Czechoslovak Mathematical Journal

František Zítek

Fonctions aléatoires d'intervalle

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 4, 583–609

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100332

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

FONCTIONS ALÉATOIRES D'INTERVALLE

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 29 mai 1957)

Dans cet article, l'auteur étudie les fonctions aléatoires d'intervalle, en particulier les fonctions à accroissements indépendants. Il introduit ensuite deux notions d'intégrale d'une telle fonction, analogues à la notion bien connue d'intégrale de Burkill. Les propriétés de ces intégrales sont alors étudiées, compte tenu de la théorie des processus stochastiques additifs et de la théorie des équations différentielles stochastiques. Toute l'étude se fait du point de vue de Bernoulli seulement.

1. Notions et notations fondamentales

Soit $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ un champ de probabilité donné, désignons par $\mathfrak{X}^*$ l'ensemble de toutes les variables aléatoires $X, Y, \ldots$ (fonctions réelles, à valeurs finies, mesurables-$\mathfrak{S}$) définies sur ce champ, et par $\mathfrak{X}$ le sous-ensemble des variables aléatoires dépendant de lois de répartition indéfiniment divisibles.

A toute variable aléatoire $X \in \mathfrak{X}^*$ nous faisons correspondre sa fonction de répartition

$$F_X(x) = \mathbf{P}\{\omega\colon\ X(\omega) < x\} \tag{1.1}$$

et sa fonction caractéristique

$$\varphi_X(s) = \int_\Omega \exp\,(isX)\,\mathrm{d}\mathbf{P}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx}\,\mathrm{d}F_X(x)\,. \tag{1.2}$$

Il est alors possible, dans tout intervalle $-s_0 < s < s_0$ où $\varphi(s) \neq 0$, de définir le logarithme de cette fonction caractéristique, qui est appelé *fonction-ψ* de la loi en question. C'est une fonction complexe de l'argument réel s, continue, et s'annulant pour $s = 0$; elle est par là déterminée sans ambiguïté (cf. [18], chap. VIII, § 5). Si $X \in \mathfrak{X}$, on sait bien que l'on a alors $\varphi_X(s) \neq 0$ pour chaque s réel de sorte que pour les variables aléatoires de $\mathfrak{X}$ les fonctions-ψ correspondantes peuvent être définies sur tout l'axe réel.

A côté de l'égalité presque certaine $X = Y$ de deux variables aléatoires, nous emploierons le symbole d'équivalence $X \sim Y$ pour désigner que les deux variables aléatoires en question ont la même loi de répartition.

Une suite $\{X_n\}$ d'élements de $\mathfrak{X}^*$ sera dite *convergente-B* vers $X \in \mathfrak{X}^*$, ce que l'on écrira par $X \sim B \lim_{n \to \infty} X_n$, lorsque les fonctions de répartition des X_n tendent vers celle de X en tout point où la dernière est continue. Il est évident que la limite-B d'une suite convergente-B n'est déterminée qu'à l'équivalence $\sim$ près. Comme on le sait bien, il correspond à cette convergence-B la convergence localement uniforme des fonctions caractéristiques correspondantes; pour les conditions analogues qui sont à imposer, dans ce cas, aux fonctions-ψ, voir [18], p. 199.

Si x est un nombre réel, le symbole $V\{x\}$ dénotera la variable aléatoire vérifiant $\mathbf{P}\{\omega\colon\ V\{x\} \neq x\} = 0$. On a évidemment $V\{x\} \in \mathfrak{X}$ pour tout x réel.

A côté de la convergence-B, nous emploierons aussi la convergence en probabilité, que nous appellerons *convergence-p*. On sait bien que l'on a alors

$$X = p \lim X_n \Leftrightarrow V\{0\} \sim B \lim (X_n - X)\,, \tag{1.3}$$

$$X = p \lim X_n \Rightarrow X \sim B \lim X_n \tag{1.4}$$

et pour tout x réel

$$V\{x\} = p \lim X_n \Leftrightarrow V\{x\} \sim B \lim X_n\,; \tag{1.5}$$

pour la démonstration de ces trois relations voir p. ex. [17], chap. IV, § 13.

2. Fonctions aléatoires d'intervalle

Soit $R = (-\infty, \infty)$ l'axe réel. Sauf avis contraire, nous comprendrons dans ce qui suit par le mot *intervalle* toujours un intervalle borné demi-ouvert $\langle a, b) = \{t \in R\colon\ a \leqq t < b\}$, $a \leqq b$, contenu dans R. Si $I = \langle a, b)$ est un intervalle, le symbole $|I|$ dénote sa longueur $(b - a)$. L'intervalle vide sera désigné par $\emptyset$. Deux intervalles disjoints et non-vides seront appelés *voisins* s'ils ont une extrémité commune; seront considérés comme voisins aussi deux intervalles quelconques dont un au moins est vide.

Une suite $\{I_n\}$ d'intervalles $I_n = \langle t_n, t_n')$ sera dite converger vers $I = \langle t, t')$, $t < t'$ — nous écrirons alors $I_n \to I$ — lorsque $t_n \to t$, $t_n' \to t'$. Par contre, la convergence vers l'intervalle vide, $I_n \to \emptyset$, désignera le fait que $|I_n| \to 0$.

Si K est un intervalle non-vide, désignons par $\boldsymbol{K}$ le système de tous les sous-intervalles $J \subset K$. Par *fonction aléatoire d'intervalle* définie dans K nous entendrons alors une transformation $\boldsymbol{X}$ faisant à chaque $I \in \boldsymbol{K}$ correspondre une variable aléatoire $X(I) \in \mathfrak{X}^*$. Si $X(I) \in \mathfrak{X}$ pour tout $I \in \boldsymbol{K}$, nous dirons que la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ est du type ID. Toute fonction de ce type induit une autre transformation qui fait à chaque $I \in \boldsymbol{K}$ correspondre la fonction-ψ de la variable aléatoire $X(I)$; cette fonction sera désignée par $\psi(I, s)$, ou bien, si besoin est, par $\psi_{\mathbf{X}}(I, s)$.[1])

Nous dirons d'une fonction aléatoire d'intervalle qu'elle est *à accroissements indépendants* si pour tout nombre fini n d'intervalles disjoints $I_j \in \boldsymbol{K}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, les variables aléatoires $X(I_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, sont stochastiquement indépendantes. Dans ce qui suit nous nous occuperons presque exclusivement de fonctions aléatoires à accroissements indépendants, aussi ne répétons-nous pas cette supposition fondamentale à chaque occasion, les rares exceptions étant toujours mentionnées explicitement.

Une fonction aléatoire d'intervalle $\mathbf{X}$ sera dite *additive-B*, ou *additive-p*, si pour tout couple d'intervalles voisins $I_1, I_2 \in \boldsymbol{K}$,[2]) nous avons

$$X(I_1 \cup I_2) \sim X(I_1) + X(I_2) , \tag{2.1}$$

ou bien respectivement

$$X(I_1 \cup I_2) = X(I_1) + X(I_2) . \tag{2.2}$$

Il est évident que l'additivité-B est une conséquence de l'additivité-p, mais non pas inversement.

Convenons de dire d'une fonction aléatoire d'intervalle $\mathbf{X}$ qu'elle est *homogène* si pour $I_1, I_2 \in \boldsymbol{K}$ nous avons

$$|I_1| = |I_2| \Rightarrow X(I_1) \sim X(I_2) . \tag{2.3}$$

Une fonction aléatoire $\mathbf{X}$ sera dite *continue-B*, ou encore *continue-p*, en J, $\emptyset \neq J \in \boldsymbol{K}$, si pour toute suite d'intervalles $\{I_n\}$ telle que $I_n \to J$, on a

$$X(J) \sim B \lim X(I_n) , \tag{2.4}$$

ou bien respectivement

$$X(J) = p \lim X(I_n) . \tag{2.5}$$

De façon analogue, nous dirons que la fonction $\mathbf{X}$ est *continue en* $\emptyset$ si pour toute suite $\{I_n\}$, $I_n \to \emptyset$, $I_n \in \boldsymbol{K}$,[3]) nous avons

$$B \lim X(I_n) \sim V\{0\} . \tag{2.6}$$

Il résulte de (1.5) que dans ce cas la continuité-B et la continuité-p coïncident. Une fonction aléatoire $\mathbf{X}$ sera enfin dite continue (-B ou -p) *sur* J, $J \in \boldsymbol{K}$, si elle est continue en tout $I \in \boldsymbol{J}$.

---

[1]) Si une fonction aléatoire n'est pas du type ID, on peut parler de la fonction-ψ correspondante seulement dans le cas où elle peut être définie dans un intervalle non-vide de la variable s.

[2]) Les lettres K et $\boldsymbol{K}$ seront en général employées pour désigner le domaine (non-vide) de définition de la fonction aléatoire considérée.

[3]) Si (2.6) n'est valable que pour le cas de $I_n \in \boldsymbol{J}$, où $J \in \boldsymbol{K}$, nous soulignerons cette restriction en disant que $\mathbf{X}$ est continue en $\emptyset$ sur $\boldsymbol{J}$; nous omettons toutefois ce détail s'il s'agit de tout le domaine de définition de la fonction aléatoire en question.

Théorème 1. *Soit* $\mathbf{X}$ *une fonction aléatoire d'intervalle définie dans* K, *continue en* $\emptyset$. *Si elle est additive* B, *elle est aussi continue-*B *sur* K. *Si elle est additive-*p, *elle est aussi continue-*p *sur* K.

Démonstration. Supposons donc d'abord que $\mathbf{X}$ soit additive-B. Nous avons alors nécessairement $X(\emptyset) = V\{0\}$. Soit ensuite J un intervalle non-vide, $J \in \boldsymbol{K}$, et soit $\{I_n\}$ une suite d'intervalles tendant vers J. Posons maintenant pour chaque n naturel $J_n = I_n \cap J$. Il est alors possible — et cela d'une seule façon — d'exprimer l'intervalle J comme une somme de trois intervalles disjoints $J = J_n' \cup J_n \cup J_n''$, tels que: (a) J_n' et J_n sont voisins, (b) J_n et J_n'' le sont également, (c) $J_n = \emptyset \Rightarrow J_n'' = \emptyset$. Nous aurons en tout cas $J - I_n = J_n' \cup J_n''$. D'une manière analogue, I_n peut être exprimé comme $I_n = I_n' \cup J_n \cup I_n''$, les intervalles I_n', J_n, I_n'' satisfont à trois conditions analogues aux conditions (a)—(c), et nous avons de nouveau $I_n - J = I_n' \cup I_n''$. En vertu de l'additivité-B supposée nous avons alors pour tout n

$$X(J) \sim X(J_n) + X(J_n') + X(J_n''), \tag{2.7}$$

$$X(I_n) \sim X(J_n) + X(I_n') + X(I_n''). \tag{2.8}$$

Maintenant comme $I_n \to J$, nous avons nécessairement $J_n' \to \emptyset$, $J_n'' \to \emptyset$, $I_n' \to \emptyset$, $I_n'' \to \emptyset$ et, bien entendu, $J_n \to J$ également. Or comme la fonction $\mathbf{X}$ est supposée continue en $\emptyset$, nous obtenons à partir de (2.7) $X(J) \sim B \lim X(J_n)$ et à partir de (2.8) $B \lim X(I_n) \sim B \lim X(J_n)$, donc en effet $X(J) \sim B \lim X(I_n)$. Nous voyons que $\mathbf{X}$ est continue-B en J, J étant un intervalle arbitraire contenu dans K. Pour la continuité-p la démonstration est tout à fait analogue.

Théorème 2. *Si* $\mathbf{X}$ *est une fonction aléatoire d'intervalle homogène et additive-*B, *alors* $\mathbf{X}$ *est du type* ID.

Démonstration. Soit $I \in \boldsymbol{K}$, partageons l'intervalle I en n sous-intervalles disjoints I_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ de longueur égale $|I_j| = \frac{1}{n}|I|$. En vertu de l'additivité-B supposée nous avons alors $X(I) \sim \Sigma X(I_j)$. Les variables aléatoires $X(I_j)$ sont stochastiquement indépendantes, car les intervalles I_j sont disjoints, et elles ont une même loi de répartition, car les intervalles I_j sont tous de même longueur et $\mathbf{X}$ est homogène. Comme une telle décomposition est possible pour tout n naturel, il est clair que $X(I) \in \mathfrak{X}$, c. q. f. d.

Théorème 3. *Si* $\mathbf{X}$ *est une fonction aléatoire d'intervalle additive-*B *et continue en* $\emptyset$, *alors* $\mathbf{X}$ *est du type* ID.

Démonstration. Soit $I \in \boldsymbol{K}$, $\eta > 0$; nous divisons l'intervalle I en un nombre fini d'intervalles disjoints I_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ tels que nous ayons

$$\mathbf{P}\{\omega\colon |X(I_j)| > \eta\} < \eta \tag{2.9}$$

pour $j = 1, 2, \ldots, n$. Une telle décomposition est toujours possible en raison de la continuité en $\emptyset$ supposée. La fonction aléatoire $\mathbf{X}$ étant additive-B, nous avons alors $X(I) \sim \Sigma X(I_j)$ et les variables aléatoires $X(I_j)$ sont stochastiquement indépendantes. De là et de (2.9) il découle d'après [6], chap. III, § 4, que l'on a $X(I) \in \mathfrak{X}$, c. q. f. d.

Il est aisé de voir que pour les fonctions aléatoires du type ID l'additivité-B est équivalente à l'additivité de la fonction-ψ correspondante (additivité en I pour tout s réel). Quant à l'additivité-p, on n'a pas de correspondance analogue.

Théorème 4. *Si $\boldsymbol{X}$ est une fonction aléatoire d'intervalle définie dans K, additive-B, homogène et continue en $\emptyset$, alors sa fonction-ψ a la forme suivante*

$$\psi(I, s) = |I| \cdot \psi_0(s) , \tag{2.10}$$

où ψ_0 est une fonction-ψ correspondant à une loi indéfiniment divisible.

Démonstration. D'après notre théorème 2 la fonction est du type ID, la fonction $\psi(I, s)$ est donc bien définie pour tout $I \in \boldsymbol{K}$ et pour tout $s \in R$. Comme $\boldsymbol{X}$ est en outre homogène, il est facile de voir qu'il existe une fonction complexe de deux variables réelles, soit $\psi_1(y, s)$, définie pour $s \in R$, $0 \leqq y \leqq |K|$, et vérifiant pour tout $I \in \boldsymbol{K}$ l'égalité $\psi(I, s) = \psi_1(|I|, s)$. De l'additivité-$B$ de la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ découle l'additivité (par rapport à y) de la fonction ψ_1, de sorte que

$$\psi_1(y_1, s) + \psi_1(y_2, s) = \psi_1(y_1 + y_2, s) \tag{2.11}$$

est valable pour tout $s \in R$, $0 \leqq y_1, y_2, y_1 + y_2 \leqq |K|$. En vertu de l'additivité-B de $\boldsymbol{X}$ nous avons encore, comme nous savons déjà, $\psi_1(0, s) \equiv 0$, tandis que la continuité en $\emptyset$ de $\boldsymbol{X}$ entraîne la continuité de ψ_1 au point $y = 0$. De là et de (2.11) résulte alors que ψ_1 est nécessairement linéaire en y, c'est-à-dire que l'on a (identiquement en $s \in R$) $\psi_1(y, s) = y\, \psi_0(s)$, donc effectivement (2.10) a lieu. Le fait que ψ_0 correspond à une loi indéfiniment divisible est alors une conséquence immédiate de ce que $\boldsymbol{X}$ est du type ID; la démonstration de notre théorème se trouve par là achevée.

Nous dirons d'une fonction aléatoire d'intervalle $\boldsymbol{X}$, définie dans K qu'elle est *absolument continue* (dans K) si à chaque nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif δ tel que pour tout système fini d'intervalles disjoints $I_j \in \boldsymbol{K}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ on a

$$\mathbf{P}\{\omega\colon |\sum_{j=1}^{n} X(I_j)| > \varepsilon\} < \varepsilon , \tag{2.12}$$

pourvu que l'on ait $\sum_{j=1}^{n} |I_j| < \delta$. Toute fonction aléatoire qui est absolument continue est aussi continue en $\emptyset$; cela est presque trivial.

Théorème 5. *Soit $\boldsymbol{X}$ une fonction aléatoire d'intervalle qui est absolument continue et supposons que sa fonction-ψ soit bien définie pour $I \in \boldsymbol{K}$, $|s| < s_0$, $s_0 > 0$. Alors cette fonction $\psi(I, s)$ est, en tant qu'une fonction de I, aussi absolument continue, pour les mêmes valeurs de s.*

Démonstration. Soit $\{I_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, un système fini d'intervalles disjoints, $I_j \in \boldsymbol{K}$. Lorsque $\Sigma|I_j|$ est suffisamment petit, la relation (2.12) est vérifiée. Soit φ_Σ la fonction caractéristique de la somme $\sum_{j=1}^{n} X(I_j)$. En vertu du lemme cité dans [9], § 11, p. 52, nous avons alors

$$|\varphi_\Sigma(s) - 1| < (s_0 + 2)\,\varepsilon \tag{2.13}$$

pour $|s| < s_0$. Comme la fonction $\lg z$ est continue dans tout voisinage (complexe) suffisamment petit du point $z = 1$, il s'en ensuit que $|\lg \varphi_\Sigma(s)| < \varepsilon_1$, si ε est suffisamment petit. Mais de l'autre côté nous avons évidemment $\lg \varphi_\Sigma(s) = \Sigma\psi(I_j, s)$, donc pour $|s| < s_0$ l'implication

$$\Sigma|I_j| < \delta \Rightarrow |\Sigma\psi(I_j, s)| < \varepsilon_1$$

a lieu. Maintenant il n'y a plus de difficulté à montrer que

$$|\sum_{j=1}^{n} \psi(I_j, s)| < \varepsilon_1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |\psi(I_j, s)| < 4\varepsilon_1 = \varepsilon_2\,,$$

nous voyons donc en somme que, pour $\varepsilon > 0$, $s_0 > 0$ donnés, il est possible de choisir $\delta > 0$ tel que l'on ait pour $|s| < s_0$, $I_j \in \boldsymbol{K}$

$$\sum_{j=1}^{n} |I_j| < \delta \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |\psi(I_j, s)| < \varepsilon\,, \tag{2.14}$$

c. q. f. d.

3. Définition des intégrales-(BB) et -(pB)

Soit $K = \langle t, t' \rangle$ un intervalle non-vide, $K \subset R$. Nous appellerons *partition* de l'intervalle K tout système fini $\mathscr{D} = \{I_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ d'intervalles $I_j = \langle t_j, t_j' \rangle$ tels que $t = t_1 \leqq t_1' = t_2 \leqq \ldots \leqq t_{n-1}' = t_n \leqq t_n' = t'$. Le nombre réel $\nu(\mathscr{D}) = \max_{1 \leqq j \leqq n} |I_j|$ sera appelé norme de la partition $\mathscr{D}$.

Soit $\mathbf{X}$ une fonction aléatoire d'intervalle définie dans K. A toute partition $\mathscr{D}$ de cet intervalle K faisons correspondre la variable aléatoire

$$S(\mathscr{D}, K, \mathbf{X}) = \sum_{I_j \in \mathscr{D}} X(I_j)\,. \tag{3.1}$$

Considérons maintenant les suites $\{\mathscr{D}_n\}$ de partitions de l'intervalle K telles que $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$. Si pour chacune de ces suites il existe une limite-B (ou bien une limite-p) de la suite correspondante des variables aléatoires $S(\mathscr{D}_n, K, \mathbf{X})$, alors cette limite sera appelée *intégrale*-(BB), ou *intégrale*-(pB) respectivement, de la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ dans l'intervalle K, ce qui s'écrira par

$$(BB)\text{-}\int_K \mathbf{X} \sim B \lim S(\mathscr{D}_n, K, \mathbf{X})\,, \tag{3.2}$$

ou bien respectivement

$$(pB)\text{-}\int_K \mathbf{X} = p \lim S(\mathscr{D}_n, K, \mathbf{X})\,. \tag{3.3}$$

Il est aisé de voir que ces limites, si elles existent, sont nécessairement indépendantes du choix particulier de la suite de partitions $\mathscr{D}_n$, pourvu que celle-ci vérifie, bien entendu, la condition $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$. En effet, si nous avons deux de telles suites, soit $\{\mathscr{D}'_n\}$ et $\{\mathscr{D}''_n\}$, nous n'avons qu'à les combiner en posant $\mathscr{D}_{2k} = \mathscr{D}''_k$, $\mathscr{D}_{2k-1} = \mathscr{D}'_k$, $k = 1, 2, \ldots$, la suite $\{S(\mathscr{D}_n, K, \boldsymbol{X})\}$ ainsi engendrée doit avoir aussi une limite, nécessairement égale[4]) aux limites des suites $\{S(\mathscr{D}'_n, K, \boldsymbol{X})\}$ et $\{S(\mathscr{D}''_n, K, \boldsymbol{X})\}$ qui coïncident donc l'une avec l'autre, c. q. f. d.

Pour simplifier nos expressions, nous appellerons *intégrable*, -(BB) ou -(pB) respectivement, dans K, toute fonction aléatoire d'intervalle $\boldsymbol{X}$ définie dans K et telle que son intégrale, -(BB) ou -(pB), existe dans chaque intervalle $J \in \boldsymbol{K}$. Il est clair que l'intégrabilité-(pB) entraîne l'intégrabilité-(BB). Pour les fonctions aléatoires intégrables, nous pouvons alors introduire la notion d'intégrale indéfinie, en entendant par là la fonction aléatoire d'intervalle, soit $\boldsymbol{Z}$ p. ex., vérifiant pour la fonction $\boldsymbol{X}$ donnée soit

$$Z(J) \sim (BB)\text{-}\int_J \boldsymbol{X}\,, \tag{3.4}$$

soit respectivement

$$Z(J) = (pB)\text{-}\int_J \boldsymbol{X}\,, \tag{3.5}$$

pour tout intervalle $J \in \boldsymbol{K}$.

Remarque. Il est clair qu'il serait possible de développer la théorie de l'intégrale-(BB) en se passant de l'emploi de l'appareil des variables aléatoires et en s'exprimant exclusivement en termes de lois de répartition. Si nous avons choisi cette manière de parler qui est un peu plus compliquée, c'était uniquement à cause du parallélisme existant entre la théorie de l'intégrale-(BB) et celle de l'intégrale-(pB), qui est ainsi mis en relief beaucoup plus nettement. De l'autre côté, il faut avouer que l'inconvénient (peu important d'ailleurs, car nous nous bornons au point de vue de Bernoulli) de notre conception consiste en ce qu'elle nécessite certaines suppositions concernant le champ de probabilité fondamental $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$; nous supposons en effet partout que toutes les variables aléatoires dont nous avons besoin existent sur le champ donné.

Il est à remarquer encore qu'il serait possible aussi de développer une théorie de fonctions aléatoires d'intervalle sans se borner au point de vue de Bernoulli, donc une théorie opérant avec les notions de fonction-échantillon (sample-functions) et de mesure dans les espaces-produits (cf. [6]). Cette théorie ferait surgir, bien entendu, une quantité de problèmes intéressants qui ne se posent pas pour notre théorie bernoullienne, p. ex. en connexion avec la notion d'intégrale-indéfinie d'une fonction aléatoire d'intervalle $\boldsymbol{X}$ donnée. Comme nous nous

[4]) Il est toutefois clair qu'une intégrale-(BB) n'est déterminée qu'à l'équivalence $\sim$ près, c'est donc ainsi qu'il faut comprendre aussi la coïncidence des limites-B de différentes suites $\{S(\mathscr{D}_n, K, \boldsymbol{X})\}$.

sommes borné au point de vue de Bernoulli, nous ne voulons pas insister sur ces questions; nous y reviendrons d'ailleurs encore paragraphe 7 en y montrant une voie conduisant à leur solution.

Nous allons montrer maintenant que les notions d'intégrale introduites ci-dessus ne sont pas dépourvues de sens, c'est-à-dire qu'il existe effectivement des fonctions intégrables. Nous avons en effet le

Théorème 6. *Si $\mathbf{X}$ est une fonction aléatoire d'intervalle définie dans K et additive-B, alors elle est intégrable-(BB) dans K et l'on a pour tout intervalle $J \in \boldsymbol{K}$*

$$X(J) \sim (BB)\text{-}\int_J \mathbf{X} \,. \tag{3.6}$$

Si $\mathbf{X}$ est additive-p, elle est aussi intégrable-(pB) dans K et pour tout $J \in \boldsymbol{K}$ on a

$$X(J) = (pB)\text{-}\int_J \mathbf{X} \,. \tag{3.7}$$

Pour démontrer ce théorème il suffit de se rendre compte de ce que l'additivité-B entraîne l'équivalence $X(J) \sim S(\mathscr{D}, J, \mathbf{X})$ valable pour toute partition $\mathscr{D}$ de l'intervalle J considéré; de façon analogue, l'additivité-p entraîne l'égalité $X(J) = S(\mathscr{D}, J, \mathbf{X})$. En procédant ensuite au passage à la limite (-B ou -p respectivement) on obtient de là les relations (3.6) ou (3.7), c. q. f. d.

Dans ce qui suit, nous laissons pour l'instant de côté les problèmes d'existence auxquels nous reviendrons cependant au paragraphe 7, et nous allons étudier d'abord certaines propriétés fondamentales des intégrales-(BB) et -(pB), dont la connaissance nous sera d'ailleurs utile même pour la solution des problèmes mentionnés.

4. Propriétés des intégrales-(BB) et -(pB)

Théorème 7. *L'intégrale-(BB) indéfinie d'une fonction aléatoire d'intervalle $\mathbf{X}$ définie et intégrable-(BB) dans K y est additive-B.*

L'intégrale-(pB) indéfinie d'une fonction aléatoire d'intervalle $\mathbf{X}$ définie et intégrable-(pB) dans K y est additive-p.

Démonstration. Soient J_1, J_2 deux intervalles voisins, $J_1 \cup J_2 = J \in \boldsymbol{K}$. Soient $\{\mathscr{D}_n^{(1)}\}$ et $\{\mathscr{D}_n^{(2)}\}$ deux suites de partitions des intervalles J_1 et J_2 respectivement, soit $\{\mathscr{D}_n\}$ la suite de partitions de l'intervalle J que l'on obtient en combinant les termes correspondants des deux suites données. Si $\nu(\mathscr{D}_n^{(1)}) \to 0$ et $\nu(\mathscr{D}_n^{(2)}) \to 0$, alors $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$ également. En même temps nous avons pour chaque n naturel l'égalité

$$S(\mathscr{D}_n^{(1)}, J_1, \mathbf{X}) + S(\mathscr{D}_n^{(2)}, J_2, \mathbf{X}) = S(\mathscr{D}_n, J, \mathbf{X}) \,, \tag{4.1}$$

es deux termes du premier membre étant stochastiquement indépendants. Si $\mathbf{X}$ est intégrable-(BB) dans K, nous pouvons passer en (4.1) à la limite-B en obtenant ainsi l'équivalence (les intégrales dans J_1 et J_2 étant supposées indépendantes)

$$(BB)\text{-}\int_{J_1} \mathbf{X} + (BB)\text{-}\int_{J_2} \mathbf{X} \sim (BB)\text{-}\int_{J} \mathbf{X} . \tag{4.2}$$

Si $\mathbf{X}$ est intégrable-(pB), nous pouvons passer à la limite-p en obtenant ainsi de (4.1) l'égalité

$$(pB)\text{-}\int_{J_1} \mathbf{X} + (pB)\text{-}\int_{J_2} \mathbf{X} = (pB)\text{-}\int_{J} \mathbf{X} , \tag{4.3}$$

c. q. f. d.

Les conditions du théorème 7 peuvent encore être affaiblies, à savoir de la façon suivante:

Théorème 8. *Soient J_1, J_2 deux intervalles voisins, $J_1 \cup J_2 = J \in \mathbf{K}$. Supposons que pour la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ donnée les intégrales, -(BB) ou -(pB) respectivement, existent dans les trois intervalles J_1, J_2, J. Alors* (4.2), *ou* (4.3) *respectivement, a lieu.*

Théorème 9. *L'intégrale, -(BB) ou -(pB) respectivement, indéfinie d'une fonction aléatoire $\mathbf{X}$ homogène et intégrable, -(BB) ou -(pB) respectivement, est elle aussi homogène.*

Démonstration. Soient J_1, J_2 deux sous-intervalles de K, $|J_1| = |J_2|$. A toute partition $\mathscr{D}^{(1)} = \{I'_j\}$ de l'intervalle J_1 on peut faire correspondre une partition $\mathscr{D}^{(2)} = \{I''_j\}$ de l'intervalle J_2 telle que l'on ait $|I'_j| = |I''_j|$ pour tout j. En vertu de l'homogénéité de la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ on aura alors $S(\mathscr{D}^{(1)}, J_1, \mathbf{X}) \sim$ $\sim S(\mathscr{D}^{(2)}, J_2, \mathbf{X})$. Si l'on a donc une suite $\{\mathscr{D}_n^{(1)}\}$ de partitions de l'intervalle J_1 vérifiant $\nu(\mathscr{D}_n^{(1)}) \to 0$ et la suite correspondante $\{\mathscr{D}_n^{(2)}\}$ de partitions de l'intervalle J_2, on obtient à partir de l'équivalence mentionnée par un passage à la limite correspondante soit

$$(BB)\text{-}\int_{J_1} \mathbf{X} \sim (BB)\text{-}\int_{J_2} \mathbf{X} , \tag{4.4}$$

soit

$$(pB)\text{-}\int_{J_1} \mathbf{X} \sim (pB)\text{-}\int_{J_2} \mathbf{X} , \tag{4.5}$$

ce qui prouve l'énoncé.

Théorème 10. *Soit $\mathbf{X}$ une fonction aléatoire d'intervalle définie et absolument continue dans K. Si elle est intégrable, -(BB) ou -(pB) respectivement, alors son intégrale-(BB) ou -(pB) resp., indéfinie est aussi absolument continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, il est alors possible de trouver $\delta > 0$ tel que nous ayons

$$\mathbf{P}\left\{\omega: |\Sigma X(I_k)| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{4.6}$$

pour tout système fini $\{I_k\}$ d'intervalles disjoints, $I_k \in \boldsymbol{K}$, et vérifiant $\Sigma|I_k| < \delta$. Supposons que $\mathbf{X}$ soit intégrable-(BB) et soit $\mathbf{Z}$ son intégrale indéfinie. Considérons maintenant, pour un tel système $\{I_k\}_{k=1}^m$ donné, m suites $\{\mathscr{D}_n^{(1)}\}, \ldots, \{\mathscr{D}_n^{(m)}\}$ de partitions des intervalles I_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, vérifiant $\nu(\mathscr{D}_n^{(k)}) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Nous avons évidemment

$$\sum_{k=1}^{m} Z(I_k) = \sum_{k=1}^{m} B \lim_{n\to\infty} S(\mathscr{D}_n^{(k)}, I_k, \mathbf{X}) \sim B \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} S(\mathscr{D}_n^{(k)}, I_k, \mathbf{X}) .$$

Or en vertu de (4.6) nous avons pour tout n naturel

$$\mathbf{P}\left\{\omega: \left|\sum_{k=1}^{m} S(\mathscr{D}_n^{(k)}, I_k, \mathbf{X})\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où nous obtenons par le passage à la limite-B, lorsque $n \to \infty$, l'inégalité

$$\mathbf{P}\left\{\omega: \left|\sum_{k=1}^{m} Z(I_k)\right| > \varepsilon\right\} \leqq \mathbf{P}\left\{\omega: \left|\sum_{k=1}^{m} Z(I_k)\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon ,$$

donc l'intégrale-(BB) indéfinie $\mathbf{Z}$ est absolument continue.

Pour le cas de l'intégrale-(pB) nous pouvons procéder d'une manière tout à fait analogue; une autre voie conduisant à la démonstration du théorème 10 pour l'intégrale-(pB) sera d'ailleurs donnée par la propriété (α) mentionnée ci-dessous.

Théorème 11. *Soit $\mathbf{X}$ une fonction aléatoire d'intervalle admettant une intégrale-(BB) dans K. Supposons que pour tout intervalle $I \in \boldsymbol{K}$ nous ayons $\mathbf{E}[X(I)] < \infty$ et qu'il existe pour chaque $\varepsilon > 0$ un nombre positif a tel que pour toute partition $\mathscr{D}$ de l'intervalle K nous ayons*

$$\left|\int_{-\infty}^{-a} x \,\mathrm{d}F_{\mathscr{D}}(x)\right| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \left|\int_{a}^{\infty} x \,\mathrm{d}F_{\mathscr{D}}(x)\right| < \varepsilon , \tag{4.7}$$

où $F_{\mathscr{D}}$ désigne la fonction de répartition de la somme $S(\mathscr{D}, K, \mathbf{X})$. Alors la fonction (non-aléatoire) d'intervalle $\mathbf{E}[X(I)]$ admet une intégrale de Burkill dans K et l'égalité suivante a lieu

$$\int_K \mathbf{E}[X(I)] = \mathbf{E}[(BB)\text{-}\int_K \mathbf{X}] . \tag{4.8}$$

Démonstration. Etant donné une suite $\{\mathscr{D}_n\}$ de partitions de l'intervalle K, vérifiant $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, considérons la suite correspondante $\{S(\mathscr{D}_n, K, \mathbf{X})\}_{n=1}^{\infty}$. Nous avons d'un côté l'égalité

$$\mathbf{E}[S(\mathscr{D}_n, K, \mathbf{X})] = \sum_{I_k \in \mathscr{D}_n} \mathbf{E}[X(I_k)] , \tag{4.9}$$

de l'autre côté les conditions du théorème assurent, en vertu d'une modification du théorème bien connu de Helly (voir pour cela [12], p. 428, théorème 152), la validité de la relation

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}[S(\mathscr{D}_n, K, \boldsymbol{X})] = \mathbf{E}[B \lim_{n\to\infty} S(\mathscr{D}_n, K, \boldsymbol{X})] \,. \tag{4.10}$$

En combinant (4.9), (4.10), la définition de l'intégrale-(BB) et celle de l'intégrale de Burkill, nous obtenons (4.8), c. q. f. d.

Il est possible d'énoncer un théorème analogue pour la variance $\mathbf{D}^2[X(I)]$. Il suffit pour cela de remplacer dans l'énoncé du théorème précédent le symbole $\mathbf{E}$ par $\mathbf{D}^2$ et la condition (4.7) par

$$|\int_{-\infty}^{-a} x^2 \, \mathrm{d}F_{\mathscr{D}}(x)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |\int_{a}^{\infty} x^2 \, \mathrm{d}F_{\mathscr{D}}(x)| < \varepsilon \,. \tag{4.11}$$

Nous obtenons ainsi l'égalité

$$\int_K \mathbf{D}^2[X(I)] = \mathbf{D}^2[(BB)\text{-}\int_K \boldsymbol{X}] \,. \tag{4.12}$$

Il n'y aurait pas de difficulté non plus à formuler des théorèmes analogues aussi pour les cumulants d'ordres supérieurs. En même temps nous pourrions encore affaiblir sensiblement les conditions du théorème en n'exigeant l'existence des cumulants finis que pour les intervalles suffisamment petits et en n'imposant les conditions (4.7), (4.11) etc. qu'aux partitions dont la norme est suffisamment petite.

Il est clair cependant que l'intégrale-(BB) d'une fonction aléatoire d'intervalle peut avoir sa valeur moyenne finie même s'il n'existe aucun intervalle $I \in \boldsymbol{K}$ tel que $\mathbf{E}[X(I)] < \infty$. Peut servir d'exemple la fonction aléatoire homogène du type ID et dont la fonction-ψ est $\psi(I, s) = -|s| \,.\, |I|^2$: son intégrale-($BB$) est nulle presque sûrement dans tout sous-intervalle de K.

Le théorème 11 et ses modifications, dont nous venons de parler, ont pour conséquence l'important théorème suivant que l'on peut d'ailleurs démontrer aussi directement sans difficulté. Il montre la parenté qu'il y a entre la notion d'intégrale-(BB) et celle d'intégrale de Burkill.

Théorème 12. *Soit f une fonction réelle d'intervalle définie dans K et soit $\boldsymbol{X}$ une fonction aléatoire d'intervalle définie dans K également et vérifiant pour tout $I \in \boldsymbol{K}$ l'égalité $X(I) = V\{f(I)\}$. Alors la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ est intégrable-(pB) dans K si et seulement si la fonction f admet dans K une intégrale de Burkill; on aura alors pour tout intervalle $J \in \boldsymbol{K}$*[5])

$$(pB)\text{-}\int_J \boldsymbol{X} = V\{\int_J f(I)\} \,. \tag{4.13}$$

---

[5]) Il est aisé de voir que dans ce cas l'intégrabilité-(pB) de la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ coïncide avec son intégrabilité-(BB), cela découle de la relation (1.5).

Démonstration. A. Supposons d'abord que $\mathbf{X}$ soit intégrable-(pB) dans K. Soit $J \in \boldsymbol{K}$, pour toute partition $\mathscr{D}$ de l'intervalle J nous avons l'égalité $S(\mathscr{D}, J, \mathbf{X}) = V\{\sum_{\mathscr{D}} f(I_k)\}$. Or pour toute suite $\{\mathscr{D}_n\}$ de partitions de J, vérifiant $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$, il existe une limite-p de la suite correspondante $\{S(\mathscr{D}_n, J, \mathbf{X})\}$, donc aussi une limite de la suite $\{\sum_{\mathscr{D}_n} f(I_k)\}$, ce qui prouve l'existence de l'intégrale de Burkill de la fonction f, et en même temps l'égalité (4.13).

B. Supposons maintenant que l'intégrale de Burkill de la fonction f existe dans l'intervalle J en question. Alors il existe aussi pour toute suite $\{\mathscr{D}_n\}$ de partitions de l'intervalle J, vérifiant $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$ lorsque $n \to \infty$, une limite de la suite des sommes $\sum_{\mathscr{D}_n} f(I_k)$. Or de là s'ensuit déjà l'existence d'une limite-B de la suite $\{V\{\sum_{\mathscr{D}_n} f(I_k)\}\}_{n=1}^{\infty} = \{S(\mathscr{D}_n, J, \mathbf{X}\}_{n=1}^{\infty}$, donc d'après (1.5) aussi l'existence d'une limite-p de cette suite. La fonction aléatoire $\mathbf{X}$ est donc bien intégrable-(pB) dans K, c. q. f. d.

Nous voyons donc que l'intégrale de Burkill peut être considérée comme un cas spécial de l'intégrale-(pB), ou bien aussi de l'intégrale-(BB).

Il est facile de voir que l'opération de former une intégrale-(BB) ou une intégrale-(pB) est *additive et homogène*: étant donné deux fonctions aléatoires $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$, stochastiquement indépendantes l'une de l'autre, définies et intégrables-(BB) dans K, et deux nombres réels a et b, soit $\mathbf{Z}$ une fonction aléatoire d'intervalle vérifiant $Z(I) \sim aX(I) + bY(I)$ pour tout $I \in \boldsymbol{K}$. Alors $\mathbf{Z}$ est aussi intégrable-(BB) dans K et l'on a

$$(BB)\text{-}\int_J \mathbf{Z} \sim a \, . \, (BB)\text{-}\int_J \mathbf{X} + b \, . \, (BB)\text{-}\int_J \mathbf{Y} \tag{4.14}$$

pour tout $J \in \boldsymbol{K}$, les deux intégrales du second membre étant supposées stochastiquement indépendants.

Si au lieu de l'intégrabilité-(BB) de $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ nous supposons l'intégrabilité-(pB) et que $\mathbf{Z}$ vérifie en même temps l'égalité $Z(I) = aX(I) + bY(I)$ pour $I \in \boldsymbol{K}$, nous obtenons l'intégrabilité-(pB) de la fonction aléatoire $\mathbf{Z}$ et au lieu de (4.14) l'égalité

$$(pB)\text{-}\int_J \mathbf{Z} = a \, . \, (pB)\text{-}\int_J \mathbf{X} + b \, . \, (pB)\text{-}\int_J \mathbf{Y} \, , \tag{4.15}$$

valable pour tout $J \in \boldsymbol{K}$.

La démonstration de ces relations est évidente.

Nous allons signaler encore deux propriétés remarquables, quoique presque triviales, de l'intégrale-(pB), qui correspondent aux propriétés analogues de l'intégrale de Burkill (voir [21], 5.1, 5.5).

(α) *Si* $\boldsymbol{X}$ *est une fonction aléatoire d'intervalle définie dans* K *et admettant une intégrale-*(pB) *dans* K, *alors pour chaque* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que pour toute partition* $\mathscr{D}$ *de l'intervalle* K *vérifiant* $\nu(\mathscr{D}) < \delta$ *nous avons*

$$\mathbf{P}\{\omega\colon\ |(pB)\text{-}\int_K \boldsymbol{X} - S(\mathscr{D}, K, \boldsymbol{X})| > \varepsilon\} < \varepsilon\,. \tag{4.16}$$

(β) *Soit* $\boldsymbol{X}$ *une fonction aléatoire d'intervalle définie et intégrable-*(pB) *dans* K, *soit* $\boldsymbol{Z}$ *son intégrale-*(pB) *indéfinie, alors pour chaque intervalle* $J \in \boldsymbol{K}$ *nous avons*

$$(pB)\text{-}\int_J (\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Z}) = V\{0\}\,. \tag{4.17}$$

A l'aide de la propriété (α) nous pouvons démontrer le théorème suivant

Théorème 13. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *une fonction aléatoire d'intervalle définie et intégrable-*(pB) *dans* K. *Si* $\boldsymbol{X}$ *est continue en* $\emptyset$, *son intégrale-*(pB) *indéfinie l'est également.*

Démonstration.[6]) Soit ε un nombre positif arbitraire. D'après (α) il existe alors $\delta > 0$ tel que pour toute partition $\mathscr{D}$ de l'intervalle K vérifiant $\nu(\mathscr{D}) < \delta$ on a

$$\mathbf{P}\left\{\omega\colon \left|(pB)\text{-}\int_K \boldsymbol{X} - S(\mathscr{D}, K, \boldsymbol{X})\right| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} < \frac{\varepsilon}{4}\,. \tag{4.18}$$

Mais il est possible de choisir notre δ si petit que l'on ait en même temps

$$\mathbf{P}\left\{\omega\colon |X(I)| > \frac{\varepsilon}{4}\right\} < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.19}$$

pour tout intervalle $I \in \boldsymbol{K}$ de longueur $|I| < \delta$; cela résulte de la continuité en $\emptyset$ supposée. Maintenant nous allons montrer que pour tout intervalle $J \in \boldsymbol{K}$ on a

$$|J| < \delta \Rightarrow \mathbf{P}\{\omega\colon\ |(pB)\text{-}\int_J \boldsymbol{X}| > \varepsilon\} < \varepsilon\,. \tag{4.20}$$

En effet, soit $J \in \boldsymbol{K}$, $|J| < \delta$ et soient J_1, J_2 les deux intervalles voisins de J et tels que $J_1 \cup J \cup J_2 = K$. Nous appliquons (α) aux deux intervalles J_1 et J_2: pour des partitions $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ de J_1 et J_2 respectivement nous aurons

$$\mathbf{P}\left\{\omega\colon \left|(pB)\text{-}\int_{J_k} \boldsymbol{X} - S(\mathscr{D}_k, J_k, \boldsymbol{X})\right| > \frac{\varepsilon}{8}\right\} < \frac{\varepsilon}{8}\,, \quad k = 1, 2, \tag{4.21}$$

pourvu que les normes $\nu(\mathscr{D}_1)$, $\nu(\mathscr{D}_2)$ soient suffisamment petites. Or nous pouvons nous borner d'avance à des partitions de norme plus petite que δ, de sorte que les quatre relations (4.18), (4.19) et (4.21) soient vérifiées simultanément, la partition $\mathscr{D}$ de (4.18) étant composée d'une manière évidente de $\mathscr{D}_1$, J et $\mathscr{D}_2$.

---

[6]) L'auteur est obligé à M. V. Dupač pour une modification importante de la version originale de ce théorème et de sa démonstration.

Mais de cela résultera déjà le second membre de (4.20), donc l'implication (4.20) est valable, c. q. f. d.

Cette propriété importante de l'intégrale-(pB) est une analogie directe de la propriété correspondante de l'intégrale de Burkill (voir [21], 8.2).[7]

5. Conditions d'intégrabilité

Ici nous allons traiter les questions d'existence de l'intégrale-(BB) ou -(pB) d'une fonction aléatoire d'intervalle et donner quelques conditions couvrant des cas plus généraux que ceux dont parlent nos théorèmes 6 et 12. Pour les fonctions aléatoires du type ID nous pouvons établir une correspondance avec la théorie de l'intégrale de Burkill en exploitant les fonctions-ψ correspondantes.

Théorème 14. *Soit* $\boldsymbol{X}$ *une fonction aléatoire d'intervalle du type* ID, *définie dans* K, *et soit* $\psi(I, s)$ *sa fonction-*ψ. *Alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale-*(BB) *de* $\boldsymbol{X}$ *dans* K *existe est que l'intégrale de Burkill* $\int_K \psi(I, s)$ (*finie*) *existe pour tout* $s \in R$ *et qu'elle soit, en tant qu'une fonction de* s, *continue en* $s = 0$. *C'est cette intégrale qui représente alors la fonction-*ψ *de l'intégrale* (BB)-$\int_K \boldsymbol{X}$.

Démonstration. A. Supposons d'abord que l'intégrale-(BB) de $\boldsymbol{X}$ dans K existe. Alors pour chaque suite $\{\mathscr{D}_n\}$ de partitions de l'intervalle K, vérifiant $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$, la suite correspondante $\{S(\mathscr{D}_n, K, \boldsymbol{X})\}$ a une limite-B. La fonction-ψ de $S(\mathscr{D}_n, K, \boldsymbol{X})$, qui est égale à $\sum_{I_k \in \mathscr{D}_n} \psi(I_k, s)$, tend donc, lorsque $n \to \infty$, vers la fonction-ψ de l'intégrale-(BB) en question, qui est nécessairement continue en $s = 0$; les conditions du théorème sont donc nécessaires.

B. Supposons maintenant au contraire que la fonction $\psi(I, s)$ soit intégrable au sens de Burkill et que son intégrale soit continue en $s = 0$. Alors pour chaque suite $\{\mathscr{D}_n\}$ telle que $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$, les fonctions-ψ des sommes $S(\mathscr{D}_n, K, \boldsymbol{X})$ tendent vers cette intégrale. Il existe donc d'après un théorème bien connu (voir p. ex. [18], p. 179) une limite-B des sommes considérées, donc l'intégrale-(BB) de $\boldsymbol{X}$ dans K existe, c. q. f. d.

Il est aisé de voir de quelle manière il faudrait modifier l'énoncé et la démonstration du théorème 14 si l'on voulait établir les conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité-(BB) de la fonction $\boldsymbol{X}$ dans l'intervalle K.

---

[7]) Il est même possible de démontrer un théorème analogue aussi pour l'intégrale-(BB), la réciproque en étant également valable. Il faut seulement remplacer la „distance" exprimée dans (4.16) et qui n'a pas de sens pour l'intégrale-(BB), par une autre, une possibilité de le faire étant fournie par les résultats récents de M. H. Bergström. Ces questions-là seront d'ailleurs traitées dans un travail ultérieur. (Note ajoutée à la correction des épreuves.)

Il est clair aussi que l'on pourrait demander au lieu de la continuité de l'intégrale de Burkill de la fonction $\psi(I, s)$ la convergence localement uniforme[8]) (par rapport à s) des sommes $\sum_{\mathscr{D}_n} \psi(I_k, s)$ vers cette intégrale, c'est-à-dire demander qu'à chaque $\varepsilon > 0$, $s_0 > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour $\nu(\mathscr{D}) < \delta$ on ait pour tout $|s| < s_0$

$$\left|\int_K \psi(I, s) - \sum_{I_k \in \mathscr{D}} \psi(I_k, s)\right| < \varepsilon . \tag{5.1}$$

Il est ensuite possible de généraliser encore le théorème 14 de façon qu'il devienne applicable aussi au cas de certaines fonctions aléatoires qui ne sont pas du type ID, en procédant d'une manière tout analogue à celle appliquée dans le cas du théorème 11 et de ses analogies. Supposons en effet que pour chaque $s_0 > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $I \in \boldsymbol{K}$, $|I| < \delta$, la fonction-ψ de la variable aléatoire $X(I)$ soit bien définie pour $|s| < s_0$ (ce sont p. ex. toutes les fonctions aléatoires continues en $\emptyset$ qui jouissent de cette propriété). Il est alors possible de parler de l'intégrale de Burkill de $\psi(I, s)$ pour tout $s \in R$ et les considérations de ci-dessus ont un sens bien déterminé. Nous verrons d'ailleurs plus tard (paragraphe 8) un exemple d'application de cette généralisation de notre théorème 14.

Nous allons envisager maintenant la théorie de l'intégrale-(BB) d'un autre point de vue, en examinant la correspondance qui existe entre elle et la théorie des lois-limites des sommes de variables aléatoires indépendantes (cf. p. ex. [9]). Dans cette dernière on suppose d'habitude que les variables aléatoires dont on étudie les sommes soient infiniment petites, ce qui correspond d'une façon évidente à la continuité en $\emptyset$ des fonctions aléatoires d'intervalle. La suite des sommes $S(\mathscr{D}_n, K, \mathbf{X})$ d'une fonction aléatoire d'intervalle $\mathbf{X}$ continue en $\emptyset$ satisfait alors aux conditions généralement considérées dans la théorie des lois-limites. En exploitant cette correspondance, il est possible de „traduire" des théorèmes de la théorie des lois-limites en langage de la théorie de l'intégrale-(BB). Nous allons considérer ici un seul exemple concret en traduisant ainsi le théorème 4 du paragraphe 25 de [9] (p. 132 sqq).

Soit donné une fonction aléatoire d'intervalle $\mathbf{X}$ définie dans K, continue en $\emptyset$. Pour $I \in \boldsymbol{K}$, $x \in R$, ε, $\tau > 0$, posons

$$\begin{aligned} f_1(I, x) &= \mathbf{P}\{\omega\colon\ X(I) < x\} ; \\ f_2(I, x) &= f_1(I, x) - 1 ; \\ f_3(I, \tau) &= \int_{|x|<\tau} x \, \mathrm{d}f_1(I, x) ; \\ f_4(I, \varepsilon) &= \int_{|x|<\varepsilon} x^2 \, \mathrm{d}f_1(I, x) - [f_3(I, \varepsilon)]^2 . \end{aligned} \tag{5.2}$$

---

[8]) La notion de convergence localement uniforme d'une intégrale de Burkill a été étudiée et exploitée dans un travail ultérieur, à paraître dans Časopis pro pěstování matematiky, *84* (1959). (Note ajoutée à la correction des épreuves.)

Soit $Z \in \mathfrak{X}$ et soit $\psi(s)$ sa fonction-ψ. Ecrivons cette dernière sous la forme canonique (formule de M. Lévy modifiée — voir [9], § 18, (8)):

$$\psi(s) = is\gamma(\tau) - \frac{s^2}{2}\sigma^2 + \int_{-\infty}^{-\tau} (e^{ius} - 1)\,\mathrm{d}M(u) + \int_{\tau}^{\infty} (e^{ius} - 1)\,\mathrm{d}N(u) +$$
$$+ \int_{-\tau}^{0} (e^{ius} - 1 - ius)\,\mathrm{d}M(u) + \int_{0}^{\tau} (e^{ius} - 1 - ius)\,\mathrm{d}N(u)\,, \qquad (5.3)$$

où τ est une constante positive et telle que $M(u)$ est continue en $u = -\tau$ et $N(u)$ est continue en $u = \tau$. Cela étant, nous pouvons énoncer le théorème suivant.

Théorème 15. *Pour que la fonction aléatoire* $\boldsymbol{X}$ *admette une intégrale-*(BB) *dans* K *et que l'on ait*

$$Z \sim (BB)\text{-}\int_K \boldsymbol{X}\,, \qquad (5.4)$$

il faut et il suffit que les quatre conditions suivantes soient satisfaites:

(1) *pour tout* $u < 0$ *où* M *est continue on a* $M(u) = \int_K f_1(I, u)$;

(2) *pour tout* $u > 0$ *où* N *est continue on a* $N(u) = \int_K f_2(I, u)$;

(3) $\gamma(\tau) = \int_K f_3(I, \tau)$;

(4) $\sigma^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\int_K} f_4(I, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \underline{\int_K} f_4(I, \varepsilon)$.[9])

Démonstration. A. Supposons d'abord que l'intégrale-(BB) de $\boldsymbol{X}$ dans K existe et que l'on ait (5.4). Soit $\{\mathscr{D}_n\}$ une suite de partitions de l'intervalle K, $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$, $\mathscr{D}_n = \{I_1^{(n)}, \ldots, I_{k_n}^{(n)}\}$. Comme les variables aléatoires $X(I_k^{(n)})$ sont infiniment petites (cf. [9], p. 104), car la fonction $\boldsymbol{X}$ est supposée continue en $\emptyset$, nous pouvons appliquer le théorème 4 du paragraphe 25 de [9], y compris la remarque qui le suit, en y posant évidemment $A_n = 0$. Les conditions 1 et 2 de ce théorème et la condition de la remarque sont alors satisfaites si nous posons $F_{n,k}(x) = f_1(I_k^{(n)}, x)$. Dans notre terminologie elles ne disent rien d'autre que ceci: pour la suite $\{\mathscr{D}_n\}$ considérée on a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} f_1(I_j^{(n)}, x) = M(x)\,, \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} f_2(I_j^{(n)}, x) = N(x)\,,$$
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} f_4(I_j^{(n)}, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} f_4(I_j^{(n)}, \varepsilon) = \sigma^2\,, \qquad (5.5)$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} f_3(I_j^{(n)}, \tau) = \gamma(\tau)\,.$$

---

[9]) Nous désignons par $\overline{\int}$ et $\underline{\int}$ les intégrales supérieure et inférieure de Burkill (cf. [4], [21]).

Mais ces mêmes conditions seront satisfaites également pour n'importe quelle autre suite de partitions de l'intervalle K, pourvu que leurs normes tendent vers zéro, les limites étant indépendantes du choix particulier de ces partitions. Il s'en ensuit que les intégrales de Burkill qui figurent dans les conditions (1)—(4) de notre théorème existent et que les égalités correspondantes ont lieu.

B. En suivant le raisonnement précédent en sens inverse nous trouvons facilement que les conditions (1)—(4) sont aussi suffisantes, c. q. f. d.

Il est clair qu'il serait également possible d'énoncer une version modifiée du théorème 15 donnant des conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité-(BB) de la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ dans l'intervalle K, comme nous l'avons mentionné déjà dans le cas du théorème 14.

Il serait également possible de traduire de la même manière encore d'autres théorèmes de la théorie des lois-limites, tel p. ex. le théorème 1 du paragraphe 25 de [9], ce qui donnerait un théorème de caractère purement existentiel, ou bien encore d'autres théorèmes qui font l'usage de la formule plus simple de Lévy-Khintchine au lieu de (5.3); intéressante serait aussi une telle version du lemme de Bawly. Toutefois, comme la manière de procéder dans de pareils cas a été rendue, à notre avis, suffisamment claire par l'exemple précédent, nous nous abstiendrons de la formulation explicite des autres théorèmes de ce genre.

Quant à la théorie de l'intégrale-(pB), ici, il n'est plus si facile d'obtenir des conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité-(pB). La théorie des lois-limites ne nous y aide pas beaucoup. De l'autre côté, la théorie de l'intégrale-(pB) a un contact bien plus étroit avec celle de l'intégrale de Burkill. Le théorème suivant p. ex. a son analogie directe dans la théorie de Burkill.

Théorème 16. *Soit $\mathbf{X}$ une fonction aléatoire d'intervalle définie dans K. Pour que l'intégrale (pB)-$\int_K \mathbf{X}$ existe, il faut et il suffit qu'à chaque $\varepsilon > 0$ on puisse trouver $\delta > 0$ tel que si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont deux partitions de l'intervalle K vérifiant $\nu(\mathscr{D}_1) < \delta$, $\nu(\mathscr{D}_2) < \delta$, alors*

$$\mathbf{P}\{\omega\colon\ |S(\mathscr{D}_1, K, \mathbf{X}) - S(\mathscr{D}_2, K, \mathbf{X})| > \varepsilon\} < \varepsilon\,. \tag{5.6}$$

Démonstration. A. Supposons d'abord que les conditions du théorème soient satisfaites. Soit $\{\mathscr{D}_n\}$ une suite de partitions de l'intervalle K, $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$. Alors la suite des variables aléatoires $S(\mathscr{D}_n, K, \mathbf{X})$ vérifie la condition de Cauchy pour la convergence en probabilité, il existe donc (cf. [10], § 22, théorème 5) une limite-p de cette suite. L'indépendance de cette limite du choix particulier des partitions $\mathscr{D}_n$ découle immédiatemment de (5.6), donc l'intégrale (pB)-$\int_K \mathbf{X}$ existe.

B. Supposons maintenant par contre que l'intégrale-(pB) en question existe, or elle jouit de la propriété (α) du paragraphe précédent, et nous obtenons (5.6) facilement à partir de (4.16).

6. Un résultat de caractère négatif

Nous allons montrer ici sur un exemple concret que l'existence de l'intégrale $(BB)\text{-}\int\limits_K \boldsymbol{X}$ ne garantit pas encore l'intégrabilité-(BB) de $\boldsymbol{X}$ dans K. Par là l'intégrale-(BB) diffère sensiblement de l'intégrale de Burkill.

Soit pour fixer les idées $K = \langle 0, \tau)$, $\tau > 0$, et soit t_0 un nombre réel, $0 < t_0 < \tau$. La fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ soit définie dans K de telle façon que l'on ait pour la fonction caractéristique $\varphi(I, s)$ de $X(I)$:

(a) si $I = \langle 0, t)$, $0 < t \leqq t_0$, alors $\varphi(I, s) = \varphi_1(s)$ où

$$\varphi_1(s) = \begin{cases} 1 - |s| \text{ pour } |s| \leqq 1, \\ 0 \text{ pour } |s| > 1; \end{cases}$$

(b) si $I = \langle 0, t)$, $t_0 < t \leqq \tau$, alors $\varphi(I, s) = \varphi_2(s) = [\varphi_1(s)]^2$;

(c) si $I = \langle t_0, t)$, $t_0 < t \leqq \tau$, alors $\varphi(I, s) = \varphi_3(s) = \varphi_1(s - 2k)$,

$k = k(s)$ étant le nombre entier vérifiant $\dfrac{s-1}{2} < k \leqq \dfrac{s+1}{2}$;

(d) si $I = \langle t, t')$, $0 < t < t_0 < t' \leqq \tau$, alors $\varphi(I, s) = \varphi_1(s)$;

(e) si I est un intervalle n'enfermant ni 0 ni t_0, alors $\varphi(I, s) = \varphi_4(s) \equiv 1$.

Les fonctions $\varphi_j(s)$, $j = 1, 2, 3, 4$ sont effectivement des fonctions caractéristiques (cf. p. ex. [14], p. 26 sqq.).

L'intégrale-(BB) de la fonction aléatoire $\boldsymbol{X}$ ainsi définie existe alors pour les intervalles J de la forme:

(1) $\langle 0, t)$ où $0 < t \leqq t_0$,

(2) $\langle 0, t)$ où $t_0 < t \leqq \tau$, donc aussi pour $J = K$,

(3) $\langle t_0, t)$ où $t_0 < t \leqq \tau$,

(4) $\langle t, t')$ où ou bien $0 < t \leqq t' \leqq t_0$, ou bien $t_0 < t \leqq t' \leqq \tau$.

La fonction caractéristique de l'intégrale-(BB) correspondante est $\varphi_j(s)$ pour le cas (j), $j = 1, 2, 3, 4$.

Il n'existe pas d'intégrale-(BB) de $\boldsymbol{X}$ dans J lorsque J enferme t_0 comme un point intérieur mais n'enferme pas l'origine.

7. Points de contact avec la théorie des processus stochastiques

Nous allons étudier ici sommairement quelques aspects de la théorie de l'intégrale-(BB) en connexion avec celle des processus stochastiques additifs (fonctions aléatoires (ponctuelles) à accroissements indépendants).[10])

[10]) Pour les distinguer des fonctions aléatoires d'intervalle nous désignerons les fonctions de point ainsi que les variables aléatoires représentant les „valeurs" de ces fonctions par des caractères romains.

Supposons, pour fixer les idées, que nous ayons une fonction aléatoire d'intervalle $\mathbf{X}$ définie et intégrable-(BB) dans l'intervalle $K = \langle 0, \tau), \tau > 0$. Soit $\mathbf{Z}$ son intégrale-(BB) indéfinie. Considérons la fonction $\varphi(t, s)$ définie pour $t \in K$, $s \in R$ comme

$$\varphi(t, s) = \mathbf{E}[\exp \{is\, Z(\langle 0, t))\}] . \tag{7.1}$$

Notre théorème 7 implique que pour $0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \tau$ le quotient $\dfrac{\varphi(t_2, s)}{\varphi(t_1, s)}$ est, en tant qu'une fonction de l'argument $s \in R$, une fonction caractéristique. Il est donc possible de former un processus stochastique additif $\mathbf{Z}$ tel que pour $t \in K$ la variable aléatoire $\mathrm{Z}(t)$ ait la fonction caractéristique $\varphi(t, s)$. Ce processus est par cela déterminé sans ambiguïté — au point de vue de Bernoulli, bien entendu. Nous pouvons choisir pour l'intégrale-(BB) $\mathbf{Z}$ de la fonction $\mathbf{X}$ la fonction vérifiant

$$Z(I) = \mathrm{Z}(t') - \mathrm{Z}(t) \tag{7.2}$$

pour $\langle t, t') = I \in \boldsymbol{K}$, nous voyons en même temps que l'intégrale-(BB) indéfinie d'une fonction aléatoire d'intervalle intégrable-(BB) peut être choisie de manière à être additive-p.

Nous venons de répondre simultanément, ayant suivi un chemin de détour, à une question que nous avons suggérée paragraphe 3: les problèmes de la théorie non-bernoulienne des fonctions aléatoires d'intervalle à accroissements indépendants et de l'intégrale-(BB) peuvent donc être réduits aux problèmes analogues, déjà bien étudiés, de la théorie correspondante des processus stochastiques additifs.

Il sera sans doute bien intéressant aussi de signaler en ce lieu certains travaux portant sur des problèmes très étroitement liés à la théorie de l'intégrale-(BB). Soit de nouveau $K = \langle 0, \tau), \tau > 0$; $\mathbf{X}$ définie et intégrable-(BB) dans K. Si $\mathscr{D}$ est une partition de l'intervalle K, désignons par $\mathscr{D}(t)$ le système des intervalles I_j tels que $I_j \in \mathscr{D}$, $I_j \cap \langle 0, t) \neq \emptyset$. Faisons correspondre à chaque partition $\mathscr{D}$ de K la fonction aléatoire $\mathbf{S}_{\mathscr{D}}$ définie pour $t \in K$ par

$$\mathrm{S}_{\mathscr{D}}(t) = \sum_{I_j \in \mathscr{D}(t)} X(I_j) . \tag{7.3}$$

Il est aisé de voir que, pour une partition $\mathscr{D}$ arbitraire mais fixe, $\mathbf{S}_{\mathscr{D}}$ est une fonction aléatoire à accroissements indépendants. Si nous prenons maintenant une suite $\{\mathscr{D}_n\}$ de partitions de K telle que $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$ et que toutes les partitions aient $t_0 \in K$ pour un point de division, nous aurons évidemment

$$B \lim_{n \to \infty} \mathrm{S}_{\mathscr{D}_n}(t_0) \sim (BB)\text{-}\int_{\langle 0, t_0)} \mathbf{X} . \tag{7.4}$$

Il serait bien intéressant de montrer sous quelles conditions on a (7.4) pour tout $t_0 \in K$ et pour *n'importe quelle suite* $\{\mathscr{D}_n\}$ *de partitions de* K *vérifiant* $\nu(\mathscr{D}_n) \to 0$.

Ce sont aussi M. E. G. KIMME [13] et, dans un cas spécial, M. A. V. SKOROKHOD [22], qui se sont intéressés au problème de convergence-B de suites analogues à nos suites $\{\mathbf{S}_{\mathscr{D}_n}\}$ vers une fonction aléatoire limite $\mathbf{S}$. Ils considèrent tous les deux des partitions de forme particulière en supposant encore que la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ soit continue en $\emptyset$; M. Skorokhod se borne en plus au cas de fonctions aléatoires homogènes. Leurs raisonnements s'appuient sur la théorie de lois-limites des sommes de variables aléatoires indépendantes (cf. aussi [20], [23], [24]).

8. Equations différentielles stochastiques

On peut rencontrer la notion d'équation différentielle stochastique dans plusieurs ouvrages sur la théorie des fonctions aléatoires, citons à titre d'exemple les ouvrages [2] et [3] de M. BERNSTEIN, ou bien [1], [8], [11], ou encore les deux monographies bien connues [15] et [16] de M. P. LÉVY. On peut s'y apercevoir du premier coup d'oeil qu'il n'y a pas de point de vue unique pour traiter ces questions et que l'interprétation de la notion même d'équation différentielle stochastique varie d'un auteur à l'autre.

Nous allons nous intéresser surtout au sens donné à cette notion par M. Lévy. Malheureusement l'exposé qu'il en donne dans sa monographie [15], p. 41 ssq, n'est pas suffisamment clair et cohérent (voir aussi [25], [26]) pour que l'on puisse se faire une idée exacte de son interprétation. Nous allons donc construire ici les fondements d'une théorie telle que les idées de M. Lévy puissent y être incorporées, à condition d'être interprétées d'une certaine façon. C'est de là d'ailleurs que provient l'inspiration originale de tout le présent article.

Il est peut-être bon de remarquer encore une fois que notre étude se fait du point de vue de Bernoulli, de sorte que nous nous intéressons toujours aux lois de répartition seulement. Outre cela nous nous bornons ici au cas relativement très simple des fonctions aléatoires à accroissements indépendants. Dans la notation de M. Lévy, les équations différentielles stochastiques que nous allons étudier s'écrivent donc comme

$$\delta \mathrm{X}(t) = \varphi(t, \mathrm{d}t; \xi, \eta, \ldots) , \tag{8.1}$$

où l'accroissement différentiel de la fonction aléatoire cherchée (ou plutôt sa loi de répartition seulement) est exprimé en fonction de t, $\mathrm{d}t$ et de certaines variables aléatoires $\xi, \eta, \ldots$ jouant un rôle auxiliaire.

Si nous voulions donner un sens précis à l'équation (8.1), il faudrait d'abord se mettre d'accord sur ce qu'on entendrait par accroissement différentiel d'une fonction aléatoire, mais nous allons éluder les difficultés qui s'y attachent. Sans entrer dans le domaine de l'infiniment petit, nous verrons en une équation différentielle stochastique surtout une règle qui détermine les lois de répartition des accroissements finis $\Delta_h X(t) = X(t+h) - X(t)$ de la fonction aléatoire $\mathbf{X}$ cherchée. Notre équation sera donc écrite de façon symbolique comme

$$\delta X(t) \sim F(t, \mathrm{d}t) \tag{8.2}$$

et interprétée de la façon suivante: Le second membre de (8.2) est en principe une fonction aléatoire d'intervalle à accroissements indépendants $\mathbf{F}$ définie pour les intervalles $\langle t, t+h)$, $h > 0$ contenus dans un intervalle K donné, à l'intérieur duquel nous étudions l'équation en question. Nous cherchons une solution de cette équation, c'est-à-dire une fonction aléatoire additive $\mathbf{X}$ qui vérifie pour tout intervalle $\langle t_1, t_2) = J \in \boldsymbol{K}$

$$X(t_2) - X(t_1) \sim (BB)\text{-}\int_J \mathbf{F}\,. \tag{8.3}$$

Il est clair que l'équation (8.2) ne peut être regardée comme intégrable (c'est-à-dire comme ayant une solution) que si $\mathbf{F}$ est intégrable-(BB) dans K.

Pour que la solution d'une équation différentielle soit bien déterminée, il faut avoir une condition à l'origine. Pour simplifier les expressions nous supposerons dans ce qui suit que nous ayons toujours $K = \langle 0, \tau)$, $\tau > 0$ et que

$$\mathbf{P}\{\omega\colon X(0) = 0\} = 1\,. \tag{8.4}$$

La solution de (8.2) sera alors donnée par

$$X(t) \sim (BB)\text{-}\int_{\langle 0,t)} \mathbf{F}\,. \tag{8.5}$$

Il est clair que (8.5) ne détermine effectivement que les lois de répartition des variables aléatoires $X(t)$, mais nous savons déjà du paragraphe précédent que l'intégrale-(BB) de $\mathbf{F}$ peut être choisie de manière à être additive-p, ce qui correspond bien à la condition que $\mathbf{X}$ doit être une fonction aléatoire additive.

Nous avons donc montré comment on peut se passer de la notion de différentiel, mais notre interprétation a encore un autre avantage: nous n'avons pas besoin non plus de la notion d'*erreur admissible* qui figure dans les considérations de M. Lévy (cf. [15], p. 43 sqq). En effet, nous ne demandons pas, il est vrai, que (8.2) ait lieu sans erreur, c'est-à-dire pour $\mathrm{d}t > 0$ ce qui correspondrait dans notre interprétation à l'équivalence

$$X(t_2) - X(t_1) \sim F(\langle t_1, t_2)) \tag{8.6}$$

au lieu de (8.3), mais l'erreur est éliminée par le procédé d'intégration-(BB), sans que nous ayons à nous en occuper explicitement.

Dans certains cas particuliers il peut arriver que l'erreur admise soit exprimable sous la forme d'une fonction aléatoire d'intervalle $\mathbf{E}$, nous avons donc pour $\langle t_1, t_2) = J \in \boldsymbol{K}$

$$X(t_2) - X(t_1) \sim F(J) + E(J)\,. \tag{8.7}$$

C'est ainsi que l'erreur admissible est conçue par M. Lévy; il la désigne par $\omega(t, dt)$. Il est bon de signaler que nous ne faisons ici aucune hypothèse concernant l'indépendance stochastique de F et E; nous supposons toutefois que E soit une fonction aléatoire à accroissements indépendants. La condition que nous avons à imposer à cette erreur peut alors s'exprimer par l'équivalence suivante valable pour tout $J \in \boldsymbol{K}$

$$(BB)\text{-}\int_J \mathsf{E} \sim V\{0\} . \tag{8.8}$$

En effet, si nous supposons (8.7), (8.8) et l'intégrabilité-(BB) de F, nous obtenons (8.3) en y appliquant un théorème de M. H. Cramér (voir [5], § 20.6) que l'on peut formuler dans notre terminologie comme suit:

Si nous avons deux fonctions aléatoires d'intervalle E et F, indépendantes ou non, intégrables-(BB), et que E vérifie (8.8), *alors nous avons pour tout $J \in \boldsymbol{K}$*

$$(BB)\text{-}\int_J \mathsf{F} \sim (BB)\text{-}\int_J (\mathsf{F} + \mathsf{E}) . \tag{8.9}$$

Il est peut-être bon de souligner que ce n'est pas une simple conséquence de (4.14) où nous avons supposé l'indépendance stochastique des deux fonctions aléatoires.

Il est aisé de voir que la condition (8.8) est plus générale que les conditions de M. Lévy, comme le prouvent les deux théorèmes suivants.

Théorème 17. *Soit E une fonction aléatoire d'intervalle définie dans K, et supposons que pour $I \in \boldsymbol{K}$ nous ayons $\mathbf{E}[(E(I))^2] = o(|I|^2)$ lorsque $|I| \to 0$. Alors E est intégrable-(BB) dans K et* (8.8) *a lieu pour tout $J \in \boldsymbol{K}$.*

Démonstration. Soit $J \in \boldsymbol{K}$, soit $\mathscr{D}$ une partition de J. Nous avons alors l'égalité bien connue

$$\mathbf{E}[(S(\mathscr{D}, J, \mathsf{E}))^2] = \mathbf{D}^2[S(\mathscr{D}, J, \mathsf{E})] + \{\mathbf{E}[S(\mathscr{D}, J, \mathsf{E})]\}^2 . \tag{8.10}$$

Or pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$I \in \boldsymbol{K}, \quad |I| < \delta \Rightarrow \mathsf{E}[(E(I))^2] < \varepsilon |I|^2 , \tag{8.11}$$

d'où il s'ensuit pour $\nu(\mathscr{D}) < \min(1, \delta)$ d'une part

$$\mathbf{D}^2[S(\mathscr{D}, J, \mathsf{E})] = \sum_{\mathscr{D}} \mathbf{D}^2[E(I_j)] < \varepsilon \sum_{\mathscr{D}} |I_j|^2 \leqq \varepsilon \,.\, |J| , \tag{8.12}$$

de l'autre part

$$|\mathbf{E}[S(\mathscr{D}, J, \mathsf{E})]| \leqq \sum_{\mathscr{D}} |\mathbf{E}[E(I_j)]| < \sqrt{\varepsilon} \sum_{\mathscr{D}} |I_j| = \sqrt{\varepsilon} \,.\, |J| . \tag{8.13}$$

En combinant (8.12), (8.13) et (8.10) nous obtenons l'inégalité

$$\mathbf{E}[(S(\mathscr{D}, J, \mathsf{E}))^2] < \varepsilon(|J| + |J|^2) , \tag{8.14}$$

valable pour toute partition $\mathscr{D}$ dont la norme est suffisamment petite. Il en résulte que le premier membre de l'inégalité (8.14) tend vers zéro lorsque $\nu(\mathscr{D}) \to 0$, d'où il s'ensuit que $B \lim S(\mathscr{D}, J, \mathbf{E}) \sim V\{0\}$, (cf: [17], chap. IV, § 13), donc (8.8) a lieu, c. q. f. d.

Théorème 18. *Soit* $\mathbf{E}$ *une fonction aléatoire d'intervalle définie dans* K *et supposons que nous ayons* $\mathbf{P}\{\omega\colon E(I) \neq 0\} = o(|I|)$ *pour* $I \in \boldsymbol{K}$, *lorsque* $|I| \to 0$. *Alors* $\mathbf{E}$ *est intégrable-(BB) et* (8.8) *a lieu pour n'importe quel intervalle* $J \in \boldsymbol{K}$.

Démonstration. D'après les suppositions, pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbf{P}\{\omega\colon E(I) \neq 0\} < \varepsilon|I|$, pourvu que $|I| < \delta$. Soit $J \in \boldsymbol{K}$, soit $\mathscr{D}$ une partition de J, $\nu(\mathscr{D}) < \delta$. Alors nous avons

$$\mathbf{P}\{\omega\colon S(\mathscr{D}, J, \mathbf{E}) \neq 0\} \leqq \sum_{\mathscr{D}} \mathbf{P}\{\omega\colon E(I_j) \neq 0\} < \sum_{\mathscr{D}} \varepsilon \,.\, |I_j| = \varepsilon|J| \,, \quad (8.15)$$

d'où il vient que $B \lim S(\mathscr{D}, J, \mathbf{E}) \sim V\{0\}$ lorsque $\nu(\mathscr{D}) \to 0$, donc (8.8) a lieu, c. q. f. d.

Nous voyons donc que les équations différentielles stochastiques intégrables au sens de M. P. Lévy le sont dans notre interprétation également.

Pour terminer nous allons étudier encore un exemple concret considéré aussi par M. Lévy (voir [15], p. 42 sqq). Il s'agit de l'équation $\delta X(t) = \xi\sqrt{dt}$ où ξ est la variable aléatoire du jeu de pile ou face, et que M. Lévy déclare — pour des raisons pas suffisamment claires — non-intégrable (voir d'ailleurs [25] et [26]). Dans notre interprétation cette équation est bien intégrable. La fonction $\boldsymbol{F}$ correspondante a la fonction-ψ

$$\psi(I, s) = \lg \cos (s\sqrt{|I|}) \quad (8.16)$$

qui satisfait aux conditions de notre théorème 14 généralisé: elle peut être définie dans un domaine arbitrairement grand de la variable s, pourvu que l'on se borne à des intervalles de longueur suffisamment petite. Son intégrale de Burkill existe et l'on a pour tout J

$$\int_J \psi(I, s) = -\frac{s^2}{2}|J| \,. \quad (8.17)$$

La solution de l'équation considérée est donc la fonction aléatoire de Wiener-Lévy; si nous acceptons la condition à l'origine (8.4), $X(t)$ sera une variable aléatoire normale $N(0, \sqrt{t})$.

9. Remarques finales

Il sera peut-être utile de souligner que le présent Mémoire n'apporte que les fondements de la théorie des intégrales-(BB) et -(pB). Il y a ici bien des questions importantes qui ont été laissées ouvertes. Certains problèmes intéressants ont été laissés complètement de côté (tel est le cas p. ex. de la théorie des dérivées des fonctions aléatoires d'intervalle, ou encore des problèmes d'extension de fonctions aléatoires du système d'intervalles à un système plus large d'ensembles mesurables (cf. [19])), d'autres n'ont été traités qu'insuffisamment (conditions d'intégrabilité-(pB) etc.). Intéressante serait aussi l'extension de la théorie au cas des intervalles à plusieurs dimensions. Quant aux équations différentielles stochastiques, il faudrait tout d'abord élargir le champ d'applicabilité de notre interprétation au moins au cas des fonctions aléatoires markoviennes.

Voilà donc une liste sommaire et incomplète de problèmes ouverts, ou plutôt de directions possibles du futur développement; espérons que ces lacunes ne tarderont pas à disparaître. Qu'il nous soit permis encore de rappeler ici les considérations de M. J. L. Doob (voir [7], en particulier p. 355) sur les perspectives du développement de la théorie des processus stochastiques. Les fonctions aléatoires d'intervalle représentent justement une espèce particulière de processus stochastiques de type „non-standard" dont on parle dans [7].

En terminant, je tiens à exprimer mes remerciements sincères à MM. J. Novák *et* V. Dupač *dont les remarques critiques ont contribué au perfectionnement de mon travail.*

LITTÉRATURE

[1] *M. S. Bartlett*: An introduction to stochastic processes, Cambridge 1955.

[2] *S. N. Bernstein*: Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques; Труды физ.-мат. института им. В. А. Стеклова, *5* (1934), 95—124.

[3] *С. Н. Бернштейн:* Теория вероятностей, Москва — Ленинград 1946.

[4] *J. C. Burkill*: Functions of intervals; Proceedings London Math. Soc., (2), *22* (1923), 275—310.

[5] *H. Cramér*: Mathematical methods of statistics, Princeton 1945.

[6] *J. L. Doob*: Stochastic processes, New York 1953.

[7] *J. L. Doob*: Present state and future prospects of stochastic process theory; Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1954, vol. III, 348—355, Amsterdam 1956.

[8] *D. A. Edwards, J. E. Moyal*: Stochastic differential equations; Proceed. Cambridge Phil. Soc., *51* (1955), 663—677.

[9] *B. W. Gniedenko, A. N. Kolmogorow*: Rozkłady graniczne sum zmiennych losowych niezależnych, Warszawa 1957.

[10] *P. Halmos*: Measure theory, New York 1950.

[11] *K. Ito*: On stochastic differential equations; Memoirs Amer. Math. Soc., No. 4, 1951.

[12] *V. Jarník*: Integrální počet II, Praha 1955.

[13] *E. G. Kimme*: On the convergence of sequences of stochastic processes; Transactions Amer. Math. Soc., *84* (1957), 208—229.

[14] *P. Lévy*: L'arithmétique des lois de probabilité; Journal des mathématiques pures et appl., *17* (103), 1938, 17—39.

[15] *P. Lévy*: Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris 1948.

[16] *P. Lévy*: Théorie de l'addition des variables aléatoires, Paris 1954.

[17] *O. Onicescu*: Calculul probabilităţilor, Bucureşti 1956.

[18] *O. Onicescu, G. Mihoc, C. T. Ionescu-Tulcea*: Calculul probabilităţilor şi aplicaţii, Bucureşti 1956.

[19] *A. Prékopa*: On stochastic set functions I, Acta mathem. Ac. Sci. Hung., *7* (1956), 215—263.

[20] *Ю. В. Прохоров:* Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей; Теория вероятностей, *1* (1956), 177—238.

[21] *L. A. Ringenberg*: The theory of the Burkill integral; Duke Math. Journal, *15* (1948), 239—270.

[22] *А. В. Скороход:* О предельном переходе от последовательности сумм независимых случайных величин к однородному случайному процессу с независимыми приращениями; Доклады АН СССР, *104* (1955), 364—367.

[23] *А. В. Скороход:* Предельные теоремы для случайных процессов; Теория вероятностей, *1* (1956), 289—319.

[24] *F. Zítek*: Singulární vstupní proudy; Časopis pro pěstování matematiky, *83* (1958), 41—55.

25] *F. Zítek*: Equations différentielles stochastiques; Czechosl. Math. Journal, *8* (83), 1958, 465—472.

[26] *F. Zítek*: Sur l'intégrabilité d'une équation différentielle stochastique; Czechosl. Math. Journal, *8* (83), 1958, 473—482.

Резюме

СЛУЧАЙНЫЕ ФУНКЦИИ ИНТЕРВАЛА

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

(Поступило в редакцию 29/V 1957 г.)

Пусть $\mathfrak{X}^*$ — система всех случайных величин на данном вероятностном поле $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ и пусть $\mathfrak{X}$ — система тех случайных величин из $\mathfrak{X}^*$, которые подчинены безгранично делимым законам распределения. Символом $\sim$ мы обозначаем совпадение законов распределения двух случайных величин $X \sim Y$, в то время как $X = Y$ обозначает равенство почти всюду.

Случайная функция от интервала определена здесь как отображение $\mathbf{X}$, которое каждому интервалу I, содержащемуся в данном интервале K, ставит в соответствие некоторую случайную величину $X(I) \in \mathfrak{X}^*$. На протяжении всей этой статьи мы предполагаем, что все изучаемые случайные функции являются функциями с независимыми приращениями; это значит, что если I_1 и I_2 — два непересекающихся интервала, то случайные величины $X(I_1)$ и $X(I_2)$ стохастически независимы. В отличие от точечных случайных функций это еще не значит, что такие функции аддитивны. Случайная функция $\mathbf{X}$ называется B-аддитивной или p-аддитивной, если справедливо соотв. (2.1) или (2.2) для любых двух соседних интервалов. Функцию $\mathbf{X}$ назовем непрерывной в $\emptyset$ (= пустой интервал), если для произвольной последовательности интервалов $I_n \subset K$, $n = 1, 2, \ldots$, таких что их длины $|I_n| \to 0$, имеем $X(I_n) \to 0$ по вероятности.

Во втором параграфе исследуются различные свойства случайных функций и их связи. Последующие параграфы 3—6 содержают главные результаты настоящей статьи, которыми является теория (BB)-интеграла и (pB)-интеграла. Оба эти понятия являются обобщением хорошо известного понятия интеграла Бэркилла и определяются следующим образом: Обозначая через $\mathscr{D}$ разбиение данного интервала K на конечное число n непересекающихся интервалов I_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, мы определим случайную величину $S(\mathscr{D}, K, \mathbf{X})$ по формуле (3.1). Если теперь для всякой последовательности разбиений $\mathscr{D}_n$ таких, что $\max\limits_{I_j \in \mathscr{D}_n} |I_j| \to 0$ при $n \to \infty$, последовательность случайных величин $S(\mathscr{D}_n, K, \mathbf{X})$ сходится по распределению (B-сходимость), или по вероятности (p-сходимость), к некоторому пределу, то мы назовем этот предел соотв. (BB)-интегралом или (pB)-интегралом случайной функции $\mathbf{X}$ в интервале K и обозначим его $(BB)\text{-}\int\limits_K \mathbf{X}$ или соотв. $(pB)\text{-}\int\limits_K \mathbf{X}$. Функция $\mathbf{X}$ называется (BB)-интегрируемой или (pB)-интегрируемой в K, если она имеет (BB)-интеграл или соотв. (pB)-интеграл в каждом частном интервале $J \subset K$. В четвертом параграфе исследуются свойства (BB)-интегралов и (pB)-интегралов, они в большинстве случаев аналогичны свойствам обыкновенного нестохастического интеграла Бэркилла. Указывается тоже (см. теорему 12), что интеграл Бэркилла естественно является частным случаем (BB)-интеграла или (pB)-интеграла. В пятом параграфе изучаются необходимые и достаточные условия (BB)-интегрируемости; при этом используются в случае функций, непрерывных в $\emptyset$, также некоторые результаты из теории предельных законов распределения сумм независимых случайных величин. В шестом параграфе указано, что, в отличие от теории интеграла Бэркилла, (BB)-интегрируемость в K в общем не вытекает из существования (BB)—интеграла в K.

Седьмой параграф содержит некоторые исследования по вопросам связи между теорией случайных функций интервала и теорией точечных случайных функций (стохастических процессов) с независимыми приращениями.

Наконец, в восьмом параграфе рассматривается теория стохастических дифференциальных уравнений с точки зрения теории случайных функций интервала, которая позволяет уточнить некоторые вопросы, оставшиеся неясными в изложении П. Леви (см. [15]). В нашей работе понятие стохастического дифференциального уравнения в случае функций с независимыми приращениями интерпретируется следующим образом: уравнение записивается в символической форме (8.2), и это значит, что случайная функция **X**, которую мы ищем, должна удовлетворять (8.3), где **F** — случайная функция от интервала, которая соответствует правой части уравнения (8.2). Ясно, что если (BB)-интеграл функции **F** не существует в интервале K, то и самое дифференциальное уравнение следует считать не имеющим решения. Если принять начальное условие (8.4), то решением уравнения (8.2) является точечная случайная функция (8.5). Эта концепция стохастических дифференциальных уравнений и ,,допустимой ошибки'' (см. [15]) несколько общее, чем у П. Леви.

В конце восьмого параграфа рассматривается один частный случай стохастического дифференциального уравнения: уравнение $\delta \mathrm{X}(t) = \xi \sqrt{\mathrm{d}t}$, (см. тоже [15], стр. 42), где ξ означает случайную величину с двумя возможными значениями $+1$ и -1, имеющими одинаковую вероятность $\frac{1}{2}$. Указывается, что уравнение интегрируемо и что его решением является случайная функция Винера-Леви.

В последнем, девятом, параграфе пересмотрены некоторые открытые вопросы теории случайных функций интервала и теории (BB)-интеграла и (pB)-интеграла.