Petr Vopěnka
О размерности компактных пространств

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 3, 319–327

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100307

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. *8* (*83*) ПРАГА 20. IX. 1958 г., No 3

О РАЗМЕРНОСТИ КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВ

ПЕТР ВОПЕНКА (Petr Vopěnka), Прага

(Поступило в редакцию 30/1 1958 г.)

В статье доказывается для любых m, n, $1 \leqq m \leqq n \leqq \infty$, существование компактных пространств X, Y таких, что $\dim X = \dim Y = m$, $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} Y = n$.

В 1935 г. П. С. Александров [1][1]) поставил вопрос, верно ли для всех компактных пространств равенство $\dim X = \operatorname{ind} X$. В 1949 г. А. Лунц [4], а затем О. Локуциевский [3] построили компактное пространство X, для которого $\dim X = 1$, $\operatorname{ind} X = 2$. В предлагаемой статье доказывается, что для m, n удовлетворяющих неравенствам $0 < m \leqq n \leqq \infty$, существуют компактные X, Y такие, что $\dim X = \dim Y = m$, $\operatorname{ind} X = n$, $\operatorname{Ind} Y = n$.

Существование этих пространств доказывалось в первоначальном тексте статьи[2]) при помощи построения, проведенного для определенного частного случая. Обобщение этого построения (см. 2.1, 2.5), а также применение понятия ,,почти открытого'' отображения указаны М. Катетовым.

Статья разделена на два параграфа: в § 1 содержатся некоторые (частично известные) вспомогательные теоремы; § 2 посвящен собственному проведению конструкции.

1

Пространством разумеется во всей статье топологическое пространство (с аксиомой $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$), в котором выполняется аксиома отделимости Хаусдорфа. Границу множества A в пространстве X, т. е. множество $\overline{A} \cap \overline{X - A}$, мы будем обозначать символом $\operatorname{Fr} A$. Если X — пространство, то символы $\dim X$, $\operatorname{ind} X$, $\operatorname{Ind} X$ означают соответственно его размерность, определен-

[1]) Цифры в квадратных скобках означают ссылки на список литературы в конце статьи.

[2]) Первоначальный текст статьи поступил в редакцию 15/III 1957 г.

ную при помощи покрытий („комбинаторную" размерность), малую индуктивную размерность и большую индуктивную размерность.[3])

Известно, что $\operatorname{ind} X \leqq \operatorname{Ind} X$ для произвольного пространства X; $\dim X \leqq \operatorname{Ind} X$ в случае нормального пространства X; $\dim X \leqq \operatorname{ind} X$ в случае компактного X; если (для произвольного пространства X) $\dim X = 0$, то также и $\operatorname{Ind} X = \operatorname{ind} X = 0$. Если $Y \subset X$, то $\operatorname{ind} Y \leqq \operatorname{ind} X$; если Y замкнуто в X, то $\dim Y \leqq \dim X$, $\operatorname{Ind} Y \leqq \operatorname{Ind} X$.

1.1. *Пусть пространства* X, Y *являются компактными,* $\dim X = 0$. *Тогда* $\dim (X \times Y) = \dim Y$, $\operatorname{Ind} (X \times Y) = \operatorname{Ind} Y$.

Доказательство. Очевидно, достаточно при предположении $\dim Y = m < \infty$, $\operatorname{Ind} Y = n < \infty$ доказать, что $\dim (X \times Y) \leqq m$, $\operatorname{Ind} (X \times Y) \leqq n$.

Докажем первое неравенство. Пусть $\{G_i\}$ является конечным открытым покрытием пространства $X \times Y$. Из компактности пространства Y легко вытекает, что для каждой точки $x \in X$ существует ее окрестность U_x такая, что для подходящих открытых $V_{x,i} \subset Y$ справедливо $U_x \times V_{x,i} \subset G_i$, $\bigcup V_{x,i} = Y$; притом, в силу неравенства $\dim Y \leqq m$, можно, очевидно, предполагать, что кратность $\{V_{x,i}\}$ всегда $\leqq m + 1$. Так как X является компактным, то существуют x_j, $j = 1, \ldots, p$, так, что $\bigcup\limits_1^p U_{x_j} = X$. Из равенства $\dim X = 0$ следует, что существуют открытые $U_j^* \subset U_{x_j}$ такие, что $\bigcup\limits_1^p U_j^* = X$ и система $\{U_j^*\}$ является дизъюнктной. В таком случае система всех $\{U_j^* \times V_{x_j,i}\}$, очевидно, вписана в $\{G_i\}$, и ее кратность $\leqq m + 1$.

Теперь докажем второе неравенство индукцией по n, причем выполним только переход от $n - 1$ к n, потому что доказательство для $n = 0$ совершенно аналогично. Из компактности пространства Y легко вытекает, что если задано замкнутое множество F и открытое $U \supset F$, то к любой точке $x \in X$ найдется ее окрестность U_x такая, что для подходящих открытых множеств $V_x \subset Y$, $W_x \subset Y$ будет

$$F \cap (U_x \times Y) \subset U_x \times V_x\,,\ \overline{V}_x \subset W_x,\ U_x \times W_x \subset U\,.$$

Так как X компактно, существуют x_j, $j = 1, \ldots, p$, так, что $\bigcup\limits_1^p U_{x_j} = X$; из равенства $\dim X = 0$ следует, что существуют взаимно непересекающие-

[3]) Напомним вкратце их определения: $\dim X \leqq n$ значит, что в любое конечное открытое покрытие пространства X можно вписать конечное открытое покрытие $\{G_i\}$ кратности $\leqq n + 1$, т. е. такое, что $n + 2$ любых взаимно различных G_i имеют пустое пересечение; $\operatorname{ind} X$ и $\operatorname{Ind} X$ определены индуктивно таким образом, что $\operatorname{ind} \emptyset = \operatorname{Ind} \emptyset = -1$; $\operatorname{ind} X \leqq n$ значит, что для любой точки $x \in X$ и ее окрестности U существует окрестность $V \subset U$ точки x такая, что $\operatorname{ind} \operatorname{Fr} V \leqq n - 1$; $\operatorname{Ind} X \leqq n$ значит, что для любого замкнутого множества $F \subset X$ и его окрестности U существует окрестность $V \subset U$ множества F, для которой $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} V \leqq n - 1$.

ся открыто-замкнутые множества $U_j^* \subset U_{x_j}$ такие, что $\bigcup U_j^* = X$. Теперь выберем для каждого j открытое в Y множество V_j^* так, чтобы выполнялось

$$\overline{V_{x_j}} \subset V_j^* , \quad \overline{V_j^*} \subset W_{x_j} , \quad \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} V_j^* \leqq n - 1$$

(это возможно, потому что Y нормально, $\operatorname{Ind} Y = n$), и положим $V = \bigcup (U_j^* \times V_j^*)$. Очевидно, $F \subset V \subset U$. Легко можно проверить, что

$$\operatorname{Fr} V = \bigcup_1^p (U_j^* \times \operatorname{Fr} V_j^*) .$$

По предположению индукции непосредственно получаем, что $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} V \leqq \leqq n - 1$.

1.2. *Пусть X — нормальное пространство, пусть множество $F \subset X$ замкнуто,* $\dim F \leqq n$. *Пусть* $\dim (X - U) \leqq m$ *для любого открытого $U \supset F$. Тогда* $\dim X \leqq \max (m, n)$.

Замечание. Этот результат получил C. H. Dowker [2].

Доказательство. Пусть $\{G_i\}$ является конечным открытым покрытием пространства P. Из соотношения $\dim F \leqq n$ и из того обстоятельства, что F является нормальным, сразу же вытекает, что существуют замкнутые $A_i \subset G_i \cap F$ такие, что $\bigcup A_i = F$, а кратность системы $\{A_i\}$ не превышает $n + 1$. Теперь уже, на основании известных теорем, можем утверждать, что существуют открытые в P множества $U_i \supset A_i$ такие, что кратность $\{U_i\}$ не превышает $n + 1$. Положим $U = \bigcup (U_i \cap G_i)$. Так как $F \subset U$, то существуют открытые множества V, W такие, что $F \subset V$, $\overline{V} \subset W$, $\overline{W} \subset U$.

Положим $G_i' = (G_i - \overline{W}) \cup (U_i \cap G_i)$; очевидно, $\bigcup G_i' = X$. Имеем $\dim (X - V) \leqq m$; следовательно, существуют открытые в $X - V$ множества B_i такие, что

$$B_i \subset (X - V) \cap G_i' , \quad \bigcup B_i = X - V ,$$

кратность $\{B_i\}$ не превышает $m + 1$. Положим

$$H_i = (W \cap U_i \cap G_i) \cup B_i .$$

Тогда H_i открыты,

$$H_i \subset G_i' \subset G_i , \quad \bigcup H_i = X .$$

Если $x \in \overline{W}$, то x может принадлежать самое большое $n + 1$ множеству $U_i \cap G_i$, следовательно, самое большое $n + 1$ множеству G_i', а тем более не может принадлежать больше, чем $n + 1$ множеству H_i; если $x \in X - \overline{W}$, то x не может принадлежать больше, чем $m + 1$ множеству H_i, потому что в противном случае оно принадлежало бы больше, чем $m + 1$ множеству B_i, что невозможно. Итак, кратность $\{H_i\}$ не превышает $\max (m, n) + 1$.

1.3. *Пусть P — компактное пространство, $S \subset P$ — замкнутое множество, и пусть для каждой окрестности U множества S найдется* *всегда открыто-замкнутая окрестность* $V \subset U$. *Пусть* $\operatorname{Ind} S = m \geqq 0$ *и пусть для каждого замкнутого* $Q \subset P$, *непересекающего* S, $\operatorname{Ind} Q \leqq n$. *Пусть, далее, существует непрерывное отображение* φ *пространства* P *на* S *такое, что* $\varphi(x) = x$ *для* $x \in S$. *Тогда* $\operatorname{Ind} P \leqq m + n$.

Доказательство. Это утверждение мы докажем индукцией по m, причем выполним только переход от $m - 1$ к m, потому что доказательство утверждения для $m = 0$ совершенно аналогично. Пусть $F \subset U \subset P$, причем F — замкнутое, а U — открытое множество. Существует открытое в S множество $G \subset S$ такое, что

$$S \cap F \subset G\,, \quad \overline{G} \subset S \cap U\,, \quad \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} G \leqq m - 1\,.$$

Положим $G^* = \varphi^{-1}(G)$; тогда $\operatorname{Fr} G^* \subset \varphi^{-1}(\operatorname{Fr} G)$. Так как пространство $\varphi^{-1}(\operatorname{Fr} G)$ и его подмножество $\operatorname{Fr} G$ удовлетворяют условиям доказываемой теоремы (с $m - 1$ вместо m), в чем нетрудно убедиться, то из предположения индукции следует, что $\operatorname{Ind} \varphi^{-1}(\operatorname{Fr} G) \leqq m - 1 + n$. Из соотношений

$$S \cap \overline{G}^* \subset S \cap \varphi^{-1}(\overline{G}) \subset U\,, \quad S \cap F \subset G^*\,,$$

легко выводим, что существует открыто-замкнутое в P множество H такое, что

$$S \subset H\,, \quad H \cap \overline{G^*} \subset U\,, \quad H \cap F \subset G^*\,.$$

Имеем $\operatorname{Ind}(P - H) \leqq n$; следовательно, существует открытое в $P - H$ (значит, также и в P) множество G_1 такое, что

$$F - H \subset G_1 \subset U - H, \ \operatorname{Ind} \operatorname{Fr} G_1 \leqq n - 1\,.$$

Теперь положим $V = (G^* \cap H) \cup G_1$. Тогда $F \subset V$, $V \subset U$; множество $\operatorname{Fr} V$ является дизъюнктным объединением $\operatorname{Fr}(G^* \cap H) \subset \operatorname{Fr} G^*$ и $\operatorname{Fr} G_1$, так что сразу получаем неравенство $\operatorname{Ind} \operatorname{Fr} V \leqq m - 1 + n$. Отсюда следует, что $\operatorname{Ind} P \leqq m + n$.

1.4. *Пусть* R — *пространство*, $R_2 \subset R_1 \subset R$, R_2 — *непустое связное множество. Пусть* $G \subset R$ — *открытое множество, причем* $G \cap R_2 \neq \emptyset$, $R_2 - \overline{G} \neq \emptyset$. *Тогда или* (а) *существует открытое в* R_1 *множество* U *такое, что* $U \cap R_2 \neq \emptyset$, $U \subset \operatorname{Fr} G$ *или* (б) $\overline{G \cap R_1} \cap \overline{R_1 - \overline{G}} \cap R_2 \neq \emptyset$.

Доказательство. Пусть $H = R - G$. Пусть $A = \overline{G \cap R_1}$, $B = \overline{H \cap R_1}$, $U = R_1 - A - B$. Если $R_2 - A - B \neq \emptyset$, то имеет место, очевидно, случай (а), потому что

$$U \subset R_1 - G - H \subset R_1 \cap \operatorname{Fr} G\,.$$

Если $R_2 \subset A \cup B$, то из соотношений

$$R_2 \cap A \supset R_2 \cap G \neq \emptyset\,, \quad R_2 \cap B \supset R_2 \cap H \neq \emptyset$$

и из связности R_2 вытекает $R_2 \cap A \cap B \neq 0$, так что имеет место случай (б).

1.5. Определение. Отображение f пространства P в пространство Q назовем почти открытым,[4]) если для любого $y \in f(P)$ найдется $x \in P$ такое, что $f(x) = y$ и для любой окрестности U точки x множество $f(U)$ является окрестностью y в пространстве $f(P)$.

1.6. *Пусть X — компактное пространство. Тогда существует компактное пространство Y такое, что* $\dim Y = 0$, *и почти открытое непрерывное отображение f пространства Y на X.*

Доказательство. Очевидно, что существует система $\{\mathfrak{G}_\mu\}$, где индекс μ пробегает некоторое множество M, такая, что: (1) $\mathfrak{G}_\mu = \{G_{\mu,i}\}$, где $i = 1, \ldots, n(\mu)$, суть конечные открытые покрытия пространства X, (2) система всех $G_{\mu,i}$ является открытым базисом пространства X, (3) если $x_1 \in X$, $x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, то существует μ так, что ни для какого $i = 1, \ldots, n(\mu)$ не будет одновременно $x_1 \in \overline{G_{\mu,i}}$ и $x_2 \in \overline{G_{\mu,i}}$. Для любого натурального p обозначим через K_p пространство, состоящее из p точек $1, \ldots, p$. Положим $R = \mathfrak{P}_\mu K_{n(\mu)}$. Из свойства (3) системы $\{\mathfrak{G}_\mu\}$ следует, что при любом $y = \{y_\mu\} \in R$ множество $\Phi(y) = \bigcap_\mu G_{\mu,y(\mu)}$ является или одноточечным или пустым множеством. Из компактности X вытекает, что в случае $\Phi(y) = \emptyset$ существует конечное множество $M' \subset M$ такое, что $\bigcap_{\mu \in M'} \overline{G_{\mu,y(\mu)}} = \emptyset$; из этого непосредственно следует, что множество Y точек $y \in R$, обладающих тем свойством, что $\Phi(y) \neq \emptyset$, замкнуто в R; значит, пространство Y является компактным. Для $y \in Y$ теперь положим $\Phi(y) = (f(y))$. Очевидно, что f есть отображение Y на X. Если $y = \{y_\mu\} \in Y$ и если V — окрестность точки $f(y)$ в X, то $\bigcap_\mu \overline{G_{\mu,y(\mu)}} = (f(y)) \subset V$; из компактности X далее следует, что существует конечное множество $M' \subset M$ такое, что $\bigcap_{\mu \in M'} \overline{G_{\mu,y(\mu)}} \subset V$. Обозначим через U множество $z \in Y$ таких, что $z(\mu) = y(\mu)$ для $\mu \in M'$; тогда U является окрестностью y в Y, и $f(U) \subset V$. Отображение f является, следовательно, непрерывным.

Теперь докажем, что f — почти открытое отображение. Пусть $x \in X$. Для каждого μ выберем $y(\mu)$ так, чтобы $x \in G_{\mu,y(\mu)}$; положим $y = \{y(\mu)\}$, так что $y \in Y$, $f(y) = x$. Пусть U — окрестность y в Y. Тогда существует конечное множество $M' \subset M$ такое, что $U' \subset U$, где через U' обозначено множество тех $z \in Y$, для которых $z(\mu) = y(\mu)$ при $\mu \in M'$. Положим еще

$$V' = \bigcap_{\mu \in M'} G_{\mu,y(\mu)} ,$$

Тогда V' является окрестностью точки x в X, и легко можно обнаружить, что $V' \subset f(U')$, так что $f(U)$ является окрестностью точки x.

[4]) Отметим, что термин „почти открытое отображение" уже применялся в литературе, но в существенно отличном смысле; см., напр., В. Птак, О полных топологических линейных пространствах, Чехосл. матем. журнал, 1953, *3* (*78*), 301—364.

2

2.1. Пусть X, Y, Z — пространства, f — непрерывное отображение Y на X, N — бесконечное дискретное пространство. Положим

$$T = X \cup (Y \times N \times Z)\,;$$

в качестве открытого базиса в T возьмем систему всех открытых подмножеств топологического произведения $Y \times N \times Z$ и всех множеств вида

$$U \cup (f^{-1}(U) \times (N - K) \times Z)\,,$$

где $U \subset X$ — открытое в X, а $K \subset N$ — конечное множество. Легко можно проверить, что T с определенной таким образом топологией действительно представляет собой хаусдорфово топологическое пространство. Мы будем его обозначать символом $T(X, Y, Z, f, N)$.

2.2. Пусть $T = T(X, Y, Z, f, N)$. Если для $t \in T$ положить $\varphi(t) = t$ в случае $t \in X$, $\varphi(t) = f(y)$ в случае $t = (y, v, z) \in Y \times N \times Z$, то, как легко обнаружить, φ есть непрерывное отображение T *на* X.

2.3. *Если X, Y, Z — компактные пространства, то и $T = T(X, Y, Z, f, N)$ является компактным и для любой окрестности U множества $X \subset T$ существует открыто-замкнутая окрестность $V \subset U$. Если, кроме того,* $\dim Y = 0$, *то* $\dim T = \max(\dim X, \dim Z)$, $\operatorname{Ind} T \leqq \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Z$.

Доказательство. I. Пусть $\mathfrak{G}$ — открытое покрытие P. Докажем, что из $\mathfrak{G}$ можно выбрать конечное покрытие; достаточно, конечно, доказать это утверждение для случая, когда $\mathfrak{G}$ состоит из множеств открытого базиса, описанного в 2.1. Но тогда из G можно выбрать конечное число множеств

$$V_i = U_i \cup (f^{-1}(U_i) \times (N - K_i) \times Z)\,,$$

где $U_i \subset X$ — открытые в X, а $K_i \subset N$ — конечные множества, таким образом, что $\bigcup\limits_1^n U_i = X$. Тогда, очевидно,

$$T - \bigcup_1^n V_i \subset Y \times \bigcup_1^n K_i \times Z\,;$$

следовательно, $T - \bigcup\limits_1^n V_i$ компактно. Из этого уже следует, что из G можно выбрать конечное покрытие. Значит, T — компактное пространство. Также можно легко убедиться в том, что множества $X \cup (Y \times (N - K) \times Z)$, где множество $K \subset N$ конечно, образуют полную систему окрестностей X в T; эти множества являются, очевидно, открыто-замкнутыми. Соотношение

$$\dim T \leqq \max(\dim X, \dim Z)$$

теперь уже непосредственно вытекает из 1.1 и 1.2; неравенство

$$\operatorname{Ind} T \leqq \operatorname{Ind} X + \operatorname{Ind} Z$$

получается из 2.2, 1.1 и 1.3.

2.4. *Пусть X, Y, Z — компактные пространства,* $\dim Y = 0$, *пусть f — почти открытое непрерывное отображение Y на X и пусть N — дискретное пространство, мощность которого больше мощности X. Пусть, наконец, $T = T(X, Y, Z, f, N)$. Тогда справедливо следующее утверждение: если U, V открыты в T, $\overline{U \cap X} \cap \overline{V \cap X} \neq \emptyset$, то $\overline{U} \cap \overline{V}$ содержит часть, которая гомеоморфна пространству Z.*

Доказательство. Положим $U_1 = U \cap X$, $V_1 = V \cap X$. Пусть $x_0 \in \overline{U}_1 \cap \overline{V}_1$. Существует $y_0 \in Y$ такое, что $f(y_0) = x_0$, и для каждой окрестности G точки y_0 в Y множество $f(G)$ представляет собой окрестность точки x_0 в X; тогда, очевидно, будет $y_0 \in \overline{f^{-1}(U_1)}$, $y_0 \in \overline{f^{-1}(V_1)}$. Вследствие того, что U, V открыты, для каждого $x \in U_1$ существует конечное множество $K_x \subset N$ такое, что

$$f^{-1}(x) \times (N - K_x) \times Z \subset U\,,$$

и для каждого $x \in V_1$ существует конечное множество $K'_x \subset N$ такое, что

$$f^{-1}(x) \times (N - K'_x) \times Z \subset V\,.$$

Положим

$$M = N - \bigcup_{x \in U_1} K_x - \bigcup_{x \in V_1} K'_x\,;$$

очевидно, $M \neq \emptyset$. Имеем

$$f^{-1}(U_1) \times M \times Z \subset U\,, \quad f^{-1}(V_1) \times M \times Z \subset V\,;$$

отсюда следует, что

$$(y_0) \times M \times Z \subset \overline{U}\,, \quad (y_0) \times M \times Z \subset \overline{V}\,.$$

2.5. *Если пространство X компактно,* $\dim X > 0$, *то существует компактное пространство $T \supset X$, обладающее следующими свойствами:* (1) $\dim T = \dim X$, $\operatorname{Ind} T \leqq 2 \operatorname{Ind} X + 1$; (2) *существует точка $t \in T$ и ее окрестность U в T так, что для любой окрестности $G \subset U$ точки t в T множество* $\operatorname{Fr} G$ *содержит часть, которая гомеоморфна X.*

Доказательство. Пусть $I = \langle 0, 1 \rangle$. Пусть g — непрерывное отображение дисконтинуума Кантора C на J; пусть M — дискретное пространство мощноси $\aleph_0$. Положим $T' = T(J, C, X, g, M)$. Ввиду 2.3 и 1.6 существует компактное Y и отображение f пространства Y на T' такое, что $\dim Y = 0$, f — почти открытое непрерывное отображение. Пусть N — дискретное пространство, мощность которого больше мощности пространства X и больше $2^{\aleph_0}$. Положим $T = T(T', Y, X, f, N)$. Докажем, что T обладает требуемыми свойствами.

Из 2.3 вытекает, что

$$\dim T = \dim T' = \dim X\,, \quad \operatorname{Ind} T \leqq \operatorname{Ind} T' + \operatorname{Ind} X\,,$$

$$\operatorname{Ind} T' \leqq \operatorname{Ind} \mathrm{I} + \operatorname{Ind} X\,, \qquad \operatorname{Ind} T \leqq 2 \operatorname{Ind} X + 1\,.$$

Обозначим через t точку $0 \in I \subset T' \subset T$; выберем ее окрестность U в T так, чтобы точка $1 \in I$ не принадлежала $\overline{U}$. Пусть теперь $G \subset U$ — окрестность t в T. Тогда из 1.4 (где следует положить $R = T$, $R_1 = T'$, $T_2 = I$) вытекает, что или (а) существует открытое в T' множество V такое, что $V \cap I \neq \emptyset$, $V \subset \operatorname{Fr} G$, или (б) $\overline{G \cap T'} \cap \overline{T' - G} \cap I \neq \emptyset$. В случае (а) по построению T' непосредственно видно, что V содержит часть, гомеоморфную X. В случае (б) из 2.4 следует, что $\overline{G} \cap \overline{T - \overline{G}} \subset \operatorname{Fr} G$ содержит часть, гомеоморфную X.

2.6. *Пусть* $1 \leqq n < \infty$. *Тогда существует компактное пространство* X *такое, что* $\dim X = 1$, $\operatorname{ind} X = n$, $\operatorname{Ind} X < \infty$, *а компактное пространство* Y *такое, что* $\dim Y = 1$, $\operatorname{Ind} X = n$.

Доказательство. Обозначим через A (соответственно через B) множество натуральных чисел n, для которых существует X (соответственно, Y), обладающее приведенными выше свойствами. В силу 2.5 справедливо утверждение: если $n \in A$ (или $n \in B$), то существует $k > n$ так, что $k \in A$ (или $k \in B$). Из индуктивного определения размерности (и из того обстоятельства, что при $\operatorname{ind} X > 0$ не может быть $\dim X = 0$) непосредственно вытекает, что одновременно с $n > 1$ множеству A (или B) принадлежит также $n - 1$. Из этого вытекает уже наше утверждение.

2.7. Теорема. *Пусть* $1 \leqq m \leqq n \leqq \infty$. *Тогда существует компактное пространство* X *такое, что* $\dim X = m$, $\operatorname{ind} X = n$, *и компактное пространство* Y *такое, что* $\dim Y = m$, $\operatorname{Ind} Y = n$.

Доказательство. Для $1 = m \leqq n < \infty$ утверждение уже доказано (2.6). Пусть $m = 1$, $n = \infty$. Пусть X_k, $k = 1, 2, \ldots$, — компактные пространства, $\dim X_k = 1$, $\operatorname{ind} X_k = k$. Мы можем, конечно, предполагать, что X_k взаимно не пересекаются; выберем еще элемент ξ, который не содержится ни в каком X_k, положим $X = (\xi) \cup \bigcup\limits_1^\infty X_k$ и, наконец, в качестве открытого базиса в X возьмем систему всех множеств, открытых в некотором X_k, и всех множеств вида $(\xi) \cup \bigcup\limits_{k=p}^\infty X_k$. Легко проверить, что X является компактным. Очевидно, $\operatorname{Ind} X = \operatorname{ind} X = \infty$; из известной теоремы о размерности объединения счетного числа замкнутых множеств получаем $\dim X = 1$.

Если $m > 1$, то достаточно выбрать компактные X', Y' так, чтобы $\dim X' = 1$, $\operatorname{ind} X' = n$, $\operatorname{Ind} Y' = n$, а в качестве X, или же Y, взять дизъюнктное объединение X', или же Y', и m-мерного куба I^m.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. С. Александров:* Некоторые проблемы теоретико-множественной топологии, Матем. сб., 1936, *1* (*43*), 619—634.

[2] *C. H. Dowker:* Local dimension of normal spaces, Quart. J. Math. Oxford (2), 1955, *6*, 101—120.

[3] *О. Локуциевский:* О размерности бикомпактов, Доклады АН СССР, 1949, *67*, № 2, 217—219.

[4] *А. Лунц:* Бикомпакт, индуктивная размерность которого больше, чем размерность, определенная при помощи покрытий, Доклады АН СССР, 1949, *66*, № 5, 801—803.

Summary

ON THE DIMENSION OF COMPACT SPACES

PETR VOPĚNKA, Praha

(Received January 30, 1958)

It is proved (Theorem 2·7) that, *for* $1 \leqq m \leqq n \leqq \infty$, *there exist compact spaces* X, Y *such that* $\dim X = m$, $\operatorname{ind} X = n$, $\dim Y = m$, $\operatorname{Ind} Y = n$ where "dim" denotes the covering dimension, "ind", "Ind" denote the inductive dimensions defined by means of the boundaries of neighbourhoods of points or, respectively, closed sets.

The existence of X, Y follows from Lemma 2·5: *if X is compact,* $\dim X > 0$, *then there exists a compact space* $T \supset X$ *such that* (1)

$$\dim T = \dim X, \operatorname{Ind} T \leqq 2 \operatorname{Ind} X + 1 ;$$

(2) *there exists a point $t \in T$ and a neighbourhood U of t such that, for any neighbourhood $G \subset U$ of t, the boundary of G contains a subset homeomorphic with X.*

To prove the existence of T with these properties, the following construction is used: if X, Y, Z are spaces, f is a continuous mapping of Y onto X, N is an infinite discrete space, then $T(X, Y, Z, f, N)$ denotes the set $X \cup (Y \times N \times Z)$ with an open base consisting of (i) all open subsets of the topological product $Y \times N \times Z$, (ii) all $U \cup (f^{-1}(U) \times (N - K) \times Z)$ with $U \subset X$ open in X, $K \subset N$ finite. A mapping h of a space P into a space Q is called "nearly open" of, for any $y \in h(P)$, there is $x \in f^{-1}(y)$ such that $h(V)$ is a neighbourhood of y in $h(P)$ whenever V is a neighbourhood of X in P; it is shown that every compact space is the image of a zero-dimensional compact space under a nearly open continuous mapping. To obtain T, we put (1) $T' = T(I, C, X, g, M)$ where I denotes the closed interval $\langle 0, 1 \rangle$, C denotes the Cantor discontinuum, g is a continuous mapping of C onto I, M is a countable discrete space, (2) $T = T(T', Y, X, f, N)$ where Y is compact, $\dim Y = 0$, f is a nearly open continuous mapping of Y onto T', N is discrete and its power exceeds both $2^{\aleph_0}$ and the power of X.