

František Zítek

Équations différentielles stochastiques

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 3, 465–472

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100318>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 5 septembre 1957)

L'article a pour but de présenter les idées fondamentales d'une interprétation possible de la notion d'équation différentielle stochastique qui a été développée dans un travail antérieur peu accessible [6]; pour une autre interprétation voir [7].

1. Introduction

Les notations suivantes seront employées couramment dans tout le travail: $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ sera un champ de probabilité, \mathfrak{X}^* le système des variables aléatoires (abrév. v. a.) réelles et finies sur ce champ, \mathfrak{X} désignera le sous-système des v. a. qui dépendent de lois de répartition indéfiniment divisibles. (Nous supposons toujours que toutes les v. a. dont nous avons besoin existent effectivement sur le champ donné.) L'axe réel $(-\infty, \infty)$ sera désigné par R . Si deux éléments X, Y de \mathfrak{X}^* ont une même loi de répartition, nous écrirons $X \sim Y$, tandis que $X = Y$ dénotera l'égalité presque certaine.

Soit K un intervalle dans R , par *fonction aléatoire* (abrév. f. a.) définie dans K nous entendrons une transformation \mathbf{X} faisant à chaque $t \in K$ correspondre une v. a. $X(t) \in \mathfrak{X}^*$. Si $X(t) \in \mathfrak{X}$ pour tout $t \in K$, nous dirons que \mathbf{X} est *du type ID*.

Nous dirons d'une fonction aléatoire \mathbf{X} qu'elle est à *valeurs indépendantes* (f. a. v. i.), si $\{X(t) : t \in K\}$ est un système de v. a. stochastiquement indépendantes (au sens de SK; voir [3] chap. VII, p. 153 sqq). De manière analogue, \mathbf{X} sera appelée f. a. à *accroissements indépendants* (f. a. a. i.) si pour tout sous-intervalle $(t, t+h)$ de l'intervalle K l'accroissement fini

$$\Delta_h X(t) = X(t+h) - X(t) \tag{1.1}$$

est une v. a. stochastiquement indépendante du système $\{X(u) : u \in K, u \leq t\}$.

Comme il peut se voir déjà de notre définition même des f. a., nous adoptons ici *le point de vue de Bernoulli*, c'est-à-dire qu'il s'agira partout d'une étude des lois de répartition seules, donc non pas des propriétés des réalisations des processus stochastiques correspondants.

A toute f. a. \mathbf{X} du type ID définie dans K nous associons une fonction complexe de deux variables réelles définie dans $K \times R$ par la formule

$${}_2\psi_{\mathbf{X}}(t; s) = \lg \int_{\Omega} \exp [isX(t)] d\mathbf{P}(\omega), \quad (1.2)$$

continue en s pour chaque $t \in K$ et vérifiant ${}_2\psi_{\mathbf{X}}(t; 0) = 0$. Nous l'appellerons *fonction- ${}_2\psi$* de la f. a. \mathbf{X} . D'une façon analogue nous définissons la *fonction- ${}_3\psi$* de \mathbf{X} par

$${}_3\psi_{\mathbf{X}}(t, h; s) = \lg \int_{\Omega} \exp [is\Delta_h X(t)] d\mathbf{P}(\omega) \quad (1.3)$$

pour $(t, t+h) \subset K, s \in R$, en posant bien entendu ${}_3\psi_{\mathbf{X}}(t, 0; s) = 0, {}_3\psi_{\mathbf{X}}(t, h; 0) = 0$.¹⁾

Si \mathbf{X} est en outre une f. a. a. i., nous avons

$${}_3\psi_{\mathbf{X}}(t, h; s) = {}_2\psi_{\mathbf{X}}(t+h; s) - {}_2\psi_{\mathbf{X}}(t; s). \quad (1.4)$$

Les f. a. a. i. qui ont une fonction- ${}_3\psi$ de la forme

$${}_3\psi(t, h; s) = h\psi(s) \quad (1.5)$$

seront appelées linéaires.

2. Dérivée d'une f. a. a. i.

Soit \mathbf{X} une f. a. a. i. et soit \mathbf{Z} une f. a. v. i.; les deux du type ID. Nous dirons que \mathbf{Z} est la *dérivée* de \mathbf{X} et nous écrirons alors $\mathbf{DX} \sim \mathbf{Z}$ si leurs fonctions- ${}_2\psi$ vérifient

$$\frac{\partial}{\partial t} {}_2\psi_{\mathbf{X}}(t; s) = {}_2\psi_{\mathbf{Z}}(t; s) \quad (2.1)$$

pour tout $t \in K, s \in R$.

Les deux relations suivantes découlent directement de notre définition

$${}_2\psi_{\mathbf{Z}}(t; s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} {}_3\psi_{\mathbf{X}}(t, h; s) \quad (2.2)$$

et

$${}_3\psi_{\mathbf{X}}(t, h; s) = h {}_2\psi_{\mathbf{Z}}(t; s) + o(h), \quad (2.3)$$

le symbole $o(h)$ désignant ici une fonction complexe de h et s et telle que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} o(h) = 0 \quad \text{localement uniformément} \quad (2.4)$$

(c'est-à-dire uniformément dans tout intervalle fini $-\sigma < s < \sigma$).

¹⁾ Les fonctions- ψ peuvent être définies aussi pour des fonctions qui ne sont pas du type ID; mais alors les formules (1.2) et (1.3) peuvent être dépourvues de sens pour les grandes valeurs de s .

Nous voulons étudier les propriétés différentielles des f. a. a. i. en nous servant de la notion de dérivée introduite ci-dessus. Il est aisé de voir qu'une f. a. a. i. admettant une dérivée est nécessairement continue en probabilité, or il s'ensuit des résultats bien connus (voir [2], théorème 32.2, ou bien [1], chap. VIII, § 7; cf. aussi [7], théorème 3) que les accroissements finis des f. a. a. i. continues en probabilité dépendent nécessairement de lois de répartition indéfiniment divisibles, de sorte que l'on peut poser pour une telle f. a. \mathbf{X} :

$$X(t) = X_1(t) + X_0 \quad (2.5)$$

où X_1 est une f. a. a. i. du type ID et $X_0 \in \mathfrak{X}^*$ est stochastiquement indépendant de X_1 . Or X_0 n'a aucune influence sur les propriétés différentielles de \mathbf{X} . Il est donc possible de se borner a priori au cas des f. a. du type ID. Par là se trouve justifiée aussi notre définition de la dérivée. Le fait que la dérivée d'une f. a. a. i. du type ID est elle-aussi du même type est presque trivial (cf. [6], § 6).

Dans tout ce qui suit, la lettre \mathbf{X} désigne toujours une f. a. a. i. du type ID, tandis que \mathbf{Z} dénote une f. a. v. i., également du type ID.

3. Equations différentielles stochastiques

Notre interprétation de la notion d'équation différentielle stochastique est étroitement liée aux idées que M. PAUL LÉVY a esquissées dans ses ouvrages sur les f. a. (voir [2] et [3]). Nous nous bornons au cas des f. a. a. i., c'est-à-dire aux équations de la forme générale $DX(t) \sim Z(t)$ qui correspondent aux équations différentielles ordinaires (non-stochastiques) de type $y' = f(x)$. En général, une équation différentielle stochastique sera donc une relation qui détermine la loi temporelle de la dérivée de la f. a. a. i. cherchée.

Tout comme dans le cas des équations ordinaires il faut se donner, pour qu'on puisse regarder la solution comme bien déterminée, une condition à l'origine. Pour simplifier, nous acceptons une fois pour toutes la condition

$$P\{\omega: X(0) = 0\} = 1, \quad (3.1)$$

en supposant que l'intervalle K à l'intérieur duquel nous étudions l'équation en question soit de la forme $K = \langle 0, T \rangle$, $0 < T < \infty$.

Il est bon de souligner que la dérivée d'une f. a. a. i. est d'après notre définition une f. a. v. i., c'est donc dans ce sens qu'il faut interpréter des équations de la forme p. ex. $DX(t) \sim Y$ où $Y \in \mathfrak{X}$, ou bien $DX(t) \sim Yf(t)$ etc.

Comme il est facile de voir, les fonctions aléatoires linéaires sont caractérisées par les équations différentielles de la forme

$$DX(t) \sim Y, \quad Y \in \mathfrak{X}, \quad (3.2)$$

on a en effet (voir aussi [2], théorème 32.3; cf. [5] et [6]):

Théorème 1. *Pour chaque $Y \in \mathfrak{X}$ il existe une (et au point de vue de Bernoulli une seule) f. a. linéaire \mathbf{X} vérifiant (3.1) et (3.2); pour chaque f. a. linéaire \mathbf{X}*

vérifiant (3.1) il existe une et une seule loi de répartition indéfiniment divisible telle que pour chaque $Y \in \mathfrak{X}$ dépendant de cette loi on a (3.2).

D'après (2.3) nous pouvons exprimer, avec une certaine erreur, la loi de répartition des accroissements finis (1.1) à l'aide de la loi temporelle de **DX**. Posons-nous maintenant le problème inverse: déterminer la loi temporelle de **DX** en connaissant avec une certaine erreur admissible les lois de répartition des accroissements $\Delta_h X(t)$. C'est dans cette direction que nous arrivons à élargir un peu le sens donné à la notion d'équation différentielle stochastique: à chaque couple de nombres réels $t, h, (t, t+h) \subset K$, est associée une v. a. $F(t, h)$ et nous cherchons ensuite une f. a. a. i. **X** vérifiant

$$\Delta_h X(t) \sim F(t, h), \quad (3.3)$$

mais avec une certaine erreur seulement. Pour indiquer la présence possible de cette erreur nous écrirons alors

$$\delta X(t) \sim F(t, dt) \quad (3.4)$$

plutôt que (3.3), en réservant la forme (3.3) ou encore sa modification différentielle

$$dX(t) \sim F(t, dt) \quad (3.5)$$

au cas spécial où il n'y a aucune erreur. Quant à l'erreur en question, nous l'interprétons au sens suivant: pour que l'on ait (3.4) nous exigeons que les fonctions- ψ correspondantes, soit $\psi_F(t, h; s)$ et ${}_3\psi_X(t, h; s)$ vérifient pour $h \rightarrow 0$

$$|{}_3\psi_X(t, h; s) - \psi_F(t, h; s)| = o(h) \quad (3.6)$$

localement uniformément par rapport à $s \in R$. En raison de (3.6) et (2.2) nous avons alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \psi_F(t, h; s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} {}_3\psi_X(t, h; s) = \frac{\partial}{\partial t} {}_2\psi_X(t, s), \quad (3.7)$$

de sorte que la loi temporelle de **DX** peut alors être déterminée par un passage à la limite.²⁾

Il peut parfois arriver que l'erreur admise peut être représentée au moyen d'une v. a. $E(t, h)$, c'est-à-dire que l'on a en même temps avec (3.4) encore

$$dX(t) \sim F(t, dt) + E(t, dt); \quad (3.8)$$

il est bon peut-être de souligner que l'on ne fait ici aucune hypothèse concernant l'indépendance de F et E . C'est aussi de cette façon que l'erreur admissible est conçue chez M. Lévy (voir [2], p. 43) qui la dénote par $\omega(t, dt)$.

²⁾ Comme les v. a. $F(t, h)$ peuvent ne pas appartenir à \mathfrak{X} , les fonctions ψ_F peuvent n'être définies que pour certaines valeurs de s . Mais si la limite du premier membre de (3.7) doit exister, il faut que $F(t, h)$ tende vers zéro en probabilité lorsque $h \rightarrow 0$. Pour h suffisamment petit la fonction $\psi_F(t, h; s)$ est alors bien définie dans un domaine arbitrairement grand de la variable s , donc (3.6) peut avoir un sens.

Il est clair que dans le cas simple d'une équation (3.3) — sans erreur — la fonction- ψ de $F(t, h)$ est égale à la fonction- ${}_3\psi$ de \mathbf{X} , elle doit donc en particulier jouir de la propriété d'additivité, savoir

$$\psi_F(t, h + k; s) = \psi_F(t, h; s) + \psi_F(t + h, k; s). \quad (3.9)$$

4. Questions d'intégrabilité

Dans ce qui précède, nous avons introduit en principe trois types d'équations différentielles stochastiques, en ce paragraphe nous allons considérer les problèmes d'existence et de détermination de la solution de ces équations.

Le premier type que nous avons écrit sous la forme générale comme

$$DX(t) \sim Z(t) \quad (4.1)$$

à une théorie peu originale, car tout sa ramène aux problèmes de la théorie de l'intégrale de Newton: il s'agit en effet de trouver la fonction primitive à la fonction- ψ représentant la loi de répartition du second membre de l'équation en question; il y faut encore tenir compte de certaines conditions qui garantissent que l'intégrale soit une fonction- ψ admissible. On a alors évidemment (compte tenu de (3.1))

$${}_2\psi_X(t; s) = \int_0^t {}_2\psi_Z(u; s) du. \quad (4.2)$$

Quant aux équations „sans erreur“ du type de (3.3), il ne se pose pas de problèmes proprement dits car la connaissance des lois de répartition des accroissements finis $\Delta_h X(t)$ suffit avec la condition à l'origine pour déterminer la loi temporelle de \mathbf{X} .

Le plus intéressant est donc le cas des équations „avec erreur“ (3.4). On peut quand même le ramener aux cas précédents grâce aux deux théorèmes suivants.

Théorème 2. *La condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de l'équation (3.4) est que*

(a) *pour chaque $t \in K$ il existe une limite localement uniforme*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \psi_F(t, h; s) = \bar{\psi}(t; s); \quad (4.3)$$

(b) *l'équation (4.1) avec ${}_2\psi_Z = \bar{\psi}$ soit intégrable.*

Théorème 3. *La condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité de l'équation (3.4) est qu'il y ait une fonction $\psi(t, h; s)$ aux propriétés d'une fonction- ${}_3\psi$ d'une f. a. a. i. et vérifiant (3.6) en tant que ${}_3\psi_X$.*

Nous allons montrer encore que notre conception de l'erreur admise et de l'intégrabilité des équations „avec erreur“ est plus générale que celle de M. LÉVY (cf. [2], p. 44).

Théorème 4. *Si dans l'équation (3.8) on a*

$$\mathbf{E} [E^2(t, h)] = o(h^2) \quad (4.4)$$

lorsque $h \rightarrow 0$, alors (3.6) a lieu.

Démonstration. Soit $t \in K$ arbitraire mais fixe. Soit $\varphi_1(h, s)$ la fonction caractéristique de $\Delta_h X(t)$ et $\varphi_2(h, s)$ celle de $F(t, h)$. Alors

$$\begin{aligned} |\varphi_1(h, s) - \varphi_2(h, s)| &= \left| \int_{\Omega} \{\exp [isF(t, h) + isE(t, h)] - \exp [isF(t, h)]\} d\mathbf{P}(\omega) \right| \leq \\ &\leq \int_{\Omega} |\exp [isF(t, h)]| \cdot |\exp [isE(t, h)] - 1| d\mathbf{P}(\omega) \leq \\ &\leq \int_{\Omega} |\exp [isE(t, h)] - 1| d\mathbf{P}(\omega) \leq |s| \int_{\Omega} |E(t, h)| d\mathbf{P}(\omega). \end{aligned}$$

Or il découle de (4.4) que $\mathbf{E} [|E(t, h)|] = o(h)$ de sorte que

$$|\varphi_1(h, s) - \varphi_2(h, s)| = |s| \cdot o(h). \quad (4.5)$$

Or dans chaque intervalle fini de la variable s , soit $-\sigma < s < \sigma$, on a (en raison de ce que $\Delta_h X(t) \in \mathfrak{X}$)

$$0 < A = A(\sigma) < |\varphi_1(h, s)| \leq 1, \quad (4.6)$$

donc aussi en vertu de (4.5) pour tout h suffisamment petit ($h < \delta$)

$$0 < B = B(\sigma, \delta) < \min (|\varphi_1(h, s)|, |\varphi_2(h, s)|) \leq 1. \quad (4.7)$$

On peut donc appliquer la formule des accroissements finis à la fonction $\lg z$ pour $B \leq |z| \leq 1$ et obtenir par là (3.6), c. q. f. d.

Théorème 5. *Si dans (3.8) on a pour $h \rightarrow 0$*

$$\mathbf{P}\{\omega: E(t, h) \neq 0\} = o(h), \quad (4.8)$$

alors (3.6) a lieu.

Démonstration. En adoptant les mêmes notations comme dans le cas précédent nous avons à nouveau

$$\begin{aligned} |\varphi_1(h, s) - \varphi_2(h, s)| &\leq \int_{\Omega} |\exp [isE(t, h)] - 1| d\mathbf{P}(\omega) = \\ &= \int_{E=0} |\exp [isE(t, h)] - 1| d\mathbf{P}(\omega) + \int_{E \neq 0} |\exp [isE(t, h)] - 1| d\mathbf{P}(\omega) \leq \\ &\leq \int_{E \neq 0} 2 d\mathbf{P}(\omega) = 2\mathbf{P}\{\omega: E(t, h) \neq 0\} = o(h), \end{aligned}$$

le reste de la démonstration étant tout à fait analogue à la partie correspondante de la démonstration du théorème précédent.

5. Exemples

Pour terminer nous allons étudier deux exemples concrets d'équations différentielles stochastiques; ils sont d'ailleurs extrêmement simples.

Exemple 1. Supposons que nous ayons l'équation

$$\delta X(t) \sim F(dt) \quad (5.1)$$

où — pour $h > 0$ suffisamment petit — la v. a. $F(h)$ est répartie suivant la loi simple que voici

$$\mathbf{P}\{\omega: F(h) = 1\} = \lambda h, \quad \mathbf{P}\{\omega: F(h) = 0\} = 1 - \lambda h,$$

λ étant une constante positive. Pour $h > \lambda^{-1}$ la loi de $F(h)$ peut être choisie tout à fait arbitrairement. On a alors

$$\psi_F(t, h; s) = \lg [1 + \lambda h(e^{is} - 1)] \quad (5.2)$$

de sorte que (4.3) existe et est égale à $\lambda(e^{is} - 1)$. Il s'en ensuit que

$${}_2\psi_X(t; s) = \lambda t(e^{is} - 1), \quad (5.3)$$

compte tenu de (3.1). \mathbf{X} correspond donc à un processus stochastique poissonien homogène et simple.

Exemple 2. Considérons l'équation bien connue de M. Lévy

$$\delta X(t) \sim Y \sqrt{dt} \quad (5.4)$$

où

$$\mathbf{P}\{\omega: Y = 1\} = \frac{1}{2} = \mathbf{P}\{\omega: Y = -1\}.$$

Nous avons donc

$$\psi_F(t, h; s) = \lg \cos(s \sqrt{h}),$$

d'où

$${}_2\psi_X(t; s) = -\frac{s^2}{2} t.$$

Une analyse plus poussée des équations du type (5.4) a été faite dans [8].

LITTÉRATURE

- [1] *J. L. Doob*: Stochastic processes; New York 1953.
- [2] *P. Lévy*: Processus stochastiques et mouvement brownien; Paris 1948.
- [3] *P. Lévy*: Théorie de l'addition des variables aléatoires; Paris 1954.
- [4] *O. Onicescu, G. Mihoc, C. T. Ionescu-Tulcea*: Calculul probabilităților și aplicații; București 1956.
- [5] *F. Zitek*: Sur la durée des processus linéaires; Czechoslovak Math. Journal 8 (83), 1958, 122—130.
- [6] *F. Zitek*: Náhodné funkce s nezávislými přírůstky a stochastické diferenciální rovnice; (thèse non-publiée), Praha 1957.
- [7] *F. Zitek*: Fonctions aléatoires d'intervalle; Czechoslovak Math. Journal 8 (83), 1958, No 4, à paraître.
- [8] *F. Zitek*: Sur l'intégrabilité d'une équation différentielle stochastique; Czechoslovak Math. Journal, 8 (83), 1958, 473—482.

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zítek), Прага

(Поступило в редакцию 5/IX 1957 г.)

Пусть \mathfrak{X}^* — система всех случайных величин на данном вероятностном поле $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ и пусть \mathfrak{X} — подсистема тех элементов из \mathfrak{X}^* , которые подчинены безгранично делимым законам распределения. Символом \sim мы обозначаем равенство законов распределения двух случайных величин. Пусть, далее, $K = \langle 0, T \rangle$, $R = (-\infty, \infty)$. Пусть \mathbf{X} — отображение, которое каждому $t \in K$ ставит в соответствие некоторую случайную величину $X(t) \in \mathfrak{X}$ и такое, что для любых $t, h, \langle t, t+h \rangle \subset K$, приращение (1.1) стохастически независимо от совокупности $\{X(u) : u \in K, u \leq t\}$; тогда мы назовем \mathbf{X} случайной функцией с независимыми приращениями. Пусть теперь \mathbf{Z} — другое отображение K в \mathfrak{X} такое, что система $\{Z(t) : t \in K\}$ является системой стохастически независимых случайных величин. Если для соответствующих ${}_2\psi$ -функций (см. (1.2)) ${}_2\psi_{\mathbf{X}}(t; s)$ и ${}_2\psi_{\mathbf{Z}}(t; s)$ справедливо (2.1), то мы скажем, что \mathbf{Z} — производная от случайной функции \mathbf{X} : $\mathbf{Z} \sim \sim \mathbf{DX}$.

Настоящая работа посвящена изучению случайных функций с независимыми приращениями и их производных, соотв. элементам теории стохастических дифференциальных уравнений, т. е. уравнений, которые определяют производную от искомой случайной функции. Вводятся три типа таких дифференциальных уравнений: а) уравнения вида (4.1), когда определены прямо законы распределения производной; б) уравнения вида (3.3) или (3.5) — уравнения „без ошибки“, когда определены законы распределения конечных разностей (1.1) решения \mathbf{X} ; в) уравнения „с ошибкой“ — см. (3.4) — когда законы распределения разностей (1.1) определены только с точностью до ошибки, которая выражается через (3.6). При этом в качестве начального условия всегда предполагается (3.1).

В § 4 исследуются вопросы существования решения уравнений, в особенности уравнений „с ошибкой“; этот тип уравнений является самым интересным из только что введенных типов. Здесь также указывается, что введенное понятие ошибки более общее, чем у П. Леви (см. [2], стр. 43). Последний параграф содержит два простых примера уравнений „с ошибкой“ и их решений. Более подробная дискуссия вопросов разрешимости уравнений одного специального типа развита в [8].