^3 N}{dt} &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1\pi_2\pi_3\pi\omega\nu \frac{\alpha}{S} [\pi\alpha(yz) + \alpha(\bar{y}\bar{z}) - R(y\bar{y}) - P(z\bar{z}) + Q(\bar{y}\bar{z}) + (\bar{z}y)], \\ \frac{d^4 N}{dt} &= \frac{\sqrt{2}}{8} \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\nu \frac{\alpha}{S(Q^2 - PR)\sqrt{|Q^2 - PR|}} [A(y\bar{y}) + B(z\bar{z}) - \\ &\quad - C + 4(Q^2 - PR)^2(y\bar{z}) - C - 4(Q^2 - PR)^2(\bar{z}y)], \\ \frac{d^5 N}{dt} &= \frac{\sqrt{2}}{8} \pi_1\pi_2\pi_3\pi_4\pi_5\nu\omega \frac{\alpha}{SU|Q^2 - PR|\sqrt{|U(Q^2 - PR)|}} \{[8K(Q^2 - PR)^2(QR' - \\ &\quad - RQ') - RU^2](y\bar{y}) + [8K(Q^2 - PR)^2(PQ' - QP') - PU^2](z\bar{z}) - \\ &\quad - [4K(Q^2 - PR)^2(PR' - RP') - QU^2](y\bar{z}) + (\bar{z}y)\}; \\ \frac{d^2 N}{dt} \cdot \frac{d^2 N}{dt} - \varepsilon_1 &= -\omega \frac{\alpha^2}{S^2}, \\ \frac{d^3 N}{dt} \cdot \frac{d^3 N}{dt} - \varepsilon_2 K_1^2 &= \omega \frac{Q^2 - PR}{S^2}, \\ \frac{d^4 N}{dt} \cdot \frac{d^4 N}{dt} - \varepsilon_3 K_2^2 &= -\omega [\operatorname{sgn}(Q^2 - PR)] \frac{U}{16S^2(Q^2 - PR)^2}, \\ \frac{d^5 N}{dt} \cdot \frac{d^5 N}{dt} - \varepsilon_4 K_3^2 &= \omega \operatorname{sgn}[U(Q^2 - PR)] \frac{K^2(Q^2 - PR)}{S^2 U^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Daher bekommt man sofort die Relationen (2.4) und (2.5).

In dem Satz 2.1 werden die K -Invarianten der Kurve des Raumes \bar{P}_5 die eine durch das System (1.1)₁ gegebene Segresche W -Kongruenz darstellt, unter der Voraussetzung bestimmt, dass der Parameter v kein normaler

Parameter ist. Die Funktionen $\left| \frac{\alpha}{S} \right|$, $\frac{\sqrt{|Q^2 - PR|}}{|S|}$, $\frac{\sqrt{|U|}}{4|S(Q^2 - PR)|}$, $\frac{|K|\sqrt{|Q^2 - PR|}}{|SU|}$ als Funktionen des Parameters t bilden Projektivdifferentialinvarianten der W -Kongruenz des Raumes P_3 . Wenn wir statt des allgemeinen Parameters, der nur die Relation (1.1)₂ erfüllt, einen normalen Parameter¹⁾ einführen, so bekommen wir die Formulierung der K -Invarianten der Kurve des Raumes \bar{P}_5 mittels der Invarianten (1.3) der untersuchten W -Kongruenz.

Satz 2.2. *Es sei eine W -Kongruenz durch das System der Differentialgleichungen (1.1)₁ gegeben und der Parameter v sei ein normaler Parameter. Diese Kongruenz wird im Raume \bar{P}_5 durch eine reelle arithmetische Kurve in Normaldarstellung dargestellt, welche durch den arithmetischen Punkt*

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} v |\alpha| [(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})] \quad (2.8)$$

(wobei v ($v^2 = 1$) das Vorzeichen des Homogenitätsfaktors ist) beschrieben wird. Der Parameter t dieser Kurve wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2|S|} \quad {}^{13)} \quad (2.9)$$

bestimmt. Die Ecken ${}^1N, {}^2N, {}^3N, {}^4N, {}^5N, {}^6N$ des im Abs. I.3 eingeführten Sechsecks sind

$$\begin{aligned} {}^1N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 v |\alpha| [(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})], \\ {}^2N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 v |\alpha| (\operatorname{sgn} S) [(yz) + \pi(\bar{y}\bar{z})], \\ {}^3N &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi \omega v \alpha (\operatorname{sgn} S) [(y\bar{z}) - (z\bar{y})], \\ {}^4N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 v \alpha (\operatorname{sgn} S) [R(y\bar{y}) + P(z\bar{z}) - Q(y\bar{z}) - Q(z\bar{y})], \\ {}^5N &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \omega v (\operatorname{sgn} S) \frac{\alpha}{\sqrt{|H|}} [R'(y\bar{y}) + P'(z\bar{z}) - Q'(y\bar{z}) - Q'(z\bar{y})], \\ {}^6N &= -\frac{\sqrt{2}}{4} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_6 v \operatorname{sgn} (SHK) \frac{\alpha}{\sqrt{|H|}} [2(QR' - RQ')(y\bar{y}) + \\ &\quad + 2(PQ' - QP')(z\bar{z}) + (RP' - PR')(y\bar{z}) + (z\bar{y})], \\ &\quad (\pi_1^2 = \pi_2^2 = \dots = \pi_6^2 = 1, \text{ belieb.}), \end{aligned} \quad (2.10)_{1-6}$$

wobei die Striche Ableitungen nach dem normalen Parameter v bedeuten.

¹³⁾ Es gilt dieselbe Bemerkung wie für die Differentialgleichung (2.2).

Die K -Invarianten, der durch den Punkt (2.8) beschriebenen Kurve sind

$$K_1 = \left| \frac{\alpha}{S} \right|, \quad K_2 = \frac{1}{|S|}, \quad K_3 = \frac{\sqrt{|H|}}{2|S|}, \quad K_4 = \frac{|K|}{4|SH|}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = -\pi\omega, \quad \varepsilon_2 = \pi\omega, \quad \varepsilon_3 = -\omega, \quad \varepsilon_4 = \omega\varepsilon, \quad \varepsilon_5 = \omega \operatorname{sgn} H, \\ \varepsilon_6 = -\omega\varepsilon \operatorname{sgn} H. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Setzt man in die Relationen des Satzes 2.1 nach (1.13) und (1.14) (Striche bedeuten Ableitungen nach dem normalen Parameter) und nach

$$\begin{aligned} Q^2 - PR = \varepsilon \quad (\varepsilon^2 = 1), \quad (Q^2 - PR)' = 2QQ' - PR' - RP' = 0, \\ A = 2\varepsilon R', \quad B = 2\varepsilon P', \quad C = 2\varepsilon Q', \quad U = -4\varepsilon H \end{aligned}$$

ein, bekommt man die Relationen (2.8)–(2.12).

Beachten wir, dass die K -Invarianten (2.11) und (2.12) nicht von den Vorzeichen der Invarianten α, S, K abhängen. Die Bedeutung der Vorzeichenänderung dieser Invarianten erklärt der

Satz 2.3. Die Vorzeichenänderung bei einigen Invarianten α, S, K in dem System der Invarianten (1.13) ist äquivalent mit der Vorzeichenänderung einiger arithmetischer Punkte ${}^1N, {}^2N, \dots, {}^6N$ des polaren Schmiegehexsecks der Kurve im Raume \bar{P}_5 . Die W -Kongruenz als geometrisches Geradengebilde ändert sich nicht durch diese Vorzeichenänderung.

Beweis. Die Vorzeichen der Homogenitätsfaktoren der Punkte ${}^3N, {}^4N, {}^5N, {}^6N$ werden der Reihe nach $\pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6$ bezeichnet. Diese Vorzeichen sind ganz beliebig und man kann nach den Relationen (2.11) z. B.

$$\pi_3 = \operatorname{sgn} \alpha S, \quad \pi_4 = \operatorname{sgn} S, \quad \pi_5 = \operatorname{sgn} S\sqrt{|H|}, \quad \pi_6 = \operatorname{sgn} (SHK)$$

setzen, wobei man das Vorzeichen der Wurzel $\sqrt{|H|}$ noch beliebig wählen kann. Aus den Relationen (2.10) folgt, dass die Vorzeichenänderungen der Invarianten α, S, K nur die Vorzeichen der Homogenitätsfaktoren einiger von den arithmetischen Punkte ${}^1N, {}^2N, \dots, {}^6N$ beeinflusst. Die Kurve und auch ihre Tangentenfläche, die die W -Kongruenz darstellt, ändern sich nicht als geometrisches Gebilde und darum ändert sich auch die W -Kongruenz als geometrisches Geradengebilde nicht.¹⁴⁾

Bemerkung 2.1. Wählt man die Linienkoordinaten p_i ($i = 1, 2, \dots, 6$) der Verbindungsgeraden der Punkte $y(y_1, y_2, y_3, y_4)$ und $z(z_1, z_2, z_3, z_4)$ so, dass

$$\begin{aligned} p_1 = (y_1, y_4), \quad p_2 = (y_2, y_4), \quad p_3 = (y_3, y_4), \quad p_4 = (y_2, y_3), \quad p_5 = (y_3, y_1), \\ p_6 = (y_1, y_2) \quad \left((y_i y_k) = \begin{vmatrix} y_i & y_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

¹⁴⁾ Aus den Gleichungen (5a) und (5b) in der Abhandlung [4] ersieht man sofort, dass durch die Vorzeichenänderung der Invarianten α die Fokalfächen unverändert bleiben.

ist dann nach (1.14) gilt

$$[(y\bar{z}), (z\bar{z}), (\bar{y}\bar{z}), (z\bar{y}), (\bar{y}y), (yz)] = \frac{\omega}{\Delta^6},$$

sodass nach (2.10)

$$[{}^1N, {}^2N, \dots, {}^6N] = \pi_2\pi_4\pi_6\omega\varepsilon \operatorname{sgn}(SK)$$

ist.

Da die unimodularen Kollineationen die Vorzeichen ω und ε nicht ändern und die Vorzeichen $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_6$ schon festgelegt werden, sehen wir, dass die Kongruenzen, die durch Systeme der Differentialgleichungen (1.1)₁, in welche wir einmal S und andermal $-S$ einsetzen, bestimmt werden, nicht durch unimodulare projektive Transformationen aneinander überführt werden können. Aus dem Abs. 7 ersehen wir, dass man jede von diesen Kongruenzen für Dualisation der anderen halten kann. Als Geradengebilde sind aber diese Kongruenzen identisch.

Satz 2.4. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die zu der gegebenen assoziierte W -Kongruenz reelle (imaginäre) Fokalflächen besitzt, ist $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$).*

Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zu dem System (1.3) der Invarianten eine W -Kongruenz existiert, ist, dass $\varepsilon \neq \operatorname{sgn} H$, oder $\varepsilon = \operatorname{sgn} H \neq -1$ ist.¹⁵⁾

Die erste Behauptung folgt aus der Relation (2.12) und der Bedingung $\varepsilon_5 = -\varepsilon_6$. Drei von den Zahlen ε_i sind positiv und drei negativ (Abs. I.1.2). Da für die durch das System (1.1)₁ bestimmte W -Kongruenz schon $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2$ gilt, werden von den übrigen Zahlen $\varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5, \varepsilon_6$ zwei positiv und zwei negativ. Nur für $\varepsilon = \operatorname{sgn} H = -1$ bekommen wir aus (2.12) $\varepsilon_3 = \varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = -\omega$; das ist aber ein Widerspruch.

Bemerkung 2.2. Ist der Parameter v kein normaler Parameter, gilt für die Vorzeichen der Grössen α, S, K der dem Satz 2.3 analoge Satz. Die Fokalflächen der assoziierten W -Kongruenzen sind reell (imaginär) dann und nur dann, wenn $\operatorname{sgn}(Q^2 - PR) = 1$ ($\operatorname{sgn}(Q^2 - PR) = -1$). Die Kongruenz existiert nicht, wenn $\operatorname{sgn}(Q^2 - PR) = \operatorname{sgn} U = -1$.

3. Segresche W -Kongruenzen, die einem nicht speziellen linearen Komplex angehören. In diesem Absatz werden W -Kongruenzen untersucht, welche einem nicht speziellen linearen Komplex angehören. Ist der Parameter v ein allgemeiner Parameter, der die Relation (1.1)₂ erfüllt, bzw. ein normaler Parameter, so gilt in dem untersuchten Intervall des betreffenden Parameters

¹⁵⁾ Vgl. das analoge Ergebnis in der Theorie der Regelflächen, [3], S. 209–210.

$Q^2 - PR \neq 0$, $S \equiv 0$, $\alpha \neq 0$, $U \neq 0$, $K \neq 0$, bzw. $\varepsilon = Q^2 - PR$ ($\varepsilon^2 = 1$)
 $S \equiv 0$, $\alpha \neq 0$, $H \neq 0$, $K \neq 0$.

Es sei eine W -Kongruenz des vorstehenden Types durch das System der Differentialgleichungen (1.1)₁ gegeben, wobei die Striche Ableitungen nach einem beliebigen Parameter v bedeuten, der die Relation (1.1)₂ erfüllt und kein normaler Parameter ist. Diese W -Kongruenz wird im Raume \bar{P}_5 durch einen Kegel dargestellt; der Scheitel dieses Kegels ist der Punkt (der kein K -Punkt ist)

$${}^1x = \frac{\sqrt{2}}{2} {}^1\nu|\alpha|[(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})], \quad (3.1)$$

(${}^1\nu$ (${}^1\nu^2 = 1$) ist das Vorzeichen des Homogenitätsfaktors) und seine Leitkurve bildet die durch den Punkt

$${}^2x = \frac{\sqrt{2}}{2} {}^2\nu|\alpha|[(yz) + \pi(\bar{y}\bar{z})] \quad ({}^2\nu^2 = 1, \text{ belieb.}) \quad (3.2)$$

beschriebene Kurve, welche eine arithmetische Kurve in der Normaldarstellung ist und deren Parameter t die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2|\alpha|} \quad (3.3)$$

definiert.

Die Ecken 1N , 2N , ..., 6N des polaren Schmiegehexsecks (Abs. I.4) der Kurve (3.2)¹⁶ werden durch die Formeln¹⁶)

$$\begin{aligned} {}^1N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 {}^1\nu|\alpha|[(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})], \\ {}^2N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_2 {}^2\nu|\alpha|[(yz) + \pi(\bar{y}\bar{z})], \\ {}^3N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_2 \pi_3 {}^2\nu\alpha[(y\bar{z}) - (z\bar{y})], \\ {}^4N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_6 {}^2\nu \frac{\alpha}{\sqrt{|Q^2 - PR|}} [Q(\bar{y}\bar{z}) + (z\bar{y}) - P(z\bar{z}) - R(y\bar{y})], \\ {}^5N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_6 {}^2\nu \frac{\alpha \operatorname{sgn}(Q^2 - PR)}{\sqrt{|U(Q^2 - PR)|}} [A(y\bar{y}) + B(z\bar{z}) - C(\bar{y}\bar{z}) + (z\bar{y})], \\ {}^6N &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_6 \pi_6 {}^2\nu \operatorname{sgn}[(Q^2 - PR)KU] \frac{\alpha}{\sqrt{|U|}} [2(QR' - RQ')(y\bar{y}) + \\ &\quad + 2(PQ' - QP')(z\bar{z}) - (PR' - RP')(\bar{y}\bar{z}) + (z\bar{y})] \\ &\quad (\pi_1^2 = \pi_2^2 = \dots = \pi_6^2 = 1, \text{ belieb.}) \end{aligned} \quad (3.4)_{1-6}$$

¹⁶) Die Punkte 2N , 3N , ..., 6N bilden das Schmiegefünfeck der Kurve (3.2).

bestimmt und die betreffenden K -Invarianten sind

$$K_1 = \frac{\sqrt{|Q^2 - PR|}}{|\alpha|}, \quad K_2 = \frac{\sqrt{|U|}}{4|\alpha(Q^2 - PR)|}, \quad K_3 = \frac{|K|\sqrt{|Q^2 - PR|}}{|\alpha U|}, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\pi\omega, & \varepsilon_2 &= \pi\omega, & \varepsilon_3 &= -\omega, & \varepsilon_4 &= \omega \operatorname{sgn}(Q^2 - PR), \\ \varepsilon_5 &= -\omega \operatorname{sgn}[U(Q^2 - PR)], & \varepsilon_6 &= \omega \operatorname{sgn} U. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ist der Parameter v ein normaler Parameter, so gelten die Relationen (3.1) bis (3.4)₁₋₃ unabgeändert, aber die Relationen (3.4)₄₋₆ ersetzen wir durch

$$\begin{aligned} {}^4N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi \omega^{2\nu} \alpha [\overline{Q(yz)} + \overline{(zy)} - P(z\bar{z}) - R(y\bar{y})], \\ {}^5N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5^{2\nu} \frac{\alpha}{\sqrt{|H|}} [R'(y\bar{y}) + P'(z\bar{z}) - Q'(\overline{yz}) + \overline{(zy)}], \\ {}^6N &= \frac{\sqrt{2}}{4} \pi_2 \pi_3 \pi_4 \pi_5 \pi_6 \pi \omega^{2\nu} \operatorname{sgn}(KH) \frac{\alpha}{\sqrt{|H|}} \cdot \\ &\quad \cdot [2(QR' - RQ')(y\bar{y}) + 2(PQ' - QP')(z\bar{z}) - (PR' - RP')(\overline{yz}) + \overline{(zy)}]. \end{aligned} \quad (3.7)_{1-3}$$

Die K -Invarianten werden dann durch folgende Formeln bestimmt:

$$K_1 = \frac{1}{|\alpha|}, \quad K_2 = \frac{\sqrt{|H|}}{2|\alpha|}, \quad K_3 = \frac{|K|}{4|\alpha H|}, \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= -\pi\omega, & \varepsilon_2 &= \pi\omega, & \varepsilon_3 &= -\omega, & \varepsilon_4 &= \omega\varepsilon, & \varepsilon_5 &= \omega \operatorname{sgn} H, \\ \varepsilon_6 &= -\omega \varepsilon \operatorname{sgn} H. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Bei dem Beweise benützen wir wieder die Relationen (1.13)–(1.21), wobei wir in (1.13)_{1,2} $S \equiv 0$ eingelegt haben.

Bemerken wir noch, dass der Satz 2.3 für diesen Typ der Kongruenzen nur mit kleiner Abänderung gilt (da $S \equiv 0$); der Satz 2.4 gilt unabgeändert. Die Koordinaten des Punktes 1N sind konstant, da $\frac{d{}^1N}{dt} \equiv 0$ ist.

4. Segresche W -Kongruenzen, deren assoziierte Kongruenzen einem speziellen linearen Komplex angehören. Setzen wir in diesem Absatz voraus, dass für das System der Differentialgleichungen (1.1)₁, wobei die Striche Ableitungen nach dem normalen Parameter bedeuten, die Relation (1.4) gilt; die Funktion β_1 in (1.4) und ihre Ableitung werden durch die Relation (1.6) bestimmt, wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten und λ eine gegebene Funktion sind. Dieses System bestimmt eine Segresche W -Kongruenz, deren assoziierte W -Kongruenz einem speziellen linearen Komplex angehört.

Satz 4.1. *Die W -Kongruenzen des untersuchten Types wird im Raume \bar{P}_5 durch die Torse mit einer Rückkehrkante, die eine durch den Punkt*

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \nu |\alpha| [(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})] \quad (\nu^2 = 1, \text{ belieb.}) \quad (4.1)$$

beschriebene arithmetische Kurve in Normaldarstellung ist, dargestellt und deren Parameter u durch die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{2|S|} \quad (4.2)$$

bestimmt wird.

Die Ecken

$$\begin{aligned} {}^1M &= \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{\pi}_1 v |\alpha| [(yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})], \\ {}^2M &= \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2 v (\operatorname{sgn} S) |\alpha| [(yz) + \pi(\bar{y}\bar{z})], \\ {}^3M &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2 \tilde{\pi}_3 \pi \omega v (\operatorname{sgn} S) \alpha [(y\bar{z}) - (z\bar{y})], \\ {}^4M &= \frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2 \tilde{\pi}_3 \tilde{\pi}_4 v (\operatorname{sgn} S) \alpha [2\beta_1(y\bar{y}) + \varphi(\bar{y}\bar{z}) + (z\bar{y})], \\ {}^5M &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2 \tilde{\pi}_3 \tilde{\pi}_4 \tilde{\pi}_5 v (\operatorname{sgn} S) \frac{\alpha \beta_1'}{\tilde{c}} (y\bar{y}), \\ &(\tilde{\pi}_1^2 = \tilde{\pi}_2^2 = \dots = \tilde{\pi}_5^2 = 1, \text{ belieb.}, \tilde{c} \text{ belieb. Konstante}) \end{aligned} \quad (4.3)_{1-5}$$

des Schmiegfünfecks bilden mit dem K -Punkte

$${}^6M = \sqrt{2} \tilde{\pi}_1 \tilde{\pi}_2 \tilde{\pi}_3 \tilde{\pi}_4 \tilde{\pi}_5 \tilde{\varepsilon} v (\operatorname{sgn} S) \frac{\tilde{c} \alpha \beta_1'}{\beta_1} [\beta_1'(y\bar{y}) + \frac{1}{\beta_1} (z\bar{z}) + \varphi(\bar{y}\bar{z}) + (z\bar{y})] \quad (4.3)_6$$

ein quasipolares Sechseck der K -Quadrik Γ^+ . Die vorliegende Torse wird in dem Tangentialraum \bar{P}_4 der K -Quadrik Γ^+ im K -Punkte ${}^5\bar{M}$ eingebettet.

Zwischen den K -Invarianten und den Projektivdifferenzialinvarianten der vorliegenden Kongruenz gelten folgende Relationen:

$$\tilde{K}_1 = \left| \frac{\alpha}{S} \right|, \quad \tilde{K}_2 = \frac{1}{|S|}, \quad \tilde{K} = \frac{\lambda}{2|S|}, \quad (4.4)$$

$$\tilde{\varepsilon}_1 = -\pi\omega, \quad \tilde{\varepsilon}_2 = \pi\omega, \quad \tilde{\varepsilon}_3 = -\omega, \quad \tilde{\varepsilon}_4 = \omega. \quad (4.5)$$

Den Beweis führt man ganz analog wie bei dem Satz 2.1 unter Verwendung der Ergebnisse des Abs. I.5, wo ${}^5M_{(\varepsilon_0)} = {}^5M$ und ${}^6M_{(\varepsilon_0)} = {}^6M$ ist, durch. Die Relation (4.5)₄ bekommen wir in der Form $\varepsilon_4 = \omega\varphi^2 = \omega\varepsilon = \omega$, sodass das Vorzeichen φ ($\varphi^2 = \varepsilon = 1$) die K -Invarianten nicht beeinflusst.

Bemerkung 4.1. Da die K -Punkte $(y\bar{y})$, $(z\bar{z})$, (yz) , $(\bar{y}\bar{z})$, $(y\bar{z})$, $(z\bar{y})$, linear unabhängig sind und durch die gegebene Kongruenz apriori bestimmt werden, so kann man den K -Punkt 6M explizite als lineare Kombination der erwähnten K -Punkte ausdrücken; alle vorliegenden K -Punkte, mit Ausnahme des K -Punktes $(z\bar{z})$, liegen in dem Tangentialraum \bar{P}_4 der K -Quadrik Γ^+ im K -Punkte ${}^5\bar{M} = \varrho(y\bar{y})$ ($\varrho \neq 0$). Auf Grund dieser Erwähnung haben wir die Relation (4.3)₆ ohne Benützung der Eigenschaft der assoziierten W -Kongruenz erhalten.

5. Segresche \overline{W} -Kongruenzen, deren assoziierte Kongruenzen in eine lineare Kongruenz ausarten. In diesem Absatz setzen wir voraus, dass in dem System der Differentialgleichungen (1.1)₁ die Relationen $P = p$, $Q = q$, $R = r$, $Q^2 - PR = \varepsilon$ ($\varepsilon^2 = 1$, $p, q, r = \text{Konst}$) gelten; so bestimmt dieses System die Fokalfächen der Segreschen \overline{W} -Kongruenzen, deren assoziierte Kongruenzen in eine lineare Kongruenz ausarten.

Satz 5.1. *Die Kongruenz des vorliegenden Types wird im Raume \overline{P}_5 durch eine Torse des Raumes \overline{P}_3 ($\subset \overline{P}_5$) dargestellt; ihre Rückkehrkante, welche durch den Punkt*

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \nu |\alpha| [(yz) - \pi(\overline{y}\overline{z})] \quad (5.1)$$

beschrieben wird, ist eine arithmetische Kurve in Normaldarstellung und ihr Parameter t wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2|S|} \quad (5.2)$$

bestimmt.

Die Ecken

$$\begin{aligned} {}^1N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \nu |\alpha| [(yz) - \pi(\overline{y}\overline{z})], \\ {}^2N &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 \nu |\alpha| (\text{sgn } S) [(yz) + \pi(\overline{y}\overline{z})], \\ {}^3N &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi \omega \nu \alpha (\text{sgn } S) [(y\overline{z}) - (z\overline{y})], \\ {}^4N &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_4 \nu \alpha \text{sgn } (SQ) [Q\overline{(y\overline{z})} + (z\overline{y}) - R(y\overline{y}) - P(z\overline{z})], \\ &(\pi_1^2 = \pi_2^2 = \pi_3^2 = \pi_4^2 = 1, \quad \nu^2 = 1, \quad \text{belieb.}) \end{aligned} \quad (5.3)_{1-4}$$

des Schmiegevierecks der Kurve (5.1) bilden mit den Punkten

$${}^5\overline{N} = \varrho_5(y\overline{y}), \quad {}^6\overline{N} = \varrho_6(z\overline{z}) \quad (5.3)_{5,6}$$

($\varrho_5, \varrho_6 \neq 0$ sind Homogenitätsfaktoren) ein quasipolares Sechseck der K -Quadrik Γ^+ . Zwischen den K -Invarianten und den Projektivdifferentialinvarianten gelten die Beziehungen

$$K_1 = \left| \frac{\alpha}{S} \right|, \quad K_2 = \frac{1}{|S|}, \quad \varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = -\pi\omega, \quad \varepsilon_3 = -\omega, \quad \varepsilon_4 = \omega\varepsilon. \quad (5.4)$$

Den Beweis kann man mühelos wie in den vorangehenden Fällen durchführen. Die Leitgeraden der linearen Kongruenz sind reell (imaginär) dann und nur dann, wenn $\varepsilon = 1$ ($\varepsilon = -1$) ist.

6. Dualisation der Segreschen W -Kongruenzen. Führen wir folgende Orientation der untersuchten W -Kongruenzen ein.

Für die W -Kongruenz, die durch das System (1.1)₁ in der eingeführten Reihenfolge bestimmt wird, sei die durch die Leitkurven C_y, C_z bzw. $C_{\bar{y}}, C_{\bar{z}}$ bestimmte Fokalfläche die erste, bzw. zweite Fokalfläche. Der Berührungspunkt eines beliebigen Kongruenzstrahles mit der ersten, bzw. zweiten Fokalfläche sei der erste, bzw. zweite Brennpunkt; die Tangentialebenen in den Punkten der ersten, bzw. zweiten Fokalfläche seien zweite, bzw. erste Fokalebene.

Auf Grund der vorliegenden Orientation wird die Dualisation der Segreschen W -Kongruenzen (eines beliebigen Types), welche durch das System der Differentialgleichungen (1.1)₁ bestimmt wird, durch das System der Differentialgleichungen⁸⁾

$$\begin{aligned} \bar{\eta}' &= \left(Q - S - \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \bar{\eta} - P\bar{\zeta} - \alpha\eta, & \bar{\zeta}' &= R\bar{\eta} - \left(Q + S + \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \bar{\zeta} - \alpha\zeta, \\ \eta' &= -\left(Q - S + \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \eta + P\zeta - \pi\alpha\bar{\eta}, & \zeta' &= -R\eta + \left(Q + S - \frac{1}{2} \frac{\alpha'}{\alpha} \right) \zeta - \pi\alpha\zeta, \end{aligned} \quad (6.1)_1$$

dargestellt, wobei die Striche Ableitungen nach dem Parameter, der die Relation

$$(\eta, \zeta, \eta', \zeta') = (\bar{\eta}, \bar{\zeta}, \bar{\eta}', \bar{\zeta}') = \omega \quad (\omega^2 = 1) \quad (6.1)_2$$

erfüllt, bedeuten;

$$\begin{aligned} \bar{\eta} &= (\bar{y}, \bar{z}, \bar{y}') = \pi\alpha(\bar{y}, \bar{z}, z), & \bar{\zeta} &= (\bar{y}, \bar{z}, \bar{z}') = \pi\alpha(\bar{y}, \bar{z}, z), \\ \text{bzw. } \eta &= (y, z, y') = \alpha(y, z, \bar{y}), & \zeta &= (y, z, z') = \alpha(y, z, \bar{z}) \end{aligned} \quad (6.2)$$

sind Ebenenkoordinaten der ersten, bzw. zweiten Fokalebene, welche die Fokalflächen in den Punkten \bar{y} und \bar{z} , bzw. y und z berührt.

Vergleicht man die Systeme (1.1)₁ und (6.1)₁, so folgt, dass sie durch die Transformation

$$\begin{pmatrix} y, z, \bar{y}, \bar{z}, P, Q, R, & S, & \alpha, \pi, \omega \\ \bar{\eta}, \bar{\zeta}, \eta, \zeta, P, Q, R, & -S, & -\alpha, \pi, \omega \end{pmatrix} \quad (6.3)_1$$

ineinander überführt werden können.

Satz 6.1. *Für die Dualisation aller von den vorliegenden Typen der Segreschen W -Kongruenzen gelten die aus Abs. 2.—5. analoge Behauptungen; aus den Relationen, die in diesen Absätzen eingeführt sind, bekommen wir die betreffenden Relationen für die Dualisation derselben W -Kongruenzen durch die Transformation (6.3)₁ und die Transformation*

$$\begin{pmatrix} \pi_i, & \nu, & {}^iN, & {}^iM, & K_j, & \varepsilon_i, & \text{usw.} \\ \pi_i^*, & \nu^*, & {}^iN^*, & {}^iM^*, & K_j^*, & \varepsilon_i^*, & \text{usw.} \end{pmatrix}. \quad (6.3)_2$$

⁸⁾ In der Abhandlung [5] liegt eine andere Reihenfolge der Gleichungen vor als in unserem System (6.1)₁; die untersuchten Gebilde werden aber nicht in unserem Sinne orientiert.

Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Ergebnissen des Abs. I.7, da die K -Invarianten einer Segreschen W -Kongruenz und die K^* -Invarianten ihrer Dualisation einander gleich sind.

LITERATUR

- [1] *E. Bertini-A. Duschek*: Einführung in die projektive Geometrie mehrdimensionaler Räume. Seidel, Wien, 1924.
- [2] *E. Čech*: Analytická geometrie II. Přírodověd. vydavatelství, Praha, 1952.
- [3] *G. Fubini-E. Čech*: Geometria proiettiva differenziale. Bologna, 1926.
- [4] *J. Klapka*: O W -kongruencích s fokálními plochami přímkovými. Spisy přír. fak. MU v Brně, 1926, č. 69.
- [5] *C. Segre*: Le congruenze rettilinee W aderenti a due superficie rigate. Accad. Reale delle Sc. di Torino, 42, 1906—1907, 539—550.

Резюме

ТЕОРИЯ РАЗВЕРТЫВАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ В ПЯТИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ КЛЕЙНА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ К КОНГРУЭНЦИЯМ СЕГРЕ W В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ВЛАДИМИР ГОРАК (Vladimír Horák), Брно

(Поступило в редакцию 9/1 1959 г.)

Каждая конгруэнция Сегре W , т. е. конгруэнция W с линейчатыми фокальными поверхностями, может быть представлена в пятимерном пространстве Клейна \bar{P}_5 некоторой развертывающейся поверхностью. С каждой конгруэнцией Сегре W связана одновременно т. наз. ассоциированная конгруэнция Сегре, представленная в пространстве \bar{P}_5 развертывающейся поверхностью, которая получается из исходной развертывающейся поверхности на основании полярности относительно гиперквадрики Клейна (K -квадрики Γ).

Автор рассматривает различные типы конгруэнций Сегре W проективного пространства P_3 , как ориентированные слои регулов, определенные вплоть до преобразований группы унимодулярных проективных преобразований пространства P_3 ; эти конгруэнции представлены в пространстве \bar{P}_5 ориентированными развертывающимися поверхностями, определенными вплоть до унимодулярных K -преобразований, т. е. до преобразований группы, сохраняющей положительно ориентированную K -квадрику Γ^+ ($x \cdot x \equiv 2(x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6) = 0$) и изоморфной указанной группе проективных преобразований пространства P_3 .

Конгруэнция Сегре W , которая не принадлежит линейному комплексу и ассоциированная конгруэнция которая также не принадлежит линейному комплексу, представлена в пространстве \bar{P}_5 развертывающейся поверхностью касательных к арифметической кривой (положительно ориентированной с возрастающим параметром)

$$x_i = x_i(t) \quad (i = 1, 2, \dots, 6), \quad (1)$$

причем эта кривая не лежит в подпространстве пространства \bar{P}_5 , и координаты ее точек и параметр определены так, что $x \cdot x = \varepsilon_1$, $\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = \varepsilon_2$ ($\varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = 1$).

Для указанной кривой справедливы формулы Френе I (3.6),* где выражения K_j ($j = 1, 2, 3, 4$) определяются соотношениями I (3.7). Арифметические точки iN (${}^1N = \pi_1 x$, ${}^iN \cdot {}^iN = \varepsilon_i$, $\varepsilon_i^2 = 1$, $i = 1, 2, \dots, 6$), определенные вплоть до знаков π_i , образуют соприкасающийся симплекс кривой (1), являющийся одновременно полярным симплексом K -квадрики Γ^+ . Функции K_j (> 0 ; $j = 1, 2, 3, 4$) и знаки ε_i ($\varepsilon_i^2 = 1$, $i = 1, 2, \dots, 6$), относительно которых доказано, что точно три из них положительны и три — отрицательны, образуют полную систему унимодулярных дифференциальных K -инвариантов ориентированной арифметической кривой (1), которая в проективном пространстве \bar{P}_5 определяет конгруэнцию Сегре W , как ориентированный слой регулов с точностью до унимодулярного проективного преобразования.

Ассоциированная конгруэнция W представлена развертывающейся поверхностью, ребром возврата которой является арифметическая кривая, описываемая точкой 6N , параметр которой u удовлетворяет вместе с параметром t кривой (1) дифференциальному уравнению $\frac{du}{dt} = K_4$. K -инварианты этой кривой выражаются через K -инварианты кривой (1); находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы рассматриваемые конгруэнции или их фокальные поверхности были действительными.

Согласно Й. Клапке система линейных дифференциальных уравнений II (1.1), где $\pi^2 = 1$, $P, Q, R, S, \alpha \neq 0$ — функции некоторого, т. наз. нормального параметра и где штрихами обозначены производные по этому параметру, определяет две пары направляющих кривых косых линейчатых поверхностей, описанных прямыми (yz) и $(\bar{y}\bar{z})$ и являющихся фокальными поверхностями конгруэнции Сегре W . Если

$$Q^2 - PR \neq 0, \quad S \neq 0, \quad K = \begin{vmatrix} P & Q & R \\ P' & Q' & R' \\ P'' & Q'' & R'' \end{vmatrix} \neq 0,$$

*) I, соотв. II означают первую, соотв. вторую часть работы.

то рассматриваемая конгруэнция не является флекнодальной и не принадлежит ни сама, ни ассоциированная конгруэнция, линейному комплексу.

Автор доказывает, что ребро возврата соответствующей развертывающейся поверхности в пространстве \bar{P}_5 описывается точкой $x = \frac{\sqrt{2}}{2} v|\alpha|$. $((yz) - \pi(\bar{y}\bar{z})) (v^2 = 1)$, и соответственный параметр t определяется дифференциальным уравнением $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2|S|}$, где v — нормальный параметр. K -инварианты этой кривой имеют вид

$$K_1 = \left| \frac{\alpha}{S} \right|, \quad K_2 = \frac{1}{|S|}, \quad K_3 = \frac{\sqrt{|H|}}{2|S|}, \quad K_4 = \frac{|K|}{4|SH|},$$

$$\varepsilon_1 = -\pi\omega, \quad \varepsilon_2 = \pi\omega, \quad \varepsilon_3 = -\omega, \quad \varepsilon_4 = \omega\varepsilon, \quad \varepsilon_5 = \omega \operatorname{sgn} H, \\ \varepsilon_6 = -\omega\varepsilon \operatorname{sgn} H,$$

где π, ω ($\pi^2 = 1; \omega = (y, z, y', z'); \omega^2 = 1$), $\alpha \neq 0, \varepsilon = Q^2 - PR$ ($\varepsilon^2 = 1$), $H = Q'^2 - P'R' (\neq 0), S \neq 0, K \neq 0$ образуют, как функции нормального параметра, полную систему проективных унимодулярных инвариантов рассматриваемой конгруэнции Сегре W . Выясняется, что конгруэнция не существует, если $\varepsilon = \operatorname{sgn} H = -1$. Автор исследует указанные конгруэнции и при условии, что параметр v не является нормальным параметром.

Аналогичным способом автор исследует пары ассоциированных конгруэнций Сегре W , одна из которых принадлежит неспециальному линейному комплексу, или соответственно вырождается в линейную конгруэнцию; эти пары конгруэнций представлены в пространстве \bar{P}_5 развертывающейся поверхностью касательных к кривой, вложенной в пространство \bar{P}_4 ($\subset \bar{P}_5$), которое не является касательным к K -квадрике Γ^+ , и конической поверхностью пространства \bar{P}_5 , вершина которой является полюсом пространства \bar{P}_4 , или, соответственно, развертывающейся поверхностью касательных к кривой, вложенной в пространство \bar{P}_3 ($\subset \bar{P}_5$), и конической поверхностью с вершиной прямой \bar{P}_1 — полярной пространства \bar{P}_3 (\bar{P}_1 не является касательной к K -квадрике Γ^+).

Изучение пары ассоциированных конгруэнций W , одна из которых принадлежит специальному линейному комплексу, равносильно изучению конической поверхности с вершиной x на K -квадрике Γ^+ (коническая поверхность не лежит в подпространстве пространства \bar{P}_5) и развертывающейся поверхности касательных к кривой \tilde{C} , вложенной в касательное пространство \bar{P}_4 K -квадрики Γ^+ в точке x , т. е. к кривой \tilde{C} пространства \bar{P}_4 с квадратичным многообразием с особой точкой. Автор выводит формулы Френе I (5.17) для определенной арифметической кривой, отвечающей геометрической кривой \tilde{C} ; при соблюдении некоторого геометрического

условия, определяющего выбор ϱ_0 функции ϱ в I(5.17), функции \tilde{K}_1, \tilde{K}_2 , $\tilde{K} = \kappa_{\varrho_0}$ и знаки $\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2, \tilde{\varepsilon}_3, \tilde{\varepsilon}_4$, из которых два и только два положительны, образуют полную систему дифференциальных K -инвариантов изучаемой кривой. Эти K -инварианты выражаются через проективные дифференциальные инварианты π, ω ($\pi^2 = \omega^2 = 1$), $\varepsilon = Q^2 - PR = 1$, $\alpha \neq 0$, $S \neq 0$, $\lambda = \frac{\beta_1''}{\beta_1'}$ соответствующей конгруэнции W , определяемой системой (1.1)₁, где $P = 0$, $Q = -\varphi$, $R = 2\beta_1$ ($\varphi^2 = \varepsilon = 1$), при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1 &= \left| \frac{\alpha}{S} \right|, & \tilde{K}_2 &= \frac{1}{|S|}, & \tilde{K} &= \frac{\lambda}{2|S|}, & \tilde{\varepsilon}_1 &= -\pi\omega, & \tilde{\varepsilon}_2 &= \pi\omega, \\ & & & & & & \tilde{\varepsilon}_3 &= -\omega, & \tilde{\varepsilon}_4 &= \omega. \end{aligned}$$

Далее автор исследует дуализации всех рассматриваемых типов конгруэнций W и показывает, что дифференциальные K -инварианты конгруэнции Сегре W и ее дуализации соответственно равны между собой, так что полная система этих K -инвариантов определяет конгруэнцию Сегре W с точностью до унимодулярного проективного преобразования и вплоть до дуализации.