Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Švec

Déformations projectives des systèmes n-conjugués dans S_{2n-1} dont toutes les transformées de Laplace sont dégénérées

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 9 (1959), No. 3, 440–444

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100367`

DÉFORMATIONS PROJECTIVES DES SYSTÈMES n-CONJUGUÉS DANS S_{2n-1} DONT TOUTES LES TRANSFORMÉES DE LAPLACE SONT DÉGÉNÉRÉES

ALOIS ŠVEC, Praha

(Reçu le 29 septembre 1958)

M. B. SEGRE a trouvé, dans son Mémoire [1], une construction géométrique de réseaux R dans S_3 dont les deux transformées de Laplace dégénèrent. J'ai généralisé son résultat dans [2] au cas des surfaces R dans S_{2n+1} et des déformations C_{n+1}; le présent Mémoire contient une généralisation au cas de variété V_n dans S_{2n-1} et de déformation C_2.

1. Une variété $x = x(u_1, \ldots, u_n)$ du type étudié est déterminée par le système

$$\left.\begin{aligned} x_{ij} &= 0 \quad (i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j)\,, \\ x_{nn} &= ax + \sum_{i=1}^{n} b^i x_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} c^\alpha x_{\alpha\alpha}\,, \\ a = a(u_1, \ldots, u_n)\,, \quad b^i &= b^i(u_1, \ldots, u_n)\,, \quad c^\alpha = c^\alpha(u_1, \ldots, u_n)\,. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

J'emploie la notation $x_r = \dfrac{\partial x}{\partial u_r}$, $x_{rs} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u_r\, \partial u_s}$; pour les indices on a $i, j, \ldots = 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta, \ldots = 1, \ldots, n - 1$. Les conditions d'intégrabilité du système (1) sont

$$a_{\beta\gamma} - \frac{c^\gamma_\beta}{c^\gamma}\, a_\gamma - \frac{c^\beta_\gamma}{c^\beta}\, a_\beta = 0 \quad (\beta \neq \gamma)\,, \tag{2}$$

$$a_\gamma + b^\beta_{\beta\gamma} - \frac{c^\gamma_\beta}{c^\gamma}\, b^\beta_\gamma - \frac{c^\beta_\gamma}{c^\beta}\,(a + b^\beta_\beta) = 0 \quad (\beta \neq \gamma)\,, \tag{3}$$

$$b^i_{\beta\gamma} - \frac{c^\gamma_\beta}{c^\gamma}\, b^i_\gamma - \frac{c^\beta_\gamma}{c^\beta}\, b^i_\beta = 0 \quad (i \neq \beta \neq \gamma \neq i)\,, \tag{4}$$

$$b^\beta_\gamma + c^\beta_{\beta\gamma} - \frac{c^\gamma_\beta}{c^\gamma}\, c^\beta_\gamma - \frac{c^\beta_\gamma}{c^\beta}\,(b^\beta + c^\beta_\beta) = 0 \quad (\beta \neq \gamma)\,, \tag{5}$$

$$c^\alpha_{\beta\gamma} - \frac{c^\gamma_\beta}{c^\gamma}\, c^\alpha_\gamma - \frac{c^\beta_\gamma}{c^\beta}\, c^\alpha_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \alpha)\,, \tag{6}$$

$$a_{\beta n} + b^n_\beta a - \frac{c^\beta_n}{c^\beta} a_\beta = 0 \,, \tag{7}$$

$$a_n + b^\beta_{\beta n} + b^n_\beta b^\beta - \frac{c^\beta_n}{c^\beta} (a + b^\beta_\beta) = 0 \,, \tag{8}$$

$$a_\beta + b^n_{\beta n} + b^n_\beta b^n - \frac{c^\beta_n}{c^\beta} b^n_\beta = 0 \,, \tag{9}$$

$$b^\alpha_{\beta n} + b^n_\beta b^\alpha - \frac{c^\beta_n}{c^\beta} b^\alpha_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \,, \tag{10}$$

$$b^\beta_n + c^\beta_{\beta n} + b^n_\beta c^\beta - \frac{c^\beta_n}{c^\beta} (b^\beta + c^\beta_\beta) = 0 \,, \tag{11}$$

$$b^n_\beta c^\alpha + c^\alpha_{\beta n} - \frac{c^\beta_n}{c^\beta} c^\alpha_\beta = 0 \quad (\alpha \neq \beta) \,. \tag{12}$$

Soit donné, à côté de la variété (1), une autre variété, déterminée par le système ($\bar{1}$) analogue au système (1); toutes les expressions relatives à cette autre variété seront marquées d'une barre. Entre les deux variétés soit donné une correspondance $\bar{u}_i = u_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Si les deux variétés sont en déformation projective de second ordre, il existe pour chaque paire de points correspondants une homographie qui est nécessairemment de la forme

$$K\bar{x} = x \,, \quad K\bar{x}_i = x_i + \lambda^i x \,, \quad K\bar{x}_{\alpha\alpha} = x_{\alpha\alpha} + 2\lambda^\alpha x_\alpha + \mu^\alpha x \tag{13}$$

et pour laquelle

$$K\bar{x} = x \,, \quad K\,\mathrm{d}\bar{x} = \mathrm{d}x + \mu x \,, \quad K\,\mathrm{d}^2\bar{x} = \mathrm{d}^2 x + 2\mu\,\mathrm{d}x + \nu x \,. \tag{14}$$

De (14_2) il s'ensuit $\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda^i\,\mathrm{d}u_i$, par substitution dans (14_3) nous trouvons

$$\left.\begin{aligned} (b^\alpha - \bar{b}^\alpha - 2\lambda^\alpha \bar{c}^\alpha)\,\mathrm{d}u_n^2 + 2\sum_{\substack{i=1\\ i\neq\alpha}}^{n} \lambda^i\,\mathrm{d}u_\alpha\,\mathrm{d}u_i &= 0 \,, \\ (b^n - \bar{b}^n + 2\lambda^n)\,\mathrm{d}u_n^2 + 2\sum_{\alpha=1}^{n-1} \lambda^\alpha\,\mathrm{d}u_\alpha\,\mathrm{d}u_n &= 0 \,, \\ (c^\alpha - \bar{c}^\alpha)\,\mathrm{d}u_n^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

donc, la condition nécessaire et suffisante pourque les variétés (1) et ($\bar{1}$) soient en déformation projective du second ordre est que

$$b^i = \bar{b}^i \,, \quad c^\alpha = \bar{c}^\alpha \,. \tag{16}$$

Le problème de trouver les variétés (1) projectivement déformables se réduit donc ainsi au problème de trouver un système de fonctions a, b^i, c^α, satisfaisant aux équations (2)—(12) et pour lequel il existe au moins une fonction $\bar{a} \neq a$ telle que le système $\bar{a}, b^i, c^\alpha$ vérifie, lui-aussi, les équations (2)—(12).

En substituant a_γ, calculé à partir de (9), dans les équations (3), nous obtenons une équation linéaire en a; comme cette équation doit être vérifiée par a et par $\bar{a}$ simultanément, il vient

$$c_\gamma^\beta = 0 \quad (\beta \neq \gamma) . \tag{17}$$

Les équations (5) se réduisent à

$$b_\gamma^\beta = 0 \quad (\beta \neq \gamma) , \tag{18}$$

les équations (3) deviennent

$$a_\beta = 0 \tag{19}$$

et (pour $a \neq 0$) il vient de (7)

$$b_\beta^n = 0 . \tag{20}$$

On a donc $a = f(u_n)$. Après transformation de variables $\bar{u}_n = g(u_n)$, (1_2) devient (à la notation manifeste)

$$g'^2 x_{\bar{n}\bar{n}} + g'' x_{\bar{n}} = fx + \sum_{\alpha=1}^{n-1} b^\alpha x_\alpha + b^n g' x_{\bar{n}} + \sum_{\alpha=1}^{n-1} c^\alpha x_{\alpha\alpha} .$$

Si l'on choisit g de manière à avoir $g'^2 = k^{-1} f$ ($k = \text{const} \neq 0$) il sera possible d'écrire les équations des variétés considérées de telle façon que l'on ait

$$a = k \quad (= \text{const}) . \tag{21}$$

En procédant de la manière décrite ci-dessus on obtient d'après (21) à partir de (8) l'égalité

$$c_n^\beta = 0 \tag{22}$$

et à partir de (11), (22) et (20)

$$b_n^\beta = 0 . \tag{23}$$

On a donc en vertu de (18), (20), (23), soit respectivement (17), (22)

$$b^i = b^i(u_i) , \quad c^\alpha = c^\alpha(u_\alpha) . \tag{24}$$

Le lecteur verra aisément lui-même en appliquant des transformations convenables $\bar{u}_\alpha = \bar{u}_\alpha(u_\alpha)$ que *les variétés projectivement déformables du type considéré sont données par le système totalement intégrable*

$$\left.\begin{aligned} x_{ij} = 0 , \quad x_{nn} = kx + \sum_{i=1}^{n} U_i x_i + \sum_{\alpha=1}^{n-1} x_{\alpha\alpha} , \\ k = \text{const} , \quad U_i = U_i(u_i) ; \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

on obtient les déformations projectives en faisant varier k.

2. Il nous reste à déterminer la construction géométrique des variétés (25). Par differentiation de (25_2) en u_α ou en u_n nous obtenons

$$x_{\alpha\alpha\alpha} + U_\alpha x_{\alpha\alpha} + (U'_\alpha + k)\, x_\alpha = 0$$

resp.

$$x_{nnn} - U_n x_{nn} - (U'_n + k)\, x_n = 0 \tag{26}$$

de sorte que *toute courbe du système n-conjugué de la variété étudiée est plane et chacune de ses transformées de Laplace est une droite.* La variété (25) possède l'expression analytique

$$x(u_1, \ldots, u_n) = x^1(u_1) + \ldots + x^n(u_n)\,. \tag{27}$$

Considérons deux de ses sous-variétés, donnés paramétriquement

$$y(u_1, \ldots, u_p) = x^1(u_1) + \ldots + x^p(u_p) + x^{p+1}(u'_{p+1}) + \\ + x^{p+2}(u'_{p+2}) + \ldots + x^n(u'_n)\,, \tag{28}$$

$$z(u_1, \ldots, u_p) = x^1(u_1) + \ldots + x^p(u_p) + x^{p+1}(u''_{p+1}) + \\ + x^{p+2}(u'_{p+2}) + \ldots + x^n(u'_n)\,, \tag{29}$$

les $u'_p, u''_p, \ldots, u'_n$ étant constantes. Chacune des deux sous-variétés se trouve visiblement dans un espace à $2p$ dimensions. Le point

$$z = y(u_1, \ldots, u_p) - z(u_1, \ldots, u_p) = x^{p+1}(u'_{p+1}) - x^{p+1}(u''_{p+1})$$

est situé sur la transformée de Laplace $[x_{p+1}, x_{p+1,\,p+1}]$ de la variété (27). En s'appuyant sur les résultats cités plus haut, le lecteur démontrera lui-même aisément la validité de la construction suivante des variétés (25):

Soit donné dans S_{2n-1} n droites d_i ($i = 1, \ldots, n$) et un point P, dans chaque plan $\alpha_i = [d_i, P]$ soit donné une courbe γ_i, passant par le point P. Nous allons construire successivement les variétés $V_1 = \gamma_1, V_2, \ldots, V_n$ (V_i étant à i dimensions). *Supposons que la variété V_r ait été déjà construite, elle passe par le point P et se trouve dans l'espace $[d_1, d_2, \ldots, d_r, P]$; la variété V_{r+1} sera construite de la façon suivante: Soit Q le point de la courbe γ_{r+1}, soit S_Q le point d'intersection de d_{r+1} avec PQ, $\sigma_Q = [d_1, d_2, \ldots, d_r, Q]$, soit V_r^Q la projection de la variété V_r dans σ_Q le point S_Q étant pris pour centre de projection; la variété V_{r+1} sera l'ensemble des variétés V_r^Q, $Q \in \gamma_{r+1}$. Cette variété V_{r+1} se trouve manifestement dans l'espace $[d_1, \ldots, d_{r+1}, P]$. V_n est une variété du type cherché et ses transformées de Laplace sont justement les droites d_i.*

LITTÉRATURE

[1] *B. Segre*: Intorno alla teoria delle superficie proiettivamente deformabili..., Mem. della Acc. Italia, Vol. II, No 3, 1931.

[2] *A. Švec*: Les surfaces *R* dans les espaces projectifs de dimension impaire, Чех. мат. ж. *9 (84)*, 1959, 243–264.

Резюме

ПРОЕКТИВНОЕ ИЗГИБАНИЕ n-СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ В S_{2n-1}, ВСЕ ЛАПЛАСОВСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КОТОРЫХ ВЫРОЖДЕНЫ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага

(Поступило в редакцию 29/IX 1958 г.)

Многообразия $x = x(u_1, \ldots, u_n)$ в S_{2n-1}, удовлетворяющие системе (1) и проективно изгибаемые, даны системой (25); их проективные изгибания получаются путем изменения числа k. Их геометрическое построение имеет следующий вид:

Пусть в S_{2n-1} дано n прямых d_i ($i = 1, \ldots, n$) и точка P, пусть в каждой плоскости $\alpha_i = [d_i, P]$ дана кривая γ_i, проходящая через точку P. Построим постепенно последовательность многообразий $V_1 = \gamma_1, V_2, \ldots, V_n$ (V_i имеет размерность i). Предположим, что мы уже построили многообразие V_r, проходящее через точку P и лежащее в пространстве $[d_1, d_2, \ldots, \ldots, d_r, P]$; построим многообразие V_{r+1} следующим образом:

Пусть Q — произвольная точка кривой γ_{r+1}, S_Q — пересечение d_{r+1} с PQ, $\sigma_Q = [d_1, d_2, \ldots, d_r, Q]$, V_r^Q — проекция многообразия V_r в пространство σ_Q из точки S_Q; многообразие V_{r+1} является совокупностью многообразий V_r^Q $Q \in \gamma_{r+1}$; V_{r+1} лежит, очевидно, в пространстве $[d_1, \ldots, d_{r+1}, P]$. Многообразие V_n является многообразием искомого типа и ее преобразованиями Лапласа являются как раз прямые d_i.