Ján Jakubík

О главных идеалах в структурно упорядоченных группах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 4, 528–543

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100380

Чехословацкий математический журнал, т. 9 (84) 1959, Прага

О ГЛАВНЫХ ИДЕАЛАХ В СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

ЯН ЯКУБИК (Jan Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 28/XI 1958 г.)

В работе выводится необходимое и достаточное условие для того, чтобы данная конечная дистрибутивная структура была изоморфна структуре всех l-идеалов некоторой коммутативной l-группы. Далее решается проблема Биркгофа 99.

Введение. Для структурно упорядоченных групп (l-групп) мы используем те же обозначения, как и в книге [1], гл. XIV (за одним исключением, о котором будет речь в разделах 1.1 и 1.2). Пусть G — структурно упорядоченная группа. Подмножество $A \subset G$, являющееся инвариантной подгруппой в G и в то же время выпуклой подструктурой в G, называется l-идеалом в G. Для каждого l-идеала $A \subset G$ существует отношение конгруентности на G (относящееся к операциям $+$, $\cap$, $\cup$; ср. [1], введение, стр. VII) такое, что A представляет собой класс разбнения на G, соответствующего этой конгруэнции.

Пусть $a \in G$. Множественное пересечение всех l-идеалов в G, содержащих элемент a, обозначим через $I(a)$. $I(a)$ является, очевидно, l-идеалом; назовем его главным идеалом, образованным элементом a. Множество всех l-идеалов, соотв., всех главных идеалов в G, обозначим через $\overline{S}(G)$, соотв., $S(G)$; эти множества мы считаем частично упорядоченными при помощи множественного включения.

Как известно, $\overline{S}(G)$ является дистрибутивной структурой ([3], теорема 21). Если G — коммутативная структурно упорядоченная группа, то и $S(G)$ будет дистрибутивной структурой (Г. Биркгоф [3], теорема 29; Ф. Лунстра [2], теорема 4,3).

В работе [2] Ф. Лунстра поставил следующие вопросы:

1. *Является ли коммутативная структурано упорядоченная группа однозначно определенной при помощи структуры* $S(G)$? (*вплоть до изоморфизма*).

2. *Каким условиям должна удовлетворять дистрибутивная структура с наименьшим элементом, чтобы быть изоморфной структуре $S(G)$ при надлежащим образом выбранной коммутативной структурно упорядоченной группе G?*

Для случая, когда структура $S(G)$ конечна, условие, дающее ответ на вопрос 2), выведено в работе Г. Биркгофа [3] (теорема 35). Условие имеет вид:

(I) Пусть S — конечная дистрибутивная структура. Необходимое и достатечное условие для того, чтобы структура S была изоморфна структуре $S(G)$ для подходящей коммутативной структурно упорядоченной группы G, следующее: $S \sim 2^Y$, где Y есть ,,*semitree*". (Символ $\sim$ обозначает структурный изоморфизм; операция X^Y, где X, Y — частично упорядоченные множества, введена в [1], стр. 7—8; понятие ,,*semitree*" введено, напр., в [3], стр. 317. Заметим, что частично упорядоченное множество, являющееся ,,*semitree*", не должно быть структурой.)

Мы задаемся целью вывести другое условие, дающее ответ на вопрос 2 для конечной дистрибутивной структуры, которое проще, чем условие Биркгофа, приведенное в (I), в том отношении, что использует только термины из теории структур. Докажем, что справедлива

Теорема 1. *Необходимое и достатечное условие для того, чтобы данная конечная дистрибутивная структура S была изоморфна структуре $S(G)$ для подходящей коммутативной структурно упорядоченной группы G, гласит: Для любой тройки элементов x, y, $z \in S$ имеет место утверждение (k) если $y \neq x \neq z$, $x = y \cup z$, то существуют элементы y_0, $z_0 \in S$, для которых $x = y_0 \cup z_0$, $y_0 \cap z_0 = 0$, $y_0 \leqq y$, $z_0 \leqq z$. (Притом 0 есть наименьший элемент структуры S.)*

Мы будем говорить, что структура S с наименьшим элементом удовлетворяет условию (k), если для любой тройки элементов $x, y, z \in S$ справедливо (k).

Кроме вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теоремы 1, мы докажем еще некоторые дальнейшие утверждения о l-идеалах структурно упорядоченных групп.

Заметим, что ответ на вопрос 1 отрицательный:

Пример 1. Пусть G_1 (G_2) — структурно упорядоченная группа всех целых (всей действительных) чисел. (В качестве групповой операции мы берем сложение; знак $\leqq$ имеет обычное значение.) Тогда $S(G_1) = \{\{0\}, G_1\}$, $S(G_2) = \{\{0\}, G_2\}$. Структуры $S(G_1)$, $S(G_2)$ изоморфны, а структурно упорядоченные группы G_1, G_2 не изоморфны.

Остается открытым вопрос, можно ли в теореме 1 выпустить предположение о конечности структуры S.

1.1. Сильная единица. Пусть G — структурно упорядоченная группа. Элемент $e \in G$ называется сильной есиницей в G, если для любого $a \in G$ существует натуральное число n такое, что $a < ne$. Ф. Рисс доказал следующее утверждение:

если G — коммутативная структурно упорядоченная группа, то каждый элемент $e \in G$, $e > 0$, является сильной единицей в l-идеале $I(e)$. (Ср. [3], теорема 27.)

Очевидно, имеет место утверждение: если e — сильная единица в G, то $I(e) = G$.

На основании приведенных выше утверждений Г. Биркгоф ([3], стр. 315, или [1], стр. 223) определяет главный удеал, как такой l-идеал, в котором существует сильная единица. Согласно теореме Рисса такое определение главного идеала для коммутативных структурно упорядоченных групп равносильно определению, данному в введении. Возникает вопрос, остается ли в силе эквивалентность этих двух определений и для некоммутативных структурно упорядоченных групп. Как видно из следующего примера, ответ будет отрицательный.

Пример 2. Пусть F — множество всех действительных функций f (принимающих только целочисленные значения), областью определения которых служит множество всех целых чисел C и которые отличны от нуля не более чем в конечном количестве чисел $x \in C$. F является группой относительно операции $+$. Для $f, g \in F$ мы положим $f \leqq g$, если для любого $x \in C$ $f(x) \leqq g(x)$. Тогда F будет структурно упорядоченной группой. Пусть G_1 имеет тот же смысл, как и в примере 1. Пусть G — множество всех пар (n, f), $n \in G_1$, $f \in F$, для которых мы положим

1. $(n_1, f_1) \leqq (n_2, f_2)$ тогда и только тогда, если или $n_1 < n_2$ или $n_1 = n_2$, $f_1 \leqq f_2$.

2. $(n_1, f_1) + (n_2, f_2) = (n_1 + n_2, g)$, причем $g \in F$, и для любого $i \in C$

$$g(i) = f_1(i - n_2) + f_2(i) .$$

Нетрудно обнаружить, что G (с операцией $+$ и с частичным упорядочением $\leqq$) является структурно упорядоченной (некоммутативной) группой.

Для $x \in C$ обозначим через F_x множество тех $f \in F$, для которых

$$y \in C, y \neq x \Rightarrow f(y) = 0 .$$

Пусть f_x^1 есть та функция, принадлежащая F_x, для которой $f_x^1(x) = 1$. Пусть $\bar{f}_x^1 = (0, f_x^1)$, $\bar{F}_x = \{(0, f_x), f_x \in F_x\}$. Исследуем главный удеал $I(\bar{f}_x^1) = I$. Обозначим через f° функцию из F, равную тождественно нулю.

Очевидно, что $\bar{F}_x \subset I$. Возьмем произвольное $y \in C$ и обозначим $y - x = n$. Тогда $-(n, f^\circ) + \bar{F}_x + (n, f^\circ) = (-n, f^\circ) + F(n, x + n)$, где $F(n, x + n)$

означает множество всех элементов из G вида (n, f), $f \in F_{x+n}$. Отсюда следует

$$-(n, f^\circ) + \overline{F}_x + (n, f^\circ) = \overline{F}_{x+n} = \overline{F}_y ,$$

следовательно, $\overline{F}_y \subset I$ для любого $y \in C$.

Обозначим $G_0 = \{(0, f), f \in F\}$. Нетрудно обнаружить, что выпуклой подструктурой структуры G, образованной множеством $A = \bigcup \overline{F}_x(\ x \in C)$, будет именно G_0. Так как согласно предыдущему, $A \subset I$ и так, как I (как l-идеал) является выпуклой подструктурой в G, то должно быть $G_0 \subset I$. С другой стороны, легко обнаружить, что G_0 является l-идеалом в G. Так как $\overline{f}_x^1 \in G_0$, должно быть $I \subset G_0$, следовательно, $I = G_0$, и G_0 есть *главный идеал.*

Для каждого элемента $e = (0, f) \in G_0$ существует $x \in C$ так, что $f(x) = 0$. Тогда для любого натурального числа n имеет место ne non $> \overline{f}_x^1$. *Итак, в G_0 не существует сильной единицы.*

1.2. Проблема Биркгофа 99. Г. Биркгофф поставил следующий вопрос ([1], стр. 224, проблема 99):

(P) *Пусть G — структурно упорядоченная группа с конечным числом образующих* (*в обычном теоретико-групповом смысле*). *Пусть частично упорядоченная система всех l-идеалов структурно упорядоченной группы G имеет конечную длину. Существует ли тогда в каждом l-идеале структурно упорядоченной группы G сильная единица?*

(Формулировка вопроса в [1] иная, в связи с терминологией, о которой упоминалось в начале раздела 1.1.)

Пусть G имеет тот же смысл, как и в 1.1. (Мы воспользуемся и другими обозначениями раздела 1.1.) Пусть $a, b \in G$, $a = (0, f_0^1)$, $b = (1, f^\circ)$. Обозначим через G' подгруппу группы G, образованную элементами a, b. Если $n \in C$, то согласно 1.1, 2 будет

$$nb = n(1, f^\circ) = (n, f^\circ) ,$$

так что $(n, f^\circ) \in G'$ для любого $n \in C$.

Пусть $x \in C$. Тогда согласно 1.1, 2 будет

$$a + (x, f^\circ) = (0, f_0^1) + (x, f^\circ) = (x, f_x^1) = (x, f^\circ) + (0, f_x^1) ,$$

так что $(0, f_x^1) \in G'$ для любого $x \in C$.

Пусть $f \in F$, $f \neq f^\circ$. Пусть C_1 — множество тех $c \in C$, для которых $f(c) \neq 0$; тогда C_1 есть конечное и непустое множество. Из доказанного и из равенства

$$(0, f) = \sum f(c)\, \overline{f}_c^1 \quad (c \in C_1)$$

следует $(0, f) \in G'$, $G_0 \subset G'$.

Пусть $c = (n, f)$ — какой-либо элемент из G. Так как

$$(n, f) = (n, f^\circ) + (0, f)$$

и так как элементы в правой части уравнения принадлежат G', должно быть $c \in G'$. *Этим мы доказали, что G есть группа с двумя образующими.*

Пусть A есть l-идеал в G, содержащий более одного элемента. Если существует $(n, f) \in A$, $n \neq 0$, то существует и элемент $d = (n', f) \in A$, $n' > 0$. Так как $2d > a > \bar{0}$, $2d > b > \bar{0}$,[1]) то из обстоятельства, что множество A выпукло, следует $a, b \in A$; итак, $A = G$.

Если для любого $(n, f) \in A$ будет $n = 0$, то существует $(0, f) \in A$, $f \neq f^\circ$. Пусть $x \in C$, $f(x) \neq 0$. Так как $\bar{0} < \bar{f}^1_x \leqq |(0, f)|$ (ср. [1], стр. 219), должно быть $\bar{f}^1_x \in A$. Согласно рассуждениям раздела 1.1, будет тогда $G_0 \subset A$. Так как по условию $A \subset G_0$, должно быть $A = G_0$.

Отсюда следует, что в G существуют только три l-идеала, а именно $\{0\}$, G_0, G. Согласно 1.1 в G_0 не существует сильной единицы. *Итак, на вопрос (P) нужно ответить отрицательно.*

Замечание. В цитированной проблеме Биркгофа кроме вопроса (P) сформулирован еще один вопрос (касающийся упражнения 4, стр. 224, [1]). Ответ на этот вопрос также отрицателен. Доказательство можно провести на примере из раздела 1.1, однако для доказательства достаточно и более простого примера, приведенного в указанном упражнении 4.

2. Дистрибутивность структуры $S(G)$. Хотя ядро последующих рассуждений касается коммутативных структурно упорядоченных групп, мы докажем некоторые утверждения и без предположения о коммутативности. Всюду в дальнейшем G (иногда и с индексами) означает структурно упорядоченную группу.

2.1. *Пусть $a \in G$. Существует элемент $a_1 \in G^+$ такой, что $I(a) = I(a_1)$.*

Доказательство. Обозначим $a_1 = |a|$. Так как $I(a)$ есть подструктура в G, имеем $a^+ = a \cup 0 \in I(a)$, $a^- = a \cap 0 \in I(a)$, следовательно, и $|a| = a^+ - a^- = a^+ \cup (-a^-) \in I(a)$, $-|a| \in I(a)$, $I(a_1) \subset I(a)$. Из выпуклости множества $I(a_1)$ и из неравенства $-|a| \leqq a \leqq |a|$ мы получаем $a \in I(a_1)$, $I(a) \subset I(a_1)$, $I(a) = I(a_1)$.

2.2. *Для любых двух элементов $I(a)$, $I(b)$ $(a \geqq 0,\ b \geqq 0)$ частично упорядоченного множества $S(G)$ в $S(G)$ существует их наименьшая верхняя грань и*

$$I(a) \vee I(b) = I(a \cup b)\ .^{2)} \tag{1}$$

---

[1]) $\bar{0}$ здесь обозначает нулевой элемент в G.

[2]) Если $U, V \in S(G)$, то мы обозначим через $U \vee V$ $(U \wedge V)$ наименьшую верхнюю (наибольшую нижнюю) грань элементов U, V в частично упорядоченной системе $S(G)$ (поскольку эти грани существуют).

Если частично упорядоченное множество $S(G)$ является структурой, то $S(G)$ будет подструктурой структуры $\overline{S}(G)$ (следовательно, в этом случае $S(G)$ — дистрибутивная структура).

Доказательство. Обозначим $a \cup b = v$. Так как множество $I(v)$ выпукло, имеем $a, b \in I(v)$ и, следовательно, $I(a) \subset I(v)$, $I(b) \subset I(v)$. Пусть $I \in \overline{S}(G)$, $I(a) \subset I$, $I(b) \subset I$. Тогда будет $a, b \in I$, $v \in I$, $I(v) \subset I$. Этим доказана первая часть утверждения. Более того, мы доказали, что равенство (1) справедливо и в том случае, если под символом $\vee$ понимать объединение в структуре $\overline{S}(G)$.

Предположим далее, что $S(G)$ — структура, и пусть

$$I(a) \wedge I(b) = I(u) .$$

Тогда будет $I(u) \subset I(a)$, $I(u) \subset I(b)$. Структурным пересечением элементов $I(a)$, $I(b)$ в структуре $\overline{S}(G)$ является, очевидно, $I(a) \cap I(b)$ (где $\cap$ обозначает теоретико-множественное пересечение). Согласно предыдущему, имеем $I(u) \subset I(a) \cap I(b)$. Пусть $x \in I(a) \cap I(b)$. Тогда $I(x) \subset I(a)$, $I(x) \subset I(b)$, следовательно, $I(x) \subset I(u)$, $x \in I(u)$. Таким образом мы доказали равенство

$$I(a) \wedge I(b) = I(a) \cap I(b) . \tag{1'}$$

Итак, структура $S(G)$ является подструктурой структуры $\overline{S}(G)$. Из дистрибутивности структуры $\overline{S}(G)$ следует, что структура $S(G)$ дистрибутивна.

Замечание. Структурные операции в $\overline{S}(G)$ мы будем также обозначать символами $\wedge$, $\vee$.

2.3. *Пусть частично упорядоченное множество $S(G)$ удовлетворяет условию возрастающих цепей. Тогда $S(G)$ является полной дистрибутивной структурой.*

Доказательство. Из условия возрастающих цепей и из 2.2 следует: если M — непустое подмножество множества $S(G)$, то в $S(G)$ существует элемент $\sup M$. Далее: так как в $S(G)$ существует наименьший элемент, множество $S(G)$ является полной структурой. Согласно 2.2 структура $S(G)$ дистрибутивна.

2.4. *Пусть частично упорядоченное множество $S(G)$ удовлетворяет условию возрастающих цепей. Тогда $S(G) = \overline{S}(G)$.*

Доказательство. Пусть $I \in \overline{S}(G)$, пусть $M = \{I(x), x \in I\}$. Для любого $x \in I$ имеем $I(x) \subset I$. Согласно 2.3 в $S(G)$ существует элемент $I(v)$ такой, что $I(v) = \sup I(x)$ $(I(x) \in M)$. Для любого $x \in I$ имеем $I(x) \subset I(v)$, откуда $I \subset I(v)$. Из условия возрастающих цепей следует, что существует конечное количество главных идеалов $I(x_1), \ldots, I(x_n) \in M$ так, что $I(v) = I(x_1) \vee I(x_2) \vee \ldots \vee I(x_n)$. Согласно 2.1, можно без ограничения общности предположить $x_i \in G^+$ $(i = 1, \ldots, n)$. Обозначим $\cup x_i = v_1$. Согласно 2.2 $I(v) = I(v_1)$. Так как $v_1 \in I$, должно быть $I(v) \subset I$, $I(v) = I$.

Предыдущее утверждение является обобщением результата Г. Биркгофа ([3], теорема 28).

Замечания. 1. Если G — *коммутативная* структурно упорядоченная группа, $a, b \in G$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, то

$$I(a) \wedge I(b) = I(a \cap b) . \tag{2}$$

(Ср. [3], доказательство теоремы 29.) Если же G — *некоммутативная* структурно упорядоченная группа и если $S(G)$ — структура, то равенство (2) не обязательно справедливо. Это доказывает следующий пример:

Пусть G — структурно упорядоченная группа, описанная в [1], стр. 216, пример 6. Нетрудно доказать, что в G существует только три l-идеала, а именно $\{0\}$, G и идеал I, причем (при обозначениях указанного примера) $ma + nb + n'c \in I$ тогда и только тогда, если $m = 0$. Для элементов b, c имеет место соотношение

$$I(b) = I = I(c) , \quad I(b) \wedge I(c) = I , \quad I(b \cap c) = I(0) = \{0\} .$$

2. Возникает вопрос, всегда ли частично упорядоченное множество $S(G)$ будет структурой.

3. Разложение на произведение. Припомним вкратце понятия прямого произведения, ординального (лексикографического) прямого произведения и смешанного ординального произведения структурно упорядоченных групп.

3.1. Мы говорим, что G можно разложить в *прямое произведение*

$$G = A \times B , \tag{3}$$

если а) соотношение (3) справедливо в смысле теории групп (ср., напр., [4])

б) если

$$g_i = a_i + b_i , \quad g_i \in G , \quad a_i \in A , \quad b_i \in B \quad (i = 1, 2) , \tag{4}$$

то будет $g_1 \leqq g_2$ в том и только в том случае, если одновременно будет $a_1 \leqq a_2$, $b_1 \leqq b_2$. (Ср. также [1], стр. 222 и [3], стр. 316.)

3.2. Мы говорим, что G можно разложить в *ординальное прямое произведение*

$$G = A \circ B , \tag{3'}$$

если а) в смысле теории групп имеет место (3),

б) A есть упорядоченное множество,[3])

[3]) Если $M \subset G$, то мы считаем, что множество M частично упорядочено таким же способом, как и G (т. е. для $m_1, m_2 \in M$ в M справедливо соотношение $m_1 \leqq m_2$ тогда и только тогда, если это соотношение справедливо в G).

в) если справедливы соотношения (4), то будет $g_1 \leqq g_2$ тогда и только тогда, если или $a_1 < a_2$ или $a_1 = a_2$ и одновременно $b_1 \leqq b_2$. (Ср. [1], стр. 9, и [5].)

3.3. Мы говорим, что G можно разложить в *смешанное ординальное произведение*

$$G \cong A \otimes B\,, \tag{3''}$$

если а) B есть l-идеал в G

б) A — упорядоченная группа

в) факторная структурно упорядоченная группа G/B (образованная отношением конгруентности, принадлежащим l-идеалу B, ср. введение) изоморфна упорядоченной группе A

г) если $\bar{x}$— класс в G/B, содержащий элемент $x \in G$ и если $\bar{x} > \bar{0}$, то $x > 0$.

Из приведенных свойств следует: пусть $b \in B$, $x \in G$, $x \operatorname{non} \in B$. Тогда $\overline{x - b} \neq \bar{0}$, следовательно, согласно б), $\overline{x - b} > \bar{0}$ или $\overline{x - b} < \bar{0}$. Согласно г) тогда имеет место неравенство $x > b$ или $x < b$. (Ср. [3], стр. 318.)

Замечание. Соотношение (3′) является частным случаем соотношения (3″).

3.4. Далее припомним два понятия, касающиеся структур.

Пусть S — структура, имеющая наименьший элемент. Мы говорим, что структуру S можно разложить в *прямое произведение*

$$S \cong S_1 \times S_2\,,$$

если

а) S_1, S_2 — подструктуры структуры S

б) каждый элемент $s \in S$ можно одним единственным способом выразить в виде $s = s_1 \cup s_2$, $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$.

Нетрудно обнаружить, что для структур с наименьшим элементом это определение лишь формально отличается от определения, использованного в [1] (стр. 25).

Пусть S — структура. Мы говорим, что S можно разложить в ординальную (лексиграфическую) сумму

$$S \cong S_1 \oplus S_2\,,$$

если

а) S_1, S_2 — непустые подструктуры в S, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cup S_2 = S$

б) если $x_1 \in S_2$, $x_1 \in S_2$, то $x_1 < x_2$. (Ср. [1], стр. 9.)

4. Идеалы и разложения в произведения. Поставим следующий вопрос: Пусть выполняется (3); какие соотношения имеют место между структурами $\bar{S}(G)$, $\bar{S}(A)$, $\bar{S}(B)$? (И аналогично для (3′), (3″).).

4.1. *Пусть справедливо* (3), *пусть I есть l-идеал в A. Тогда I будет l-идеалом в G.*

Доказательство. а) По условию I есть инвариантная подгруппа в A. Из определения прямого произведения ([4], стр. 106) следует, что I есть инвариантная подгруппа в G. б) Далее, I является выпуклой подструктурой в A. Согласно 3.1, A является выпуклой подструктурой в G, следовательно, I есть выпуклая подструктура в G.

В виве следствия получаем утверждение: структура $\overline{S}(A)$ равна интервалу $\langle\{0\}, A\rangle$ структуры $\overline{S}(G)$.

4.2. *Пусть справедливо* (3). *Тогда* $\overline{S}(G) \cong \overline{S}(A) \times \overline{S}(B)$.

Доказательство. Пусть $I \in \overline{S}(G)$. Обозначим $I_1 = I \cap A$, $I_2 = I \cap B$. Очевидно, $I_1 \in \overline{S}(A)$, $I_2 \in \overline{S}(B)$. Из дистрибутивности структуры $\overline{S}(G)$ следует

$$I = I_1 \vee I_2 . \tag{5}$$

Из 3.1 вытекает $A \cap B = \{0\}$, значит, и

$$I_1 \wedge I_2 = \{0\} . \tag{6}$$

Если бы I можно было одновременно представить в виде

$$I = I_1' \vee I_2' , \tag{7}$$

причем $I_1' \in \overline{S}(A)$, $I_2' \in \overline{S}(B)$, было бы также

$$\{0\} = I_1' \wedge I_2 = I_1 \wedge I_2' = I_1' \wedge I_2' . \tag{6'}$$

Из дистрибутивности структуры $\overline{S}(G)$ и из уравнений (5), (6), (7), (6′) следует $I_1 = I_1'$, $I_2 = I_2'$, чем и доказывается наше утверждение.

Замечание. Утверждение 4.2 сформулировано также в [1], стр. 237, упр. 3. В разделе 4.5 мы докажем, что второе утверждение в этом упражнении неправильно.

4.3. *Пусть справедливо* (3′). *Пусть I есть l-идеал в B. Тогда I будет l-идеалом в G.*

Доказательство. а) Смотри часть а) доказательства 4.1 (вместо A мы теперь оперируем с B). б) Согласно замечанию в разделе 3.3, B есть выпуклая подструктура в G, следовательно, I будет выпуклой подструктурой в G.

4.4. *Пусть справедливо* (3″). *Пусть G — коммутативная структурно упорядоченная группа. Пусть I есть l-идеал в B. Тогда I будет l-идеалом в G.*

Доказательство. а) По условию и согласно 3.3 I является подгруппой в G. б) Смотри 4.3, часть б).

Замечание. Для некоммутативных структурно упорядоченных групп аналогичное утверждение не имеет места.

4.5. Пусть справедливо (3″). Ввиду 3.3 мы будем предполагать $A = G/B$. Класс разбиения на G, образованного l-идеалом B, содержащий элемент x, мы обозначим через $\bar{x}$. Легко обнаружить, что структура $\overline{S}(A)$ изоморфна интервалу $\langle B; G\rangle$ структуры $\overline{S}(G)$. (Идеалу $I' \in \overline{S}(A)$ в этом изоморфизме сопоставляется идеал $I \in \overline{S}(G)$, состоящий из всех элементов $x \in G$, для которых $\bar{x} \in I'$.)

Пусть $I \in \overline{S}(G)$, $I \operatorname{non} \in \overline{S}(B)$. Тогда не имеет места соотношение $I \subset B$ и, следовательно, существует $x \in I$, $x \operatorname{non} \in B$. Согласно 3.3 элемент x сравним с элементом 0. Пусть y — тот из элементов x, $-x$, для которого $x > 0$. Согласно 3.3 тогда для любого $b \in B$ будет $-y < b < y$, следовательно $b \in I$, $B \subset I$.

Из предыдущего и из раздела 4.4 получаем:

Пусть G — коммутативная структурно упорядоченная группа. Пусть имеет место (3″). Тогда

$$\overline{S}(G) = \overline{S}(B) \cup \langle B, G\rangle\,, \quad \overline{S}(B) \cap \langle B, G\rangle = \{B\}\,, \quad \langle B, G\rangle \sim \overline{S}(A)\,. \qquad (8)$$

Так как A — упорядоченная группа, $\overline{S}(A)$ является цепью ([1], стр. 226, упр. 1). Если S — цепь с наименьшим элементом 0_S, то мы обозначим $S' = S - \{0_S\}$. Из (8) следует:

Пусть для коммутативной структурно упорядоченной группы G справедливо (3″). *Тогда структура $\overline{S}(G)$ изоморфна структуре $\overline{S}(B) \oplus (\overline{S}(A))'$.*

Если в предыдущем рассуждении использовать 4.3 вместо 4.4, то получим:

Пусть для структурно упорядоченной группы имеет место (3′). *Тогда структура $\overline{S}(G)$ изоморфна структуре $\overline{S}(B) \oplus (\overline{S}(A))'$.*

5. Главные идеалы и разложения в произведения. Относительно главныя идеалов можно поставить вопросы, аналогичные поставленным в начале раздела 4. Хотя для доказательства теоремы 1 нам было бы достаточно результатов раздела 4, мы исследуем для полноты также соотношения между частично упорядоченными множествами $S(G)$, $S(A)$, $S(B)$. Притом мы будем во всем разделе предполагать, что эти множества являются структурами.

5.1. Пусть имеет место (3), пусть $I(a) \in S(A)$ (главный идеал $I(a)$ построен по отношению к структурно упорядоченной группе A). Из 4.1 можно простым рассуждением вывести, что $I(a)$ является одновременно главным идеалом, образованным элементом a относительно структурно упорядоченной группы G.

Аналогичное утверждение справедливо, если $I(b) \in S(B)$ и если выполняется соотношение (3′), или, соответственно, если выполняется соотношение (3″) и если G — коммутативная структурно упорядоченная группа (согласно 4.3, соотв. 4.4).

5.2. *Пусть справедливо* (3). *Тогда*

$$S(G) \cong S(A) \times S(B) .$$

Доказательство. Согласно 5.1 и 4.2 достаточно доказать утверждение: если $c \in G$, то существуют элементы $a \in A$, $b \in B$ такие, что

$$I(a) \vee I(b) = I(c) .$$

Согласно 2.1 можно при этом предполагать $c \geqq 0$.

Пусть $c \in G$, $c \geqq 0$. Согласно 3.1 существуют элементы $a \in A$, $b \in B$ такие, что $c = a + b$, $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $a \cap b = 0$. Согласно [1] (стр. 219, теорема 4), будет тогда $a + b = a \cup b$, так что, согласно 2.2, доказываемое равенство справедливо.

5.3. Пусть для коммутативной структурно упорядоченной группы G справедливо (3″). Исследуем изоморфизм

$$\overline{S}(G) \sim \overline{S}(B) \oplus (\overline{S}(A))' , \tag{3.1}$$

о котором упоминалось в п. 4.5. Пусть в этом изоморфизме $I \to I_1$, $I \in \overline{S}(G)$, $I_1 \in \overline{S}(B) \oplus (\overline{S}(A))'$. Мы будем различать две возможности:

а) $I_1 \in \overline{S}(B)$. По построению изоморфизма (3.1) в данном случае будет $I_1 = I$, так что I_1 будет главным идеалом в B тогда и только тогда, если I сеть главный идеал в G.

б) I_1 non $\in \overline{S}(B)$. Тогда $I_1 \in (\overline{S}(A))'$. (Как и в 4.5 мы предполагаем $A = G/B$.) Пусть I_1 — главный идеал, $I_1 = I(\overline{a})$, $\overline{a} \in G/B$, $a \in G$. Так как по условию I_1 не является наименьшим элементом в $\overline{S}(A)$, то $I_1 \neq B$, $\overline{a} \neq B$, a non $\in B$. Согласно 2.1 можно без ограничения общности предположить $\overline{a} > \overline{0}$ в G/B; значит, можно предположить и $a > 0$. Одновременно тогда будет, согласно 3.3, $a > b$ для любого $b \in B$. Итак, $B \subset I(a)$. Пусть в изоморфизме (3.1) $I(a) \to I_2$. Очевидно, $I_2 \in (\overline{S}(A))'$.

Так как $a \in I(a)$, по построению, описанному в первом абзаце п. 4.5, будет $\overline{a} \in I_2$, $I_1 = I(\overline{a}) \subset I_2$. Однако, по тому же построению одновременно имеем $a \in I$, откуда $I(a) \subset I$, и, ввиду изоморфизма (3.1), $I_2 \subset I_1$. Этим доказано, что $I_2 = I_1$ и в то же время $I(a) = I$. Следовательно, если I_1 — главный идеал, то и I будет главным идеалом. Аналогичным рассуждением можно доказать: если I — главный идеал, то и I_1 — главный идеал.

Из п. 4.5 мы получаем теперь утверждение:

Пусть для коммутативной структурно упорядоченной группы G имеет место (3″). *Тогда структура $S(G)$ изоморфна структуре $S(B) \oplus (S(A))'$.*

В предыдущем утверждении можно выпустить предположение о коммутативности, если одновременно заменить соотношение (3″) соотношением (3′).

6. Свойство (*K*)

6.1. Мы будем говорить, что G есть группа типа 1, если она упорядочена. Предположим, что мы определили понятие структурно упорядоченной группы типа $1, \ldots, n-1$ $(n > 1)$. Мы говорим, что G есть структурно упорядоченная группа типа n, если или

$$\text{a) } G = A \times B\,, \tag{9}$$

или

$$\text{б) } G \cong A \otimes B\,, \tag{10}$$

причем A, соотв. B, есть структурно упорядоченная группа типа k_1, соотв., k_2, $1 \leqq k_i \leqq n-1$ $(i = 1, 2)$. (В случае б) по определению смешанного ординального произведения A должна быть типа 1.) *Мы говорим, что структурно упорядоченная группа G имеет свойство (K), если существует такое натуральное число н, что G является группой типа n.*

6.2. Введем аналогичное определение для структур. Мы говорим, что S есть структура типа 1, если она является цепью, имеющей наименьший элемент. Предположим, что мы определили понятие структуры типа $1, \ldots,$ $\ldots, n-1$ $(n > 1)$. S будет структурой типа n, если или

$$\text{a) } \quad S \cong S_1 \times S_2\,, \tag{11}$$

причем S_1, соотв., S_2 есть структура типа k_1, соотв. k_2, $1 \leqq k_i \leqq n-1$ $(i = 1, 2)$, или

$$\text{б) } \quad S \cong S_1 \oplus S_2\,, \tag{12}$$

причем S_1 есть структура типа k, $1 \leqq k \leqq n-1$, и S_2 — типа 1. *Структура S имеет свойство (K'), если она является структурой типа n для какого-либо натурального числа n.*

Теорема 1а. *Пусть G — коммутативная структурно упорядоченная группа, пусть структура $S(G)$ конечна. Тогда структура $S(G)$ имеет свойство (K').*

Доказательство. Пусть выполняются условия теоремы. Согласно 2.4 имеем $S(G) = \overline{S}(G)$, т. е. структура $\overline{S}(G)$ конечна. Согласно [3] (теорема 34) G имеет свойство (K). Согласно 5.2 и 5.3 мы получаем, пользуясь индукцией: $S(G)$ имеет свойство (K').

Теорема 1б. *Пусть структура S имеет свойство (K'). Тогда существует коммутативная структурно упорядоченная группа G, для которой $S(G) \sim S$.*

Доказательство. По условию существует натуральное число n такое, что S есть структура типа n. Мы воспользуемся индукцией по n. Для $n = 1$ утверждение имеет вид: если S есть цепь, имеющая наименьший элемент, то существует коммутативная структурно упорядоченная группа

G такая, что $S(G) \sim S$. Но это следует из теоремы, которую доказал X. Хан ([6]; см. также [2], стр. 131 и 137). По теореме Хана существует даже упорядоченная коммутативная группа, удовлетворяющая указанному условию.

Предположим, что $n > 1$ и что утверждение доказано для $1, 2, \ldots, n-1$. Если справедливо соотношение (11), то по предположению индукции существуют коммутативные структурно упорядоченные группы G_1, G_2 такие, что $S(G_1) \sim S_1$, $S(G_2) \sim S_2$ и, следовательно, согласно 5.2 имеет также место

$$S(G_1 \times G_2) \sim S\,.$$

Пусть справедливо соотношение (12). Если Z — структура, то символ Z' имеет тот же смысл, как в 4.5. Образуем цепь Z так, чтобы было $Z' \sim S_2$. По теореме Хана существует упорядоченаня группа G_1 такая, что $S(G_1) \sim Z$.

Рассмотрим теперь структуру S_1. По предположению индукции существует коммутативная структурно упорядоченная группа G_2 такая, что $S(G_2) \sim S_1$. Согласно 5.3 имеет место соотношение

$$S(G_1 \circ G_2) \sim S_1 \oplus S_2 \sim S\,.$$

7. Свойство (*k*). В продолжении всего раздела S означает дистрибутивную структуру. Докажем, что для конечной структуры S свойство (K') равносильно свойству (k) (ср. введение, теорема 1).

7.1. *Предположим, что структура S имеет свойство (K'). Тогда она имеет и свойство (k).*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по числу n, выражающему тип структуры S. Если $n = 1$, то доказываемое утверждение, очевидно, справедливо. Пусть $n > 1$. Допустим, что утвержденче доказано для $n = 1, \ldots, n-1$.

a) Рассмотрим прежде всего случай, когда справедливо соотношение (11). Пусть

$$x, y, z \in S\,, \quad x = y \cup z\,, \quad y \neq x \neq z\,. \tag{13}$$

Из свойств прямого произведения следует, что элементы x, y, z можно выразить в виде

$$x = x_1 \cup x_2\,, \quad y = y_1 \cup y_2\,, \quad z = z_1 \cup z_2\,, \quad x_i, y_i, z_i \in S_i \quad (i = 1, 2) \tag{14}$$

причем, согласно (13),

$$y_1 \cup z_1 = x_1\,, \quad y_2 \cup z_2 = x_2\,. \tag{15}$$

Допустим прежде всего, что один из элементов y_1, z_1 (напр., y_1) равен x_1. Согласно (13), (14) тогда должно быть $y_2 < x_2$. Если, далее, $z_2 = x_2$, то условию, сформулированному в (k) для x, y, z, удовлетворяют элементы $y_0 = y_1$, $z_0 = z_2$. Если $z_2 \neq x_2$, то по предположению индукции и согласно (15) мы найдем элементы y_{20}, z_{20}, для которых имеют место соотношения

$$y_{20} \leqq y_2 , \quad z_{20} \leqq z_2 , \quad y_{20} \cup z_{20} = x_2 , \quad y_{20} \cap z_{20} = 0 . \tag{16}$$

В этом случае положим $y_0 = y_1 \cup y_{20}$, $z_0 = z_{20}$. Непосредственным вычислением нетрудно обнаружить, что условие, сформулированное в (k), выполняется. (В случае $z_1 = x_1$ рассуждаем аналогично.)

В качестве второй возможности предположим, что каждый из элементов y_1, z_1 отличен от элемента x_1. Если какой-либо из элементов y_2, z_2 равен x_2, то мы рассуждаем, как в предыдущем случае (меняя местами индексы 1, 2). Если $y_2 \neq x_2 \neq z_2$, мы найдем элементы y_{20}, z_{20}, удовлетворяющие соотношениям (16) и аналогично найдем элементы y_{10}, z_{10}, удовлетворяющие соотношениям, которые получаются из (16), если индекс 2 заменить индексом 1. Условию, сформулированному в (k), удовлетворяют элементы

$$y_0 = y_{10} \cup y_{20} , \quad z_0 = z_{10} \cup z_{20} .$$

б) Далее рассмотрим случай, когда справедливо (12). Если $x \in S$, то будет или $x \in S_1$ или $x \in S_2$. Пусть $x \in S_1$. Из соотношений (13) следует $y, z \in S_1$, следовательно, по предположению индукции выполняется (k). Если $x \in S_2$, то (так как S_2 есть цепь) соотношения (13) не могут иметь места.

7.2. Очевидно, имеет место утверждение:

Пусть структура S удовлетворяет условию (k), пусть $x \in S$, пусть 0_S — — наимеьший элемент в S. Тогда интервал $\langle 0, x \rangle$ удовлетворяет условию (k).

7.3. *Пусть конечная структура S выполняет условие (k). Тогда S выполняет условие (K').*

Для доказательства воспользуемся индукцией по длине структуры S. Если эта длина равна 0 (т. е. структура содержит лишь один элемент), то утверждение, очевидно, справедливо. Предположим, что структура S имеет длину $m > 0$ и что утверждение справедливо для структур, имеющих длины $0, \ldots, m - 1$. Возьмем в S элемент c, покрытый наибольшим элементом 1 структуры S. Мы будем различать два случая:

а) $S = \langle 0, c \rangle \cup \{1\}$. Тогда, очевидно, $S = \langle 0, c \rangle \oplus \{1\}$, значит, по предположению индукции структура S удовлетворяет условию (K').

б) $S \neq \langle 0, c \rangle \cup \{1\}$. Так как $\langle c, 1 \rangle$ есть простой интервал, то должен существовать элемент $d \in S$, несравнимый с элементом c. Очевидно, $c \cup d = 1$. Из свойства (k) следует, что существуют элементы $c_0, d_0 \in S$, $c_0 \leqq c$, $d_0 \leqq d$ такие, что

$$c_0 \cup d_0 = 1 , \quad c_0 \cap d_0 = 0 . \tag{17}$$

Так как S — дистрибутивная структура, следует из уравнений (17)

$$S \cong \langle 0, c_0 \rangle \times \langle 0, d_0 \rangle .$$

Согласно 7.2, интервалы $\langle 0, c_0 \rangle$, $\langle 0, d_0 \rangle$ удовлетворяют условию (k). Так как длина каждого из них не более $m - 1$, по предположению индукции структуры $\langle 0, c_0 \rangle$, $\langle 0, d_0 \rangle$ удовлетворяют условию (K'). Следовательно и структура S удовлетворяет условию (K').

Теорема 1 вытекает как прямое следствие из теорем 1а, 1б и из утверждений 7,1, 7.3.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Birkhoff*: Lattice theory, revised ed., Amer. Math. Soc. Colloquium Publications Vol. XXV, New York 1948.

[2] *F. Loonstra*: The classes of partially ordered groups, Compositio mathematica, *9*, 130—140 (1951).

[3] *G. Birkhoff*: Lattice ordered groups, Annals of Math., *43*, 298—331 (1942).

[4] *А. Г. Курош*: Теория групп, Москва 1953.

[5] *А. И. Мальцев*: Об упорядоченных группах, Изд. акад. наук СССР, серия матем., *13*, 473—482 (1949).

[6] *H. Hahn*: Über die nicht-archimedischen Grössensysteme, Sitzungsberichte der Akad. der Wiss., Math. Naturw. Kl. Band *116*, Wien (1907).

Summary

PRINCIPAL IDEALS IN l-GROUPS

JÁN JAKUBÍK, Košice

(Received November 28, 1958)

Let G be an l-group. We use the therminology of [1] and [3] with one exception: if $x \in G$ we call the set-theoretical intersection of all l-ideals in G which contain the element x a principal ideal (generated by the element x). We denote by $S(G)$ resp. $\overline{S}(G)$ the set of all principal ideals resp. the set of all l-ideals of G. The sets $S(G)$, $\overline{S}(G)$ are partially ordered by set-theoretical inclusion.

In [1] an l-ideal A of G is called principal, if there exists a strong unit e in the l-group A ([1], Chap. XIV, § 6). If A is an l-ideal of G and if the element e is a strong unit in the l-group A then A is a principal ideal (in our sense) generated by the element e. If G is an abelian l-group then every principal ideal I (in our sense) has a strong unit and hence the l-ideal I is principal in the sense of G. Birkhoff (this is a well-known theorem of F. Riesz, cf. [1], Chap. XIV, p. 223).

In § 1.1 we construct an example of non-commutative l-group G in which there exists a principal ideal I such that the l-group I has no strong unit (i. e., the l-ideal I is not principal in Birkhoff's sense). In § 1.2 we prove that the group G has a finite number of generators (in the usual group-theoretical sense) and that the lattice $\overline{S}(G)$ has finite length. This solves a problem of G. Birkhoff ([1], problem 99).

It is well-known that $\overline{S}(G)$ is a distributive lattice. (Cf. [3].) $S(G)$ is an upper semi-lattice. If $S(G)$ is a lattice then it is a sublattice of $\overline{S}(G)$ and hence it is distributive. If $S(G)$ satisfies the ascending chain condition then $S(G)$ is a complete lattice and $S(G) = \overline{S}(G)$ (this is a generalization of a theorem of Birkhoff, cf. [3], theorem 28). If $G = A \times B$ (cardinal product), then $S(G) \cong \cong S(A) \times S(B)$ (the symbol $\cong$ denotes lattice-isomorphism). If $G = A \circ B$ (the lexicographical product, see [3]; here A is a (linearly) ordered group) then $\overline{S}(G) = \overline{S}(B) \oplus (\overline{S}(A))'$ (for a partially ordered set P with the greatest element a we denote $P' = P - \{a\}$; the symbol $\oplus$ denotes the lexicographical sum, cf. [1], p. 9). Thus the second assertion in the Ex. 3, § 14, Chap. XIV, [1] is not correctly formulated. Analogical results hold for $S(G)$, $S(A)$, $S(B)$ (see § 5).

Let S be a finite distributive lattice with the least element 0. Then there exists a commutative l-group G such that $S(G) \cong S$ if and only if the following condition (k) is fulfilled:

$$\text{(k)} \qquad \text{if} \quad x, y, z \in S, y \neq x \neq z, x = y \cup z ,$$

then there exist elements $y_0, z_0 \in S$ such that

$$x = y_0 \cup z_0 , \quad 0 = y_0 \cap z_0 , \quad y_0 \leqq y , \quad z_0 \leqq z .$$

(Another such condition was given by G. Birkhoff in [3].)