Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Švec

L'élément linéaire projectif d'une surface plongée dans l'espace à connexion projective

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 2, 285–291

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100303`

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага.

L'ÉLÉMENT LINÉAIRE PROJECTIF D'UNE SURFACE PLONGÉE DANS L'ESPACE À CONNEXION PROJECTIVE

ALOIS ŠVEC, Liberec

(Reçu le 19 novembre 1957)

Dans ce travail j'étudie l'interprétation géométrique des courbes d'une surface plongée dans l'espace à trois dimensions et à connexion projective, cettes courbes généralisant les courbes de Darboux. On définit les éléments linéaires projectifs, la préservation de ces éléments étant la condition nécessaire et suffisante pour la déformation du second ordre de la surface, ou de sa dualisation.

1. Soit donné une surface P_3 à connexion projective (et à trois dimensions) par les équations fondamentales

$$\mathrm{d}A_i = \omega_i^j A_j\,, \quad \omega_i^i = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3, 4) \tag{1}$$

avec les conditions d'integrabilité ($\omega^\alpha = \omega_0^\alpha$; $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = 1, 2, 3$),

$$\begin{aligned} [\mathrm{d}\omega^\alpha] &= [\omega^\beta(\omega_\beta^0 - \delta_\beta^\alpha \omega_0^0)] - \tfrac{1}{2} R^\alpha_{\gamma\varepsilon}[\omega^\gamma\omega^\varepsilon]\,, \\ [\mathrm{d}\omega_j^i] &= [\omega_k^i \omega_j^k] - \tfrac{1}{2} R^i_{j\gamma\varepsilon}[\omega^\gamma\omega^\varepsilon]\,, \end{aligned} \tag{2}$$

$$R^\alpha_{(\gamma\varepsilon)} = R^i_{j(\gamma\varepsilon)} = 0\,. \tag{3}$$

Dans P_3 soit donnée une surface π par l'équation

$$\omega^3 = 0\,, \tag{4}$$

en la différentiant extérieurement on obtient

$$[\omega^1\omega_1^3] + [\omega^2\omega_2^3] - R^3_{12}[\omega^1\omega^2] = 0\,. \tag{5}$$

En posant $R^3_{12} = 2h$ on peut particulariser le repère de la surface (voir E. Cartan, Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective, Paris 1937, p. 273) de sorte que

$$\omega_1^3 = (1 + h)\,\omega^2\,, \quad \omega_2^3 = (1 - h)\,\omega^1\,, \tag{6}$$

il suit de cela que les asymptotiques sont les courbes $\omega^1\omega^2 = 0$.

Par la différentiation extérieure de (5) on obtient

$$[(\mathrm{d}h + h\overline{\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3})\,\omega^1\omega^2] = 0 \tag{7}$$

de sorte qu'on peut introduire des dérivées partielles covariantes h_1, h_2 et l'on a

$$\mathrm{d}h + h(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) = h_2\omega^1 + h_2\omega^2 \,. \tag{8}$$

En se servant de (8) on obtient par la différentiation extérieure de (6)

$$\begin{aligned} [\omega^1\omega_1^2] - \tfrac{1}{2}[\omega^2(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3)] - 2k_1[\omega^1\omega^2] = 0 \,, \\ - \tfrac{1}{2}[\omega^1(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3)] + [\omega^2\omega_2^1] + 2k_2[\omega^1\omega^2] = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

où les k_1 et k_2 ne m'intéressent pas. Du lemme d'E. Cartan on obtient l'existence de telle fonctions β, γ, ϱ, σ que

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \beta\omega^1 + (\varrho + k_1)\,\omega^2 \,, \\ - \tfrac{1}{2}(\omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3) &= (\varrho - k_1)\,\omega^1 + (\sigma - k_2)\,\omega^2 \,, \\ \omega_2^1 &= (\sigma + k_2)\,\omega^1 + \gamma\omega^2 \,. \end{aligned} \tag{10}$$

D'(11_2) on a $e_0^0 - e_1^1 - e_2^2 + e_3^3 = 0$ de sorte que $\delta h = 0$ et h est l'invariant que j'appelle *torsion de la surface.*

Soit d_1 la différentiation pour $\omega^2 = 0$, soit $\omega_i^j(d_1) = \underset{1}{\omega_i^j}$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_1A_0 &= \underset{1}{\omega_0^0}A_0 + \omega^1A_1 \,, \quad \mathrm{d}_1A_1 = \underset{1}{\omega_1^0}A_0 + \underset{1}{\omega_1^1}A_1 + \beta\omega^1A_2 \,, \\ \mathrm{d}_2A_2 &= \underset{1}{\omega_2^0}A_0 + \underset{1}{\omega_2^1}A_1 + \underset{1}{\omega_2^2}A_2 + (1 - h)\,\omega^1A_3 \,. \end{aligned} \tag{11}$$

De là j'obtiens que la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe asymptotique $\omega^2 = 0$ soit une courbe géodésique est $\beta = 0$. Dans le cas de $\beta \neq 0$ la condition nécessaire et suffisante pour que la courbe asymptotique $\omega^2 = 0$ se développe en une courbe planaire (nécessairement plongée dans le plan tangent) est $h = 1$. D'une manière analogue, j'obtiens la signification géométrique des égalités $\gamma = 0$ et $h = -1$. Dans la suite je ne considère pas ces cas singuliers et je me borne aux cas où

$$\beta\gamma(h^2 - 1) \neq 0 \,. \tag{12}$$

Les formes introduites par E. Cartan sont

$$\Phi = (\omega^1)^2\,\omega_1^2 + (\omega^2)^2\,\omega_2^1 \,, \quad \Psi = \omega^1\omega_1^2\omega_2^2 + \omega^2\omega_2^3\omega_3^1$$

et (mod $(\omega^1)^2\,\omega^2$, $\omega^1(\omega^2)^2$)

$$\Phi_0 = \beta(\omega^1)^3 + \gamma(\omega^2)^3 \,, \tag{13}$$

$$\Psi_0 = (1 - h)\beta(\omega^1)^3 + (1 + h)\,\gamma(\omega^2)^3 \,. \tag{14}$$

Les courbes $\Phi_0 = 0$ et $\Psi_0 = 0$ généralisent les courbes de Darboux; elles ont une signification géométrique que je vais décrire.

2. Je vais définir la dualisation π^* de la surface considérée π. La dualisation π^* sera une variété de König, définie de la manière suivante:

Le domaine des paramètres étant l'ensemble de tous les points de la surface π, à chaque point $A \in \pi$ soit associé (comme l'élément de la variété π^*) le plan tangent à la surface π au point A, l'espace local de ce point soit l'espace de tous les plans de l'espace local d'A. A chaque arc γ de la surface π (entre $\underset{1}{A}$ et $\underset{2}{A}$) soit associée l'homographie existant entre les espaces locaux de l'espaces locaux (aux points $\underset{1}{A}$ et $\underset{2}{A}$) de la surface π, par l'arc même.

Si j'introduis les repères corrélatifs

$$\begin{aligned} E_0 &= [A_1A_2A_3]\,, \quad E_1 = -\,[A_0A_2A_3]\,,\\ E_2 &= [A_0A_1A_3]\,, \quad E_3 = -\,[A_0A_1A_2]\,, \end{aligned}$$

je peux écrire les équations fondamentales de la dualisation:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_3 &= -\,\omega_3^3E_3 - \omega_1^3E_1 - \omega_2^3E_2\,,\\ \mathrm{d}E_1 &= -\,\omega_3^1E_3 - \omega_1^1E_1 - \omega_2^1E_2 - \omega_1E_0\,,\\ \mathrm{d}E_2 &= -\,\omega_3^2E_3 - \omega_1^2E_1 - \omega_2^2E_2 - \omega^2E_0\,,\\ \mathrm{d}E_3 &= -\,\omega_3^0E_3 - \omega_1^0E_1 - \omega_2^0E_2 - \omega_0^0E_0\,. \end{aligned} \tag{15}$$

On peut définir les asymptotiques de la dualisation π^* d'une manière évidente; il existe donc une correspondance asymptotique T entre la surface π et sa dualisation π^* que je vais étudier.

Les homographies tangentes de la correspondance T sont

$$\begin{gathered} KA_0 = E_3\,, \quad KA_1 = \lambda E_3 - (1-h)\,E_2\,,\\ KA_2 = \mu E_3 - (1+h)\,E_1\,, \quad KA_3 = \alpha_3E_3 + \alpha_1E_1 + \alpha_2E_2 + \alpha_0E_0 \end{gathered} \tag{16}$$

où λ, μ, α_i sont arbitraires. On a

$$K\,\mathrm{d}A_0 = \mathrm{d}E_3 + (\omega_0^0 + \omega_3^3 + \lambda\omega^1 + \mu\omega^2)\,E_3\,. \tag{17}$$

Pour une homographie (16) arbitraire il est possible d'introduire les expressions φ_0, φ_1, φ_2 de sorte que l'on ait (mod E_3)

$$K\mathrm{d}^2A_0 = \mathrm{d}^2E_3 + 2(\omega_0^0 + \omega_3^3 + \lambda\omega^1 + \mu\omega^2)\,\mathrm{d}E_3 + \varphi_0E_0 + \varphi_1E_1 + \varphi_2E_2\,. \tag{18}$$

Voici la signification géométrique:

A chaque courbe γ sur π il correspond par T une autre courbe γ^* sur π^*; si je suppose que la courbe considérée ait la tangente t $[A_0, \omega^1A_1 + \omega^2A_2]$, la courbe γ^* a la droite t^* $[E_3, (1+h)\,\omega^2E_1 + (1-h)\,\omega^1E_2]$ pour sa tangente. La droite $[E_3, \varphi_0E_0 + \varphi_1E_1 + \varphi_2E_2]$ est la droite K-linéarisante t' de la direction $\omega^1 : \omega^2$ (cela veut dire de la tangente t ou t^*); elle est indéterminée (les courbes $K\gamma$ et γ^* ayant un contact analytique d'ordre 2) ou coïncide avec t^* ($K\gamma$ et γ^* ont un contact géométrique d'ordre 2) ou t' n'est pas indeterminée et ne coïncide pas avec t^*; t' est l'ensemble de tous les centres des projections, les courbes $K\gamma$ et γ^* ayant un contact analytique d'ordre 2 après une telle projection.

On a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 A_0 \equiv (\mathrm{d}\omega^1 + \omega^1\overline{\omega_0^0 + \omega_1^1} + \omega^2\omega_2^1)\, A_1 + \\
+ (\mathrm{d}\omega^2 + \omega^1\omega_1^2 + \omega^2\overline{\omega_0^0 + \omega_2^2})\, A_2 + 2\omega^1\omega^2 A_0 \quad (\mathrm{mod}\ A_0)\,,
\end{aligned} \tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 E_3 \equiv (-\,\mathrm{d}\omega_1^3 + \omega_1^3\overline{\omega_1^1 + \omega_3^3} + \omega_2^3\omega_1^2)\, E_1 + \\
+ (-\,\mathrm{d}\omega_2^3 + \omega_1^3\omega_2^1 + \omega_2^3\overline{\omega_2^2 + \omega_3^3})\, E_2 + 2\omega^1\omega^2 E_0 \quad (\mathrm{mod}\ E_3)
\end{aligned} \tag{20}
$$

de sorte qu'on a $\varphi_0 = 2(\alpha_0 - 1)\,\omega^1\omega^2$. Je me borne à des telles homographies pour lesquelles $\varphi_0 \equiv 0$ (ou $\alpha_0 = 1$) et qui sont caractérisées géométriquement par le fait que les droites linéarisantes de tous les tangentes t sont elles-aussi des tangents. Par un calcul simple on trouve

$$
\begin{aligned}
\varphi_1 &= -\,2\beta(\omega^1)^2 + (\,.\,)\,\omega^1\omega^2 + (\,.\,)(\omega^2)^2\,, \\
\varphi_2 &= (\,.\,)(\omega^1)^2 + (\,.\,)\,\omega^1\omega^2 - 2\gamma(\omega^2)^2\,.
\end{aligned} \tag{21}
$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les droites t et t' (déterminées plus haut) coïncident est

$$
\begin{aligned}
{}[\omega^1 A_1 + \omega^2 A_2, \varphi_1 E_1 + \varphi_2 E_2] &= \omega^1\varphi_1[A_1E_1] + \omega^2\varphi_2[A_2E_2] = \\
&= (\omega^1\varphi_1 + \omega^2\varphi_2)[A_0A_1A_2A_3] = 0
\end{aligned}
$$

ou

$$
-\,2\beta(\omega^1)^3 + (\,.\,)(\omega^1)^2\,\omega^2 + (\,.\,)\,\omega^1(\omega^2)^2 - 2\gamma(\omega^2)^3 = 0\,. \tag{22}
$$

Les courbes (22) dépendent de l'homographie (16), le lecteur vérifiera facilement l'existence des homographies pour lesquelles les courbes (22) sont apolaires aux courbes asymptotiques; les courbes obtenues sont données par l'équation

$$
\Phi_0 \equiv \beta(\omega^1)^3 + \gamma(\omega^2)^3 = 0\,. \tag{23}
$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les droites t^* et t' coïncident est

$$
(1 + h)\,\omega^2\varphi_2 - (1 - h)\,\omega^1\varphi_1 = 0\,,
$$

ou compte tenu de (12)

$$
(1 - h)\,\beta(\omega^1)^3 + (\,.\,)(\omega^1)^2\,\omega^2 + (\,.\,)\,\omega^1(\omega^2)^2 - (1 + h)\,\gamma(\omega^2)^3 = 0\,; \tag{24}
$$

d'une manière analogue à celle employée plus haut on obtient les courbes

$$
(1 - h)\,\beta(\omega^1)^3 - (1 + h)\,\gamma(\omega^2)^3 = 0\,; \tag{25}
$$

ces courbes peuvent être regardées comme une généralisation des courbes de Segre. Les courbes Φ_0 (où Φ_0 est donné par (13)) sont donc interprétées géométriquement. Le birapport des quatre 3-couches des courbes $(\omega^1)^3 = 0$, $(\omega^2)^3 = 0$, (25) et (23) est

$$
H = \frac{h + 1}{h - 1} \tag{26}
$$

ce qui donne l'interprétation géométrique de la torsion de la surface.

Un rôle important est joué par les courbes

$$\Phi^* \equiv \frac{1-h}{1+h}\,\beta(\omega^1)^3 + \frac{1+h}{1-h}\,\gamma(\omega^2)^3 = 0\,, \tag{27}$$

ces courbes peuvent être regardées comme une autre généralisation des courbes de Darboux. Le birapport des 3-couches $(\omega^1)^3 = 0$, $(\omega^2)^3 = 0$, (23) et (27) est H^{-2}.

3. Outre la surface considérée soit donnée une autre surface π' plongée dans P'_3. Le repère de la surface π' soit particularisé d'une manière analogue au repère de la surface π. Les deux surfaces soient en correspondance asymptotique donnée par les équations

$$\omega^1 = \omega^{1'}\,, \quad \omega^2 = \omega^{2'}\,. \tag{28}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que les surfaces π et π' soient en déformation projective d'ordre 2 est l'existence d'une telle homographie $KA_i = \alpha_i^j A'_j$ que

$$\begin{gathered} KA_0 = A'_0,\ K\,\mathrm{d}A_0 = \mathrm{d}A'_0 + \omega A'_0, \\ K\,\mathrm{d}^2A_0 = \mathrm{d}^2A'_0 + 2\omega\,\mathrm{d}A'_0 + (.)\,A'_0\,. \end{gathered} \tag{29}$$

Les équations $(29_{1,2})$ donnent

$$\begin{gathered} \alpha_0^0 = \alpha_1^1 = \alpha_2^2 = 1\,, \quad \alpha_0^1 = \alpha_0^2 = \alpha_0^3 = \alpha_1^2 = \alpha_1^3 = \alpha_2^1 = \alpha_2^3 = 0\,, \\ \omega = \omega_0^0 - \omega_0^{0'} + \alpha_1^0\omega^1 + \alpha_2^0\omega^2\,. \end{gathered}$$

De l'équation (29_3) j'obtiens en comparant les coefficients auprès de A'_1, A'_2, A'_3

$$\begin{aligned} (t_1 - 2\alpha_1^0)(\omega^1)^2 + (t_2 + 2\alpha_3^1)\,\omega^1\omega^2 + (\gamma - \gamma')(\omega^2)^2 &= 0\,, \\ (\beta - \beta')(\omega^1)^2 + (t_3 - 2\alpha_3^2)\,\omega^1\omega^2 + (t_4 - 2\alpha_2^0)(\omega^2)^2 &= 0\,, \\ (\alpha_3^3 - 1)\,\omega^1\omega^2 &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

où les expressions $t_1, \ldots, t_4$ ne m'intéressent pas. De là s'ensuit que la condition nécessaire et suffisante pour la déformation projective d'ordre 2 des surfaces π et π' est

$$\beta = \beta'\,, \quad \gamma = \gamma'\,. \tag{31}$$

Je vais m'occuper de la déformation projective d'ordre 2 des dualisations π^* et π'^*. J'examine l'existence des homographies $H^*E_i = \beta_i^j E'_j$ pour lesquelles

$$\begin{gathered} H^*E_3 = E'_3,\ H^*\,\mathrm{d}E_3 = \mathrm{d}E'_3 + \omega^* E'_3\,, \\ H^*\,\mathrm{d}^2E_3 = \mathrm{d}^2E'_3 + 2\omega^*\,\mathrm{d}E'_3 + (.)\,E'_3\,. \end{gathered} \tag{32}$$

De (40_2) j'ai

$$\begin{gathered} H^*E_1 = \frac{1+h'}{1+h}\,E'_1 + \beta_1^3E'_3\,, \quad H^*E_2 = \frac{1-h'}{1-h}\,E'_2 + \beta_2^3E'_3\,, \\ \omega^* = \omega_3^{3'} - \omega_3^3 - (1+h)\,\beta_1^3\omega^2 - (1-h)\,\beta_2^3\omega^1\,. \end{gathered}$$

De (32) j'obtiens en comparant les coefficients d' E_1', E_2', E_0'

$$\left(\frac{1+h'}{1+h}\sqrt{1-h}\,\beta - \sqrt{1-h'}\,\beta'\right)(\omega^1)^2 + (t_5 + 2\beta_0^1)\,\omega^1\omega^2 +$$
$$+ (t_6 + 2\sqrt{1+h}\,.\,\sqrt{1+h'}\,\beta_1^3)(\omega^2)^2 = 0\,,$$
$$(t_7 - 2\,.\,\sqrt{1-h}\,.\,\sqrt{1-h'}\,\beta_2^3)(\omega^1)^2 + (t_8 + 2\beta_0^2)\,\omega^1\omega^2 +$$
$$+ \left(\frac{1+h}{1-h}\sqrt{1-h'}\,\gamma - \sqrt{1+h'}\,\gamma'\right)(\omega^2)^2 = 0\,,$$
$$(\beta_0^0 - 1)\,\omega^1\omega^2 = 0\,.$$

où $t_5, \ldots, t_8$ ne m'intéressent pas. De là on constate facilement que la condition nécessaire et suffisante pour que les dualisations π^* et π'^* soient en déformation projective est

$$H^{-1}\beta = H'^{-1}\beta'\,, \quad H\gamma = H'\gamma'\,. \tag{33}$$

En partant des conditions (31) et (33) on trouve par ex.:

Si les surfaces π et π' sont en déformation projective d'ordre 2, la condition nécessaire et suffisante pour que leurs dualisations soient aussi en déformation projective est l'égalité des torsions des deux surfaces considérées.

De (10) il s'ensuit

$$\delta\beta = \beta(2e_1^1 - \epsilon_0^0 - e_2^2)\,, \quad \delta\gamma = \gamma(2e_2^2 - e_0^0 - e_1^1)\,,$$
$$\delta\omega^1 = (e_0^0 - e_1^1)\,\omega^1\,, \quad \delta\omega^2 = (e_0^0 - e_2^2)\,\omega^2$$

de sorte que j'ai pour les formes définies par (13) et (27)

$$\delta\Phi_0 = (2e_0^0 - e_1^1 - e_2^2)\,\Phi_0\,, \quad \delta\Phi^* = (2e_0^0 - e_1^1 - e_2^2)\,\Phi^*\,. \tag{34}$$

De $\delta(\omega^1\omega^2) = (2e_0^0 - e_1^1 - e_2^2)\,\omega^1\omega^2$ j'obtiens que les formes

$$\varphi = \frac{\Phi_0}{2\omega^1\omega^2} = \frac{\beta(\omega^1)^3 + \gamma(\omega^2)^3}{2\omega^1\omega^2}\,, \tag{35}$$

$$\varphi^* = \frac{\Phi^*}{2\omega^1\omega^2} = \frac{(1-h)^2\,\beta(\omega^1)^3 + (1+h)^2\,\gamma(\omega^1)^3}{2(1-h^2)\,\omega^1\omega^2} \tag{36}$$

sont invariantes. La première forme est l'élément linéaire projectif de la surface π, la seconde étant l'élément lin. proj. de la dualisation π^*. La connexité de ces deux formes avec le problème de la déformation projective a été expliquée d'une manière suffisante. Dans le cas d'une surface plongée dans l'espace à connexion projective sans torsion les deux formes coïncident et dans le cas de l'espace projectif plan elles donnent l'élément lin. proj. bien connu.

Dans ce qui précède on a donc expliqué le fait remarqué p. ex. par M. L. Muracchini (Sulla applicabilità proiettiva delle superficie negli spazi à connesione proiettiva à tre dimensioni, Czech. Math. J. *5* (*80*) 1955, p. 282), à savoir que la déformation projective d'ordre 2 conserve le premières courbes de Darboux, mais en général elle ne conserve pas les secondes courbes de Darboux.

M. J. Havelka *a trouvé une faute sérieuse dans le manuscrit de ce Mémoire, je lui adresse mes remercîments. Je tiens à remercier M. le Prof.* J. Klapka *et son séminaire à Brno de l'intérêt avec lequel ils ont suivi mon travail.*

Резюме

ЛИНЕЙНЫЙ ПРОЭКТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Либерец

(Поступило в редакцию 19/XI 1957 г.)

По методам Картана изучается поверхность в трехмерном пространстве проективной связности. Построена ее дуализация, которая в случае плоского пространства совпадает с поверхностью, образованной в двойственном пространстве касательными плоскостями рассматриваемой поверхности; эта дуализация является многообразием Кенига. Между поверхностью и ее дуализацией имеется асимптотическое соответствие; изучение характеристических кривых этого соответствия приводит к выяснению геометрического значения обобщения кривых Дарбу, рассмотренного Картаном. Найдены две инвариантные фóрмы поверхности (35) и (36), равенство которых на двух поверхностях является характеристическим для проективного изгибания второго порядка этих поверхностей, соотв. их дуализаций, и которые в случае поверхности в плоском пространстве сводятся к обычному проективному линейному элементу поверхности.