Czechoslovak Mathematical Journal

Miroslav Katětov

О соотношении между метрической и топологической размерностью

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 2, 163–166

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100291

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Математический институт Чехословацкой Академии наук

Т. *8* (*83*) ПРАГА 23. VI. 1958 г., No 2

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ МЕТРИЧЕСКОЙ И ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТЬЮ

МИРОСЛАВ КАТЕТОВ (Miroslav Katětov), Прага

(Поступило в редакцию 24/VIII 1957 г.)

В статье доказывается, что топологическая размерность (определенная при помощи покрытий) метрического пространства не может превышать его удвоенной метрической размерности.

В работе К. Ситникова [3]*) был дан пример метрического пространства, топологическая размерность которого отличается от метрической: топологически оно двумерно, в смысле метрической размерности одномерно. В той же работе указано, как построить (при $n = 4, 5, \ldots$) пространство, имеющее размерности, соответственно, $n - 1$ и $\left[\frac{n}{2}\right]$.

В настоящей заметке (содержание которой изложено вкратце в сообщении, опубликованном в журнале „*Časopis pro pěstování matematiky*“, 1957, *82*, 367) выводятся неравенства, имеющие место между метрической и топологической размерностью.

Приведем прежде всего некоторые определения и обозначения.

Употребительны различные эквивалентные определения метрической размерности (см. напр. [2], [3], [4]). Остановимся на следующем: метрической размерностью метрического пространства P назовем наименьшее r такое, что для любого $\varepsilon > 0$ существует открытое покрытие пространства P кратности $\leqq r + 1$, состоящее из множеств диаметра $< \varepsilon$; эту размерность мы будем обозначать через $\mu\dim P$.

Метрическая размерность, очевидно, инвариантна по отношению к взаимно однозначным взаимно равномерно непрерывным отображениям, так что, собственно говоря, мы имеем дело с размерностью (одним из возможных определений размерности) метризуемого равномерного пространства. Следует также отметить, что, как вытекает из паракомпактности метричес-

*) Цифры в квадратных скобках означают ссылки на список литературы, приведенный в конце статьи.

кого пространства, в приведенном определении можно, не изменяя его смысла, говорить не о любых открытых покрытиях, а о локально конечных открытых покрытиях.

Топологической размерностью пространства P мы будем, как обычно, называть наименьшее r такое, что в любое конечное открытое покрытие P можно вписать открытое покрытие кратности $\leqq r+1$; эту размерность мы будем обозначать $\dim P$.

Метрику пространства P мы будем обозначать через ϱ; если $a \in P$, $A \subset P$, $B \subset P$, то полагаем $\varrho(a, B) = \inf\limits_{y \in B} \varrho(a, y)$, $\varrho(A, B) = \inf\limits_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \varrho(x, y)$. Если $\mathbf{A}$ — система множеств, то $\bigcup \mathbf{A}$ будет обозначать объединение всех множеств системы $\mathbf{A}$.

Теорема. *Если P метрическое пространство, то*

$$\mu\dim P \leqq \dim P \leqq 2\mu\dim P\,.$$

Доказательство. I. Неравенство $\mu\dim P \leqq \dim P$ вытекает немедленно из известных теорем. Действительно, пусть $n = \dim P$; пусть $\varepsilon > 0$. Обозначим через $\mathbf{A}$ покрытие пространства P, состоящее из всех открытых множеств диаметра $< \varepsilon$. Как известно, метрическое пространство паракомпактно; поэтому в $\mathbf{A}$ можно вписать локально конечное открытое покрытие $\mathbf{B}$. Вследствие того, что $\dim P = n$, в $\mathbf{B}$ можно вписать (см. напр. [1]) открытое покрытие $\mathbf{C}$ кратности $\leqq n+1$; очевидно, $\mathbf{C}$ состоит из множеств диаметра $< \varepsilon$.

II. Докажем теперь, что $\dim P \leqq 2\mu\dim P$. Положим $m = \mu\dim P$. Достаточно доказать, что для любого заданного конечного открытого покрытия $\mathbf{G}$ пространства P существует вписанное в $\mathbf{G}$ открытое покрытие $\mathbf{H}$ кратности $\leqq 2m+1$. По определению метрической размерности, существуют открытые покрытия $\mathbf{A}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, пространства P такие, что любое $U \in \mathbf{A}_k$ имеет диаметр $< 3^{-k}$ и каждое $\mathbf{A}_k$ имеет кратность $\leqq m+1$. Обозначим через $\mathbf{B}_k$ систему тех $U \in \mathbf{A}_k$, для которых $\varrho(U, P - G) > 3^{-k}$ хотя бы для одного $G \in \mathbf{G}$, и положим $V_k = \bigcup \mathbf{B}_k$. Обозначим теперь через C_k множество тех $x \in P$, которые содержатся в $m+1$ множествах системы $\mathbf{B}_k$; положим $F_0 = \emptyset$, $F_1 = \overline{C}_1$, $F_k = \overline{C}_k \cup \overline{V}_{k-1}$ для $k = 2, 3, \ldots$ Обозначим, наконец, для $k = 1, 2, \ldots$ через $\mathbf{H}_k$ систему всех $U - F_{k-1}$, $U \in \mathbf{B}_k$, а через $\mathbf{H}$ — объединение систем $\mathbf{H}_k$.

III. Чтобы показать, что $\mathbf{H}$ имеет требуемые свойства, докажем сначала, что (1) $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k = P$, (2) $\overline{V}_k \subset V_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, (3) $\overline{C}_k \subset V_k$, $k = 1, 2, \ldots$

Возьмем $x \in P$. Тогда $x \in G_0$ для некоторого $G_0 \in \mathbf{G}$. Подобрав k так, чтобы $3^{-k+1} < \varrho(x, P - G_0)$ и взяв $U_0 \in \mathbf{A}_k$ такое, что $x \in U_0$, получаем $\varrho(U_0, P - G_0) < 3^{-k}$, так что $U_0 \in \mathbf{B}_k$, $x \in V_k$. Этим доказано равенство (1).

Пусть $x \in \overline{V}_k$; предположим, что $x \operatorname{non} \in V_{k+1}$. Возьмем $U_0 \in \boldsymbol{A}_{k+1}$ такое, что $x \in U_0$. Так как $U_0 \operatorname{non} \in \boldsymbol{B}_{k+1}$ (иначе бы было $x \in V_{k+1}$), то для любого $G \in \boldsymbol{G}$ имеем $\varrho(U_0, P - G) \leqq 3^{-k-1}$. Ввиду $x \in \overline{V}_k$, имеем $V_k \cap U_0 \neq \emptyset$. Возьмем $y \in V_k \cap U_0$; тогда с одной стороны, ввиду того, что U_0 имеет диаметр $< 3^{-k-1}$, получаем $\varrho(y, P - G) < 2 \cdot 3^{-k-1}$ для любого $G \in \boldsymbol{G}$; с другой стороны, ввиду $y \in V_k$, существует $U_1 \in \boldsymbol{A}_k$ такое, что $y \in U_1$ и для некоторого $G_0 \in \boldsymbol{G}$ имеем $\varrho(U_1, P - G_0) > 3^{-k}$ и, следовательно, $\varrho(y, P - G_0) > 3^{-k}$. Итак, мы получили противоречие, чем и доказано соотношение (2).

Возьмем $x \varepsilon \overline{C}_k$; предположим, что $x \operatorname{non} \in V_k$. Возьмем $U_0 \in \boldsymbol{A}_k$ такое, что $x \in U_0$; очевидно, $U_0 \operatorname{non} \in \boldsymbol{B}_k$. Так как $U_0 \in \boldsymbol{A}_k$, $U_0 \operatorname{non} \in \boldsymbol{B}_k$, а кратность $\boldsymbol{A}_k$ не превышает $m + 1$, то, очевидно, любое $y \in U_0$ лежит не более чем в m множествах из $\boldsymbol{B}_k$; но это невозможно, так как $U_0 \cap C_k \neq \emptyset$. Итак, соотношение (3) доказано.

IV. Полагая $H_k = \bigcup \boldsymbol{H}_k$, имеем, очевидно, $H_k = V_k - F_{k-1}$, из чего, согласно (2) и (3), вытекает $H_1 = V_1$, $H_k \supset V_k - V_{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots$ Следовательно, согласно (1), $\bigcup \boldsymbol{H} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} H_k = P$. Итак, $\boldsymbol{H}$ является открытым покрытием пространства P. Так как системы $\boldsymbol{B}_k$, очевидно, вписаны в $\boldsymbol{G}$, то также система $\boldsymbol{H}$ вписана в $\boldsymbol{G}$.

Возьмем любое $x \in P$; возьмем наименьшее q такое, что $x \in H_q$. Так как $H_k = V_k - F_{k-1}$, а $F_{k-1} \supset \overline{V}_{k-2}$, где $k = 3, 4, \ldots$, то $H_k \subset V_k$, $k = 1, 2, \ldots$, $H_k \cap \overline{V}_{k-2} = \emptyset$, $k = 3, 4, \ldots$; поэтому имеем $x \operatorname{non} \in H_k = \bigcup \boldsymbol{H}_k$ при $k > q + 1$. Если $x \operatorname{non} \in H_{q+1}$, то, очевидно, x лежит только в тех $H \in \boldsymbol{H}$, которые принадлежат системе $\boldsymbol{H}_q$, т. е. не более чем в $m + 1$ множествах системы $\boldsymbol{H}$. Если $x \in \boldsymbol{H}_{q+1}$, то $x \operatorname{non} \in F_q$, $x \operatorname{non} \in C_q$, и потому x лежит самое большее в m множествах из $\boldsymbol{H}_q$ и, следовательно, так как кратность $\boldsymbol{H}_{q+1}$ не превышает $m + 1$, не более чем в $2m + 1$ множествах системы $\boldsymbol{H}$. Итак, мы доказали, что система $\boldsymbol{H}$ имеет кратность $\leqq 2m + 1$. Этим доказательство теоремы закончено.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *C. H. Dowker:* Mapping theorems for non-compact spaces. Amer. Journ. Math., 1947, *69*, 200—242.

[2] *Вл. Егоров:* О метрической размерности точечных множеств. Доклады АН СССР, *112*, 804—805.

[3] *К. Ситников:* Пример двумерного множества в трехмерном евклидовом пространстве, допускающего сколь угодно малые деформации в одномерный полиэдр, и некоторая новая характеристика размерности множеств в евклидовых пространствах. Доклады АН СССР, 1953, *88*, 21—24.

[4] *Ю. Смирнов:* О метрической размерности в смысле П. С. Александрова. Известия АН СССР, сер. матем., 1956, *20*, 679—684.

Summary

ON THE RELATION BETWEEN THE METRIC AND TOPOLOGICAL DIMENSION

MIROSLAV KATĚTOV, Praha

(Received August 24, 1957)

If P is a metric space, then the metric dimension of P (denoted $\mu\dim P$) is the least n such that, for every $\varepsilon > 0$, there exists an open covering $\boldsymbol{U}$ of P consisting of sets of diameter $< \varepsilon$ and such that no $n + 2$ (different) sets from $\boldsymbol{U}$ have a non-void intersection. The covering dimension of a topological space P will be denoted $\dim P$.

Theorem. *For any metric space P,*

$$\mu\dim P \leqq \dim P \leqq 2\mu\dim P .$$

Proof. The inequality $\mu\dim P \leqq \dim P$ follows at once from well known theorems. Put $m = \mu\dim P$. Let a finite open covering $\boldsymbol{G}$ of P be given. There exist open coverings $\boldsymbol{A}_k$ of P such that no $m + 2$ sets from $\boldsymbol{A}_k$ intersect and every $U \in \boldsymbol{A}_k$ has a diameter $< 3^{-k}$. Let $\boldsymbol{B}_k$ consist of all $U \in \boldsymbol{A}_k$ such that, for some $G \in \boldsymbol{G}$, the distance between U and $P - G$ is $> 3^{-k}$, and let V_k denote the sum of all $U \in \boldsymbol{B}_k$. Denoting by C_k the set of all $x \in P$ which are in $m + 1$ sets from $\boldsymbol{B}_k$, let $\boldsymbol{H}$ consist of all $U - \overline{C}_{k-1} \cup \overline{V}_{k-2}$ with $U \in \boldsymbol{B}_k$ (we put, of course $C_0 = \emptyset$, $V_{-1} = V_0 = \emptyset$). It is proved that $\boldsymbol{H}$ is an open refinement of $\boldsymbol{G}$ and no $2m + 2$ sets from $\boldsymbol{H}$ have a non-void intersection.