Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

ÜBER DIE STABILITÄT VON LÖSUNGEN IM TRANSPORTPROBLEM DER LINEAREN PROGRAMMIERUNG

JAROMÍR ABRHAM, Praha

(Eingelangt am 7. März 1957)

In der Arbeit wird der Begriff der Stabilität von Lösungen des Transportproblems eingeführt und es werden gewisse Bedingungen für die Stabilität bewiesen.

1. Einleitung. Im nachfolgenden werden wir uns auf den Begriff des M-Systems und seine Eigenschaften stützen. Um das Lesen der vorgelegten Arbeit zu erleichtern, geben wir hier eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Begriffe und einiger bisher bekannten Ergebnisse.

Ein *M-System* $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ $(m \geqq 1,\ n \geqq 1)$ ist eine geordnete Menge von $m + n$ positiven Zahlen $a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n$, für die die Gleichung $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$ gilt.

Unter der *Lösung* des M-Systems $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ verstehen wir eine beliebige Matrix

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}, & \ldots, & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{m1}, & \ldots, & x_{mn} \end{pmatrix}$$

von Typus m, n, deren Elemente nicht-negativ sind und die Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1, \ldots, m,\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

erfüllen.

Die Lösung X des M-Systems $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ ist *einfach*, wenn sie mit Hilfe der folgenden Methode gebildet werden kann: Man wählt beliebig Indizes i_1, j_1 $(1 \leqq i_1 \leqq m,\ 1 \leqq j_1 \leqq n)$ und setzt $x_{i_1 j_1} = \min(a_{i_1}, b_{j_1})$. Dann studiert man das „kleinere" M-System

$M(a_1, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{j_1-1}, b_{j_1} - a_{i_1}, b_{j_1+1}, \ldots, b_n)$ oder

$M(a_1, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1} - b_{j_1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{j_1-1}, b_{j_1+1}, \ldots, b_n)$ oder

$M(a_1, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{j_1-1}, b_{j_1+1}, \ldots, b_n)$, je nachdem $a_{i_1} < b_{j_1}$

oder $a_{i_1} > b_{j_1}$ oder $a_{i_1} = b_{j_1}$ ist. Für dieses M-System wird die ganze Erwägung wiederholt, bis man zu einem M-System kommt, für welches entweder $m = 1$ oder $n = 1$ gilt; dieses wird dann trivial gelöst.

Es gibt nur endlich viele einfache Lösungen des gegebenen M-Systems. Jede einfache Lösung enthält wenigstens $(m - 1)(n - 1)$ Nullelemente. Die Menge $\mathfrak{M}$ aller Lösungen eines gegebenen M-Systems ist die konvexe Hülle aller einfachen Lösungen.

Die einfache Lösung X von $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ ist *unzerlegbar* oder *zerlegbar*, je nachdem sie gerade $(m - 1)(n - 1)$ oder mehr als $(m - 1)(n - 1)$ Nullelemente enthält.

Das M-System $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ ist *degeneriert*, wenn es solche Indizes $i_1, \ldots, i_p$ $(1 \leqq p < m)$, $j_1, \ldots, j_q$ $(1 \leqq q < n)$ gibt, dass $\sum_{k=1}^{p} a_{i_k} = \sum_{k=1}^{q} b_{j_k}$. $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ ist dann und nur dann ein degeneriertes M-System, wenn es wenigstens eine zerlegbare einfache Lösung besitzt.

Eine Matrix X von Typus m, n $(m \geqq 2, n \geqq 2)$ mit nicht-negativen Elementen heisst *singulär*, wenn sie wenigstens eine Reihe (d. h. eine Zeile oder eine Spalte) mit höchstens einem von Null verschiedenen (und also positiven) Element enthält und wenn jede ihre Submatrix mit wenigstens zwei Zeilen und zwei Spalten dieselbe Eigenschaft ausweist.

Die Lösung X des M-Systems $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ $(m \geqq 2, n \geqq 2)$ ist dann und nur dann einfach, wenn die Matrix X singulär ist. (Diese Behauptung folgt direkt aus der Definition der einfachen Lösung.)

Eine Reihe der Matrix X wird als *singulär* bezeichnet werden, wenn sie höchstens ein von Null verschiedenes Element enthält.

Jeder einfachen Lösung X eines gegebenen M-Systems entspricht eine gewisse Konfiguration ihrer Nullelemente. Die Matrix X ist durch diese Konfiguration eindeutig bestimmt.

Die Lösung X_0 des M-Systems $\mathbf{M} = M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ ist *minimal in Bezug auf die Matrix C* (oder kürzer *C-minimal*), falls

$$(C, X_0) = \min_{X \in \mathfrak{M}} (C, X)$$

gilt, wobei $(C, X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ eine durch C eindeutig bestimmte auf $\mathfrak{M}$ definierte lineare Funktion ist.

Es gibt bekanntlich immer wenigstens eine C-minimale einfache Lösung von $\mathbf{M}$. Die Menge $\mathfrak{N}$ aller C-minimalen Lösungen ist dann offensichtlich die konvexe Hülle aller C-minimalen einfachen Lösungen. Beim Studium der Eigenschaften C-minimaler Lösungen kann man sich also auf die C-minimalen einfachen Lösungen beschränken; von dieser Tatsache werden wir weiter reichlich Gebrauch machen.

Die Beweise der oben angegebenen Ergebnisse sind in [1] zu finden oder sind einfache Folgen der in [1] bewiesenen Sätze. Für die ökonomische Formulierung des Transportproblems wird der Leser z. B. auf die Arbeiten [2] oder [3] hingewiesen.

2. Stabilität der einzelnen Lösung. Es sei $\mathbf{M} = M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ ein fest gegebenes M-System, $X = (x_{ij})$ sei eine beliebige in Bezug auf eine (fest gewählte) Matrix C minimale Lösung von $\mathbf{M}$, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots \beta_n)$ seien reelle Vektoren, die die Bedingungen

$$a_i + \alpha_i > 0,\ i = 1, \ldots, m,\ b_j + \beta_j > 0,\ j = 1, \ldots, n,\ \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \tag{2}$$

erfüllen. Dann kann die folgende Definition eingeführt werden:

Definition. *Eine C-minimale Lösung X von $\mathbf{M}$ heisst stabil, wenn es solche positive Zahlen K_1, K_2 gibt, dass für alle Vektoren $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, für die $\|\boldsymbol{\alpha}\| < K_1$, $\|\boldsymbol{\beta}\| < K_2$ und (2) gilt, solch eine C-minimale Lösung $Y = (y_{ij})$ von $M(a_1 + \alpha_1, \ldots, a_m + \alpha_m; b_1 + \beta_1, \ldots, b_n + \beta_n)$ existiert, dass $y_{ij} = 0$, wenn und nur wenn $x_{ij} = 0$.*

Bemerkung. Die Zahlen K_1, K_2 in des obigen Definition hängen selbstverständlich von der Definition der Norm ab; in dieser Arbeit nehmen wir die durch die Gleichungen $\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|$, $\|\boldsymbol{\beta}\| = \sum_{j=1}^{n} |\beta_j|$ eingeführte Norm an. Für diesen Fall werden wir die Stabilität jeder unzerlegbaren C-minimalen einfachen Lösung beweisen.

Vor dem Beweis des entsprechenden Satzes haben wir noch einige Hilfssätze zu beweisen.

Hilfssatz 1. *Es sei X eine C-minimale einfache Lösung des M-Systems $\mathbf{M} = M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. Die i_0-te Zeile (bzw. die j_1-te Spalte) der Matrix X sei singulär mit dem einzigen positiven Element $x_{i_0 j_0}$ (bzw. $x_{i_1 j_1}$). $\bar{X}$ sei die Matrix, die aus X entsteht, indem die i_0-te Zeile (bzw. die j_1-te Spalte) weggelassen wird. Die Matrix $\bar{C}$ entstehe aus C auf dieselbe Weise wie $\bar{X}$ aus X. Dann ist $\bar{X}$ eine $\bar{C}$-minimale einfache Lösung des M-Systems*
$\bar{\mathbf{M}} = M(a_1, \ldots, a_{i_0-1}, a_{i_0+1}, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{j_0-1}, b_{j_0} - a_{i_0}, b_{j_0+1}, \ldots, b_n)$ (bzw. des M-Systems $M(a_1, \ldots, a_{i_1-1}, a_{i_1} - b_{j_1}, a_{i_1+1}, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_{j_1-1}, b_{j_1+1}, \ldots, b_n)$).

Beweis. Die i_0-te Zeile von X sei singulär; es sei $x_{i_0 j_0} > 0$, $x_{i_0 j} = 0$, $j \neq j_0$. Die Matrix $\bar{X}$ stellt offensichtlich eine einfache Lösung von $\bar{\mathbf{M}}$ dar. Nehmen wir an, dass es so eine Lösung $\bar{Y}$ von $\bar{\mathbf{M}}$ gibt, dass

$$(\bar{C}, \bar{Y}) < (\bar{C}, \bar{X})\,. \tag{3}$$

Es ist klar, dass

$$(C, X) = (\bar{C}, \bar{X}) + c_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0}\,. \tag{4}$$

Die Matrix Y sei nun folgendermassen definiert: $y_{ij} = \bar{y}_{ij}$, $1 \leqq i \leqq i_0 - 1$, $1 \leqq j \leqq n$, $y_{i_0 j} = x_{i_0 j}$, $1 \leqq j \leqq n$, $y_{ij} = \bar{y}_{i-1,j}$, $i_0 + 1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq n$. Y ist offensichtlich eine Lösung von **M**, für die

$$(C, Y) = (\bar{C}, \bar{Y}) + c_{i_0 j_0} x_{i_0 j_0} \tag{5}$$

gilt. Aus (3), (4) und (5) folgt $(C, Y) < (C, X)$, was unseren Annahmen widerspricht. Hat X eine singuläre Spalte, so lässt sich der Beweis analogisch durchführen.

Die unzerlegbare singuläre Matrix wird ähnlich wie die unzerlegbare einfache Lösung eines M-Systems definiert. Dann gilt

Hilfssatz 2. *X sei eine beliebige singuläre und unzerlegbare Matrix von Typus m, n; $\bar{X}$ sei die Matrix, die aus X durch das Weglassen von k singulären Zeilen (Spalten) entsteht ($1 \leqq k \leqq \mu$, wobei durch μ die Zahl aller singulären Zeilen bzw. Spalten bezeichnet ist). Dann ist $\bar{X}$ auch unzerlegbar.*

Beweis. $\bar{X}$ ist von Typus $m - k, n$ bzw. $m, n - k$. Wäre sie zerlegbar, so würde sie wenigstens $(m - k - 1)(n - 1) + 1$ bzw. $(m - 1)(n - k - 1) + 1$ Nullelemente enthalten. Die weggelassenen Reihen enthalten jedoch wenigstens $k(n - 1)$ bzw. $k(m - 1)$ Nullelemente, X müsste also wenigstens $(m - 1)(n - 1) + 1$ Nullelemente enthalten, d. h. sie wäre zerlegbar.

Bemerkung. Aus der gerade bewiesenen Behauptung folgt unmittelbar, dass X keine nur aus Nullelementen zusammengesetzte Reihe enthalten kann.

Hilfssatz 3. *Es sei X_0 eine einfache unzerlegbare Lösung von **M** $= M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$, t sei eine genügend kleine positive Zahl. $x^{(0)}_{i_k j_k}$, $k = 1, \ldots, (m - 1)(n - 1)$ seien sämtliche Nullelemente von X_0. Die Matrizen $X_k = (x^{(k)}_{ij})$, $k = 1, \ldots, (m - 1)(n - 1)$ seien auf folgende Weise definiert: $x^{(k)}_{i_k j_k} = t$, $x^{(k)}_{i_r j_r} = 0$, $r = 1, \ldots, (m - 1)(n - 1)$, $r \neq k$. (Diese Bedingungen bestimmen eindeutig X_k.) Dann sind X_k Lösungen von **M** und die $m \,.\, n$-dimensionalen Vektoren $X_k - X_0$, $k = 1, \ldots, (m - 1)(n - 1)$ sind voneinander linear unabhängig.*

Beweis. Die Gleichungen (1) haben bei fest gewählten $x_{i_r j_r}$, $r = 1, \ldots, (m - 1)(n - 1)$ eine einzige Lösung. Jedes x_{ij} in dieser Lösung ist eine stetige Funktion von $x_{i_r j_r}$, $r = 1, \ldots, (m - 1)(n - 1)$, die im Falle $x_{i_r j_r} = 0$, $r = 1, \ldots, (m - 1)(n - 1)$ positiv ist. Daraus folgt die erste Behauptung. Es seien jetzt $\gamma_1, \ldots, \gamma_{(m-1)(m-1)}$ solche Zahlen, dass $\sum_{k=1}^{(m-1)(n-1)} \gamma_k (X_k - X_0) = \mathbf{0}$, wobei $\mathbf{0}$ eine Nullmatrix von Typus m, n ist. Diese Bedingung stellt ein System von $m \,.\, n$ linearen Gleichungen dar, $\sum_k \gamma_k (x^{(k)}_{ij} - x^{(0)}_{ij}) = 0$. Für $i = i_k$, $j = j_k$ folgt daraus $\gamma_k t = 0 \Rightarrow \gamma_k = 0$. Die lineare Unabhängigkeit ist dadurch bewiesen.

Bemerkung. Aus der soeben bewiesenen Behauptung und der Tatsache, dass das Gleichungssystem (1) den Rang $m + n - 1$ hat, folgt, dass die Dimension der Menge $\mathfrak{M}$ aller Lösungen von $\mathbf{M}$ gleich $(m - 1)(n - 1)$ ist.

Hilfssatz 4. *Falls bei den Bezeichnungen des Hilfssatzes 3 $(C, X_k) \geqq (C, X_0)$ für $k = 1, \ldots, (m - 1)(n - 1)$ gilt, so ist X_0 eine C-minimale Lösung von M.*

Beweis. Y sei eine beliebige Lösung von M. Sie kann eindeutig in der Form $Y = X_0 + \sum_{k=1}^{(m-1)(n-1)} \lambda_k(X_k - X_0)$ ausgedrückt werden. Für die Elemente mit Indizen i_r, j_r ergibt sich aus dieser Bedingung

$$y_{i_r j_r} = x^{(0)}_{i_r j_r} + \sum_k \lambda_k(x^{(k)}_{i_r j_r} - x^{(0)}_{i_r j_r}) = \lambda_r t \Rightarrow \lambda_r \geqq 0,\ r = 1, \ldots, (m - 1)(n - 1).$$

Weiter gilt $(C, Y) = (C, X_0) + \sum_k \lambda_k(C, X_k - X_0) \geqq (C, X_0)$; damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Bemerkung. Die Hilfssätze 3 und 4 stammen von F. Nožička.

Satz 1. *Die Matrix $X = (x_{ij})$ sei eine einfache, unzerlegbare und C-minimale Lösung von $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. Das Symbol $\varrho(X)$ bezeichne das kleinste positive Element von X. $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ seien solche reelle Zahlen, dass*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j\,,\quad \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i| + \sum_{j=1}^{n} |\beta_j| < \varrho(X)\,.$$

Dann gibt es so eine einfache, unzerlegbare und C-minimale Lösung $Y = (y_{ij})$ des M-Systems $M(a_1 + \alpha_1, \ldots, a_m + \alpha_m; b_1 + \beta_1, \ldots, b_n + \beta_n)$, dass $y_{ij} = 0$, wenn und nur wenn $x_{ij} = 0$.

Beweis. Die Behauptung ist offensichtlich für die M-Systeme gültig, für die entweder $m = 1$ oder $n = 1$. Als *Typus* eines M-Systems werden wir weiter den Typus seiner Lösungen bezeichnen. Die Behauptung gelte nun für M-Systeme von Typen g, h, wobei $1 \leqq g \leqq m$, $1 \leqq h \leqq n$ ist; wir werden sie für M-Systeme von Typen $m + 1, n$ und $m, m + 1$ beweisen. Da die beiden Fälle ganz analogisch untersucht werden können, werden wir den Beweis nur für den ersten Fall durchführen.

Es seien also zwei M-Systeme $\mathbf{M} = M(a_1, \ldots, a_{m+1}; b_1, \ldots, b_n)$, $\mathbf{M}' = M(a_1 + \alpha_1, \ldots, a_{m+1} + \alpha_{m+1}; b_1 + \beta_1, \ldots, b_n + \beta_n)$ gegeben. X sei eine einfache, unzerlegbare und C-minimale Lösung von $\mathbf{M}$. Wenn $n = 1$, so gilt der Satz; es sei also $n \geqq 2$. Wir haben zwei Spezialfälle zu unterscheiden.

1. X enthält keine singuläre Zeile. Dann enthält sie wenigstens eine singuläre Spalte. Die Zahl aller singulären Spalten von X bezeichnen wir durch ν $(1 \leqq \nu < n)$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass alle singulären Spalten die ersten ν Stellen in X einnehmen. Es sei weiter $x_{i_j, j} = b_j > 0$, $j = 1, \ldots, \nu$, $x_{ij} = 0$, $i \neq i_j$, $j = 1, \ldots, \nu$. Die Matrix $\bar{X}$, die aus X durch das Weglassen der ersten ν Spalten entsteht, ist (sieh Hilfssätze 1 und 2) eine einfache, unzerlegbare und $\bar{C}$-minimale Lösung von

$M(a_1', \ldots, a_{m+1}'; b_{\nu+1}, \ldots, b_n)$, wobei $\overline{C}$ aus C auf dieselbe Weise wie $\overline{X}$ aus X entsteht und $a_i' = a_i - \sum\limits_{(k,i)} b_k$. (Die Summe $\sum\limits_{(k,i)} b_k$ ist über die in der i-ten Zeile liegenden Werte von $x_{i_k,k} = b_k$ erstreckt.) Die Matrix $\overline{X}$ enthält nun keine singuläre Spalte. Jetzt müssen wir wieder zwei Spezialfälle unterscheiden, je nachdem $\nu = n - 1$ oder $\nu < n - 1$.

a) Es sei $\nu = n - 1$. Dann enthält $\overline{X}$ eine einzige Spalte und der Satz ist für sie gültig. Sie stellt die einzige Lösung von $M(a_1', \ldots, a_{m+1}'; b_n)$ dar. Es ist offensichtlich $x_{in} = a_i' > 0$, $i = 1, \ldots, m + 1$. Es gibt also so eine Lösung $\overline{Y}$ von $M(a_1' + \alpha_1 - \sum\limits_{(k,1)} \beta_k, \ldots, a_{m+1}' + \alpha_{m+1} - \sum\limits_{(k,m+1)} \beta_k; b_n + \beta_n)$, dass $\overline{y}_{in} = a_i' + \alpha_i - \sum\limits_{(k,i)} \beta_k > 0$, sooft $\sum\limits_{i=1}^{m+1} |\alpha_i - \sum\limits_{(k,i)} \beta_k| + |\beta_n| < \varrho(\overline{X})$. Die Matrix Y sei nun auf folgende Weise definiert: $y_{i_j j} = b_j + \beta_j$, $j = 1, \ldots, n - 1$, $y_{ij} = 0$, $i \neq i_j$, $j = 1, \ldots, n - 1$, $y_{in} = \overline{y}_{in}$. Y ist dann offensichtlich eine einfache und unzerlegbare Lösung von $\boldsymbol{M}'$. Wir haben noch zu beweisen, dass Y C-minimal ist. Zu diesem Zweck wählen wir eine genügend kleine positive Zahl t und bilden aus X und Y die Lösungen X_k, Y_k, $k = 1, \ldots, m(n - 1)$ laut der im Hilfssatz 3 beschriebenen Weise. Nach dem Hilfssatz 4 genügt es zu beweisen, dass $(C, Y_k) \geqq (C, Y)$ für $k = 1, \ldots, m(n - 1)$ ist. Es ist offensichtlich $Y_k - Y = X_k - X$. Da X C-minimal ist, haben wir

$$0 \leqq (C, X_k - X) = (C, Y_k - Y) = (C, Y_k) - (C, Y)\,.$$

b) Es sei $\nu < n - 1$. Dann muss $\overline{X}$ wenigstens eine (z. B. die i_0-*te*) singuläre Zeile enthalten; es sei $x_{i_0 j_0} > 0$, $x_{i_0, j} = 0$, $j \neq j_0$, $j = \nu + 1, \ldots, n$. $\overline{\overline{X}}$ (bzw. $\overline{\overline{C}}$) sei die Matrix, die aus $\overline{X}$ (bzw. aus $\overline{C}$) durch das Weglassen der i_0-ten Zeile entsteht. $\overline{\overline{X}}$ stellt dann eine einfache, unzerlegbare und $\overline{\overline{C}}$-minimale Lösung von $M(a_1', \ldots, a_{i_0-1}', a_{i_0+1}', \ldots, a_{m+1}'; b_{\nu+1}, \ldots, b_{j_0-1}, b_{j_0} - a_{i_0}, b_{j_0+1}, \ldots, b_n)$ dar (sieh Hilfssätze 1 und 2). Für $\overline{\overline{X}}$ ist der Induktionsannahme nach der Satz gültig. Es gibt also solch eine einfache, unzerlegbare und $\overline{\overline{C}}$-minimale Lösung $\overline{\overline{Y}}$ von $M(a_1' + \alpha_1 - \sum\limits_{(k,1)} \beta_k, \ldots, a_{i_0-1}' + \alpha_{i_0-1} - \sum\limits_{(k,i_0-1)} \beta_k, a_{i_0+1}' + \alpha_{i_0+1} -$
$- \sum\limits_{(k,i_0+1)} \beta_k, \ldots, a_{m+1}' + \alpha_{m+1} - \sum\limits_{(k,m+1)} \beta_k; b_{\nu+1} + \beta_{\nu+1}, \ldots, b_{j_0-1} + \beta_{j_0-1},$
$b_{j_0} + \beta_{j_0} - a_{i_0}' - \alpha_{i_0}, b_{j_0+1} + \beta_{j_0+1}, \ldots, b_n + \beta_n)$, dass $\overline{\overline{y}}_{ij} = 0 \Longleftrightarrow \overline{\overline{x}}_{ij} = 0$, sooft $\sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{m+1} |\alpha_i - \sum\limits_{(k,i)} \beta_k| + \sum\limits_{\substack{j=\nu+1 \\ j \neq j_0}}^{n} |\beta_j| + |\beta_{j_0} - \alpha_{i_0}| < \varrho(\overline{\overline{X}})$. Diese Ungleichung ist jedoch unter der Bedingung des Satzes offensichtlich erfüllt. Die Matrix Y sei nun folgendermassen definiert: $y_{ij} = \overline{\overline{y}}_{ij}$, $1 \leqq i \leqq i_0$, $j = \nu + 1, \ldots, n$,
$y_{i_0 j_0} = a_{i_0} + \alpha_{i_0}$, $y_{i_0 j} = 0$, $j \neq j_0$, $y_{ij} = \overline{\overline{y}}_{i-1,j}$, $i_0 < i \leqq m + 1$,
$j = \nu + 1, \ldots, n$, $y_{i_j, j} = b_j + \beta_j$, $y_{ij} = 0$, $i \neq i_j$, $i = 1, \ldots, m + 1$, $j = 1, \ldots, \nu$.
Y stellt dann offensichtlich so eine einfache und unzerlegbare Lösung von $\boldsymbol{M}'$

dar, dass $y_{ij} = 0 \Longleftrightarrow x_{ij} = 0$. Die Minimalität von Y wird wie im Falle a) bewiesen.

2. Wenn X wenigstens eine singuläre Zeile enthält, können wir den Beweis so durchführen, als wäre $\nu = 0$. Der Beweis ist also viel einfacher.

Bemerkungen. 1. Aus dem Satz 1 folgt die Stabilität jeder unzerlegbaren einfachen C-minimalen Lösung des gegebenen M-Systems. Die Zahlen K_1, K_2 in der Definition der Stabilität sind so zu wählen, dass $K_1 > 0$, $K_2 > 0$, $K_1 + K_2 \leqq \varrho(X)$.

2. Für einen speziellen Fall lässt sich der soeben bewiesene Satz modifizieren. Es gilt nämlich die folgende leicht beweisbare Behauptung: $\lambda > 0$ sei eine beliebige reelle Zahl, X sei eine beliebige C-minimale Lösung von $M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$. Dann ist λX eine C-minimale Lösung von $M(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_m; \lambda b_1, \ldots, \lambda b_n)$.

3. Für zerlegbare C-minimale Lösungen eines gegebenen M-Systems gilt der Satz 1 nicht; dementsprechende Gegenbeispiele können leicht gebildet werden. Für gewisse hinreichende Bedingungen für die Existenz solcher Lösungen sieh [3].

4. Die Grössen α_i, β_j können auch als Funktionen der Zeit oder Realisationen eines zufälligen Prozesses betrachtet werden, was die Möglichkeit gibt, die sozusagen „dynamische" Stabilität zu studieren.

3. Stabilität aller C-minimalen Lösungen. $\mathfrak{N}$ sei die Menge aller C-minimalen Lösungen eines gegebenen M-Systems. $X^{(k)}$, $k = 1, \ldots, N$ seien alle einfachen Lösungen, die zur Menge $\mathfrak{N}$ gehören. Wenn alle $X^{(k)}$ unzerlegbar sind, sind alle Elemente von $\mathfrak{N}$ stabil und die Konstanten K_1, K_2 aus der Definition der stabilen Lösung können so gewählt werden, dass $K_1 + K_2 \leqq \min\limits_{1 \leqq k \leqq N} \varrho(X^{(k)})$. Ist dies nicht der Fall, so sind alle Lösungen stabil, die zur konvexen Hülle aller C-minimalen, einfachen und unzerlegbaren Lösungen des gegebenen M-Systems gehören. Eine untere Abschätzung der Grösse $\min\limits_{1 \leqq k \leqq N} \varrho(X^{(k)})$ kann für nichtdegenerierte M-Systeme auf Grund des folgenden Satzes berechnet werden.

Satz 2. $\mathbf{M} = M(a_1, \ldots, a_m; b_1, \ldots, b_n)$ *sei ein beliebiges M-System, X sei eine einfache Lösung von* $\mathbf{M}$. *Dann erfüllt jedes von Null verschiedene Element* x_{ij} *von X die Ungleichung*

$$x_{ij} \geqq \min \left| \sum_{k=1}^{p} a_{i_k} - \sum_{s=1}^{q} b_{j_s} \right| ,$$

wobei das Minimum über alle Werte $1 \leqq p \leqq m$, $1 \leqq q \leqq n$, $p + q < m + n$ *und alle p-gliedrigen Kombinationen* $i_1, \ldots, i_p$ *der Zahlen* $1, \ldots, m$ *und alle q-gliedrigen Kombinationen* $j_1, \ldots, j_q$ *der Zahlen* $1, \ldots, n$ *genommen wird.*

Für degenerierte M-Systeme ist der Satz 2 trivial. Für nichtdegenerierte M-Systeme kann der Beweis ähnlich wie beim Satz 1 durch die Induktion durchgeführt werden.

LITERATUR

[1] *F. Nožička;* O jednom minimálním problému v theorii lineárního plánování. — Vervielfätigt im Math. Institut der Tschechosl. Akademie der Wissenschaften, Praha 1956.

[2] *G. B. Dantzig;* Application of the Simplex Method to a Transportation Problem, Activity Analysis of Production and Allocation, ed. by T. C. Koopmans, New York-London, 1951, Chapt. XXIII.

[3] *J. Abrham;* A Note on a Linear Programming Problem, Czechosl. Math. Journal, Praha, *7* (*82*), 1957, 124—129.

Резюме

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ В ТРАНСПОРТНОЙ ПРОБЛЕМЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ЯРОМИР АБРГАМ, (Jaromír Abrham), Прага

(Поступило в редакцию 7/III 1957 г)

Работа опирается на понятия и результаты, приведённые в цитированной работе [1]. Вводится понятие устойчивости решений некоторой M-системы, которые являются минимальными относительно какой-то заданной матрицы C. Доказывается теорема об устойчивости всякого решения, которое является простым и неразложимым; в частности, любое простое C-минимальное решение неразложимой M-системы является устойчивым.