Josef Král; Jiří Marek

Преобразование интеграла Стильтьеса-Лебега

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 1, 86–93

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100279`

Чехословацкий математический журнал, т. 8 (83) 1958, Прага

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНТЕГРАЛА СТИЛЬТЬЕСА-ЛЕБЕГА

ИОСЕФ КРАЛ (Josef Král) и ИРЖИ МАРЕК (Jiří Marek), Прага

(Поступило в редакцию 27/IV 1957 г.)

Из теорем, приведённых в этой статье вытекает, в частности, что формула
$$\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y) \mathrm{d}g(y) = \int_a^b \Phi(f(x)) \mathrm{d}g(f(x))$$
справедлива при достаточно общих предположениях о функциях Φ, g, f.

1. В дальнейшем будет E_1 означать множество всех конечных действительных чисел. Под словом „функция" подразумевается обыкновенно конечная действительная функция одного действительного переменного. Если мы допустим, чтобы функция принимала и бесконечные значения, то всегда подчеркнём это обстоятельство. Арифметические действия над символами $+\infty$, $-\infty$ мы определяем обыкновенным образом.

В частности, мы полагаем $(+\infty) \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0$. Если f — функция в интервале $\langle a, b\rangle$, то R_f [соотв. K_f] означает множество всех точек интервала (a, b), в которых функция f возрастает [соотв. убывает]. Характеристическую функцию множества R_f [соотв. K_f] в интервале $\langle a, b\rangle$ обозначим символом ϱ_f [соотв. $\varkappa_f$]. Пусть, далее, $\eta_f = \varrho_f - \varkappa_f$. Пусть p_f [соотв. n_f, v_f] — положительное [соотв. отрицательное, полное] изменение функции f. В том случае, когда функция f имеет ограниченное изменение на интервале $\langle a, b\rangle$, означают символы p_f, n_f, v_f также соответствующие меры.

2. *Пусть f — непрерывная функция в E_1 и пусть $r, s \in E_1$, $r < s$. Обозначим символом $\Psi_{rs}(x)$ минимум функции $f(t)$ в интервале $x + r \leqq t \leqq x + s$. Тогда $\Psi_{rs}(x)$ является непрерывной функцией переменного x в E_1.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, $x \in E_1$. Если h достаточно мало, то для всех $t \in \langle x + r, x + s\rangle$ выполняется неравенство $|f(t + h) - f(t)| \leqq \varepsilon$. Обозначая μ [соотв. ν] минимум функции $f(t)$ [соотв. $f(t + h)$] в интервале $x + r \leqq t \leqq x + s$, получаем отсюда $|\mu - \nu| \leqq \varepsilon$. Так как $\mu = \Psi_{rs}(x)$ и ν равняется минимуму функции $f(\tau)$ для $x + h + r \leqq \tau \leqq x + h + s$, то $\nu = \Psi_{rs}(x + h)$ и $|\Psi_{rs}(x) - \Psi_{rs}(x + h)| \leqq \varepsilon$.

3. *Пусть f — непрерывная функция в интервале $\langle a, b\rangle$. Тогда R_f, K_f* [1]) *являются множествами $G_{\delta\sigma}$.*

Доказательство. Распространим f на E_1, полагая $f(x) = f(a)$ для $x < a$ и $f(x) = f(b)$ для $x > b$. Пусть R^+ [соотв. R^-] — множество всех $x \in E_1$, в которых f возрастает справа [соотв. слева]. Построим для $r < s$ функцию Ψ_{rs} как в § 2 и положим для $k \in E_1$

$$R^k_{rs} = E[x; f(x) + k < \Psi_{rs}(x)] . \tag{1}$$

Пусть, далее, $\mathbf{R}$ — множество всех положительных рациональных чисел. Нетрудно обнаружить, что имеет место соотношение

$$R^+ = \bigcup_s (\bigcap_{r<s} (\bigcup_k R^k_{rs})) , \quad \text{где} \quad k, r, s \in \mathbf{R} . \tag{2}$$

Так как функция Ψ_{rs} непрерывна, то множества R^k_{rs} открыты и R^+ является множеством $G_{\delta\sigma}$. Подобным образом можно показать, что R^- является тоже множеством $G_{\delta\sigma}$. Отсюда непосредственно вытекает наше утверждение для множества $R_f = R^+ \cap R^-$. Взяв $-f$ вместо f получим, что это утверждение справедливо и для множества K_f.

4. *Пусть f — непрерывная функция с ограниченным изменением на интервале $\langle a, b\rangle$. Напишем R, v вместо R_f, v_f и т. п. Тогда имеет место равенство*

$$p(\langle a, b\rangle - R) = n(\langle a, b\rangle - K) = v(\langle a, b\rangle - (R \cup K)) = 0 . \tag{3}$$

Доказательство. Как мы показали в § 3, множество $\langle a, b\rangle - R$ является борелевским. Пусть F — характеристическая функция этого множества в интервале $\langle a, b\rangle$. Используя теорему из статьи [1] (см. формулу (1) на стр. 93), получаем

$$p(\langle a, b\rangle - R) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}p(x) = \int_{E_1} (\sum_{f(x)=y} F(x)\,\varrho(x))\,\mathrm{d}y . \tag{4}$$

Так как $F(x)\,\varrho(x) = 0$ для $a \leqq x \leqq b$, то из равенства (4) вытекает $p(\langle a, b\rangle - R) = 0$. Взяв $-f$ вместо f получим $n(\langle a, b\rangle - K) = 0$. Наконец, $0 \leqq v(\langle a, b\rangle - (R \cup K)) \leqq p(\langle a, b\rangle - R) + n(\langle a, b\rangle - K) = 0$.

5. Сохраним предположения из § 4.

Пусть F — функция на интервале $\langle a, b\rangle$, которая может принимать и бесконечные значения. Тогда соотношения

$$\int_a^b F(x)\,\varrho(x)\,\mathrm{d}v(x) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}p(x) , \tag{5_1}$$

---

[1]) Определение множеств R_f, K_f см. в § 1; в том же параграфе определены символы p_f, v_f и т. п.

$$\int_a^b F(x)\,\varkappa(x)\,\mathrm{d}v(x) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}n(x)\,, \tag{5_2}$$

$$\int_a^b F(x)\,\eta(x)\,\mathrm{d}v(x) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}f(x) \tag{5_3}$$

справедливы в следующем смысле: Если существует (конечный или бесконечный) интеграл Стильтьеса-Лебега в одной части равенства, то существуют и равны между собой оба интеграла, встречающиеся в данном соотношении.

Доказательство. Из § 4 вытекает $p(\langle a, b\rangle - R) = n(R) = 0$. Отсюда получаем

$$\int_a^b F\,\mathrm{d}p = \int_R F\,\mathrm{d}p + \int_R F\,\mathrm{d}n = \int_R F\,\mathrm{d}v = \int_a^b F\varrho\,\mathrm{d}v\,,$$

как только существует один из интегралов, выступающих в равенстве (5_1). Подобным образом доказывается соотношение (5_2). Вычитая (5_2) из (5_1) получаем (5_3).

Замечание. Если понимать производные в смысле теории меры (см. [2], § 32, стр. 132), то из (5_1), (5_2) вытекает

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v} = \varrho\,, \qquad \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}v} = \varkappa\,. \tag{6}$$

6. Условимся ещё в следующих обозначениях: *Если φ — функция в интервале $\langle a, b\rangle$ и $y \in E_1$, то $N_\varphi(y)$ равняется числу точек множества $\varphi^{-1}(y)$ (если это множество бесконечно, то полагаем $N_\varphi(y) = +\infty$). В дальнейшем f будет всегда означать непрерывную функцию в интервале $\langle a, b\rangle$, g — непрерывную функцию в интервале $\langle \alpha, \beta\rangle = f(\langle a, b\rangle)$. Будем писать $\tilde{v}$, $\tilde{N}$, $\tilde{\eta}$ вместо $v_{g(f)}$, $N_{g(f)}$, $\eta_{g(f)}$.*

7. a) *Если полное изменение функции g на интервале $\langle \alpha, \beta\rangle$ бесконечно, то бесконечно тоже полное изменение сложной функции $g(f)$ на интервале $\langle a, b\rangle$.*

b) *Если g — функция с ограниченным изменением на интервале $\langle \alpha, \beta\rangle$, то имеет место равенство*

$$\tilde{v}(\langle a, b\rangle) = \int_\alpha^\beta N_f(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $y \in E_1$. Тогда число точек множества $(g(f))^{-1}(y) = f^{-1}(g^{-1}(y))$ не меньше чем число точек множества $g^{-1}(y)$. Другими словами, $\tilde{N}(y) \geqq N_g(y)$. Интегрируя это неравенство в пределах от $-\infty$ до $+\infty$, получаем в силу известной теоремы С. Банаха (см. [3], теорема (6.4), стр. 280)

$$\tilde{v}(\langle a, b\rangle) \geqq v_g(\langle \alpha, \beta\rangle)\,. \tag{8}$$

Отсюда непосредственно вытекает утверждение a). Предположим теперь, что функция g имеет ограниченное изменение на интервале $\langle\alpha, \beta\rangle$ и приступим к доказательству утверждения b). Разделим интервал $\langle a, b\rangle$ на 2^n равных частей, вставив между a и b точки деления $x_k = a + k\dfrac{b-a}{2^n}$ ($0 \leqq k \leqq 2^n$, n — натуральное). Обозначим символом L_k^n характеристическую функцию множества $f(\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle) = \langle y_{k-1}^n, y_k^n\rangle$ и положим $N^n = \sum_{k=1}^{2^n} L_k^n$. Тогда $N^n(y)$ ($y \in E_1$) равняется числу тех интервалов $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$, которые содержат хоть одну точку множества $f^{-1}(y)$. Положим ещё $D_n = \{x_0^n, x_1^n, \ldots, x_{2^n}^n\}$, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Множество $f(D)$ счётно, и нетрудно обнаружить, что для $y \in E_1 - f(D)$ выполняется соотношение $N^n(y) \nearrow N_f(y)$ $(n \to \infty)$.[2]) Отсюда видно, что N_f измерима в смысле Бореля и что имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta N^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_\alpha^\beta N_f(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,. \tag{9}$$

Подставляя в соотношение (8) $\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle$ вместо $\langle a, b\rangle$ и $\langle y_{k-1}^n, y_k^n\rangle$ вместо $\langle\alpha, \beta\rangle$, получаем неравенства $\tilde{v}(\langle x_{k-1}^n, x_k^n\rangle) \geqq v_g(\langle y_{k-1}^n, y_k^n\rangle)(1 \leqq k \leqq 2^n)$. Отсюда вытекает

$$\tilde{v}(\langle a, b\rangle) \geqq \sum_{k=1}^{2^n} v_g(\langle y_{k-1}^n, y_k^n\rangle) = \sum_{k=1}^{2^n} \int_\alpha^\beta L_k^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_\alpha^\beta N^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,.$$

Используя (9), имеем

$$\tilde{v}(\langle a, b\rangle) \geqq \int_\alpha^\beta N_f(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,. \tag{10}$$

Положим теперь $S_n = \sum_{k=1}^{2^n} \left|g(f(x_{k-1}^n)) - g(f(x_k^n))\right|$. Так как функция $g(f)$ непрерывна в $\langle a, b\rangle$, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \tilde{v}(\langle a, b\rangle)\,. \tag{11}$$

Далее, $|g(f(x_{k-1}^n)) - g(f(x_k^n))| \leqq v_g(\langle y_{k-1}^n, y_k^n\rangle) = \int_\alpha^\beta L_k^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y)$ для $k = 1, \ldots, 2^n$, так что

$$S_n \leqq \sum_{k=1}^{2^n} \int_\alpha^\beta L_k^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_\alpha^\beta N^n(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,.$$

Это неравенство вместе с (11) и (9) даёт

$$\tilde{v}(\langle a, b\rangle) \leqq \int_\alpha^\beta N_f(y)\,\mathrm{d}v_g(y)\,. \tag{12}$$

Из (12) и (10) вытекает (7).

---

[2]) Этим разумеется, что $N^1(y) \leqq N^2(y) \leqq \ldots \leqq N^n(y) \leqq N^{n+1}(y) \leqq \ldots$ и $\lim_{n\to\infty} N^n(y) = N_f(y)$. Сравни [3], доказательство т. (6.4), стр. 280.

8. *Пусть F — функция в интервале $\langle a, b\rangle$, которая может принимать и бесконечные значения.*

Тогда имеет место равенство

$$\int_{\alpha}^{\beta}\Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\Big)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}\tilde{v}(x) \tag{13}$$

в предположении, что существует интеграл в правой части этого равенства.[3])

Доказательство. Эту теорему можно вывести из утверждения b) в § 7 методом, которым воспользовался Ян Маржик в статье [1] при доказательстве подобной формулы (1) на стр. 93. Поэтому лишь наметим главную идею доказательства, отсылая читателя в подробностях к упомянутой статье [1].

Предположим, что функция $g(f)$ имеет ограниченное изменение на интервале $\langle a, b\rangle$. Тогда из § 7 вытекает, что функция g имеет ограниченное изменение на интервале $\langle \alpha, \beta\rangle$ и что множество $f^{-1}(y)$ конечно для v_g-почти всех $y \in \langle \alpha, \beta\rangle$ (значит, если F — конечная функция, то сумма $\sum_{f(x)=y} F(x)$ имеет смысл v_g-почти всюду). При помощи утверждения b) из § 7 (которое мы применим к интервалам, содержащимся в $\langle a, b\rangle$) легко проверить, что соотношение (13) удовлетворяется, если F — характеристическая функция какого-нибудь интервала $I \subset \langle a, b\rangle$. Образуя линейные комбинации и предельные переходы (используя совместно соотношение (7) и теорему о приближении интегрируемой функции при помощи функций второго класса Бера), мы обнаружим постепенно, что равенство (13) выполняется, если F — 1. ступенчатая функция (то есть линейная комбинация характеристических функций интервалов, содержащихся в $\langle a, b\rangle$), 2. непрерывная функция, 3. ограниченная функция второго класса Бера, 4. ограниченная $\tilde{v}$-измеримая функция, 5. неотрицательная $\tilde{v}$-измеримая функция, 6. такая функция, что интеграл в правой части равенства (13) существует.

9. *Пусть F — функция в интервале $\langle a, b\rangle$, которая может принимать и бесконечные значения. Тогда имеет место равенство*

$$\int_{\alpha}^{\beta}\Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta_f(x)\Big)\mathrm{d}g(y) = \int_a^b F(x)\mathrm{d}g(f(x)) \tag{14}$$

в предположении, что существует интеграл в правой части этого равенства.[3])

---

[3]) Это надо понимать следующим образом: Если существует (конечный или бесконечный) интеграл Стильтьеса-Лебега в правой части (в этом требовании заключается, в частности, предположение, что функция $g(f)$ имеет ограниченное изменение на интервале $\langle a, b\rangle$, так что множество $f^{-1}(y)$ конечно для v_g-почти всех $y \in \langle \alpha, \beta\rangle$), то сумма под знаком интеграла в левой части имеет смысл для v_g-почти всех $y \in \langle \alpha, \beta\rangle$, существует интеграл в левой части и равен интегралу в правой части.

Доказательство. Предположим, что существует интеграл в правой части равенства (14). Используя формулу (5_3) (где напишем $g(f)$ вместо f) и утверждение из § 8, имеем

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}g(f(x)) = \int_a^b F(x)\,\tilde{\eta}(x)\,\mathrm{d}\tilde{v}(x) = \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\tilde{\eta}(x)\Big)\,\mathrm{d}v_g(y)\,. \tag{15}$$

Положим $L = E[y;\, y \in \langle\alpha, \beta\rangle,\, N_f(y) = +\infty]$. Так как функция $g(f)$ имеет ограниченное изменение на интервале $\langle a, b\rangle$, то из (7) вытекает $v_g(L) = 0$. Пусть, далее, A — множество всех точек из (a, b), в которых функция f имеет экстремум. Множество $f(A)$ счётно, так что множество $M = L \cup f(A) \cup \{f(a), f(b)\}$ имеет опять v_g-меру равную нулю. Очевидно, справедлива импликация

$$(x \in \langle a, b\rangle,\ f(x) \operatorname{non} \in M) \Rightarrow \eta_f(x) \neq 0\,. \tag{16}$$

Положим, наконец, $P = (R_g \cup K_g) - M$.[1]) Используя утверждение из § 4 (где напишем g вместо f, $\langle\alpha, \beta\rangle$ вместо $\langle a, b\rangle$), имеем $v_g(\langle\alpha, \beta\rangle - P) = 0$. Если $x \in \langle a, b\rangle$, $f(x) = y \in P$, то $\eta_f(x) \neq 0$ (см. (16)), $\eta_g(y) \neq 0$ и имеет место равенство $\eta_f(x)\,.\,\eta_g(y) = \tilde{\eta}(x)$, как легко видеть. По теореме из § 5 имеем

$$\int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\tilde{\eta}(x)\Big)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_P \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta_f(x)\,\eta_g(y)\Big)\,\mathrm{d}v_g(y) =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta_f(x)\Big)\,\eta_g(y)\,\mathrm{d}v_g(y) = \int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta_f(x)\Big)\,\mathrm{d}g(y)\,.$$

Отсюда и из (15) вытекает (14).

Замечание. Полагая в формуле (14) $g(y) = y$ для $\alpha \leqq y \leqq \beta$, получаем (напишем $\eta = \eta_f$)

$$\int_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} F(x)\,\eta(x)\Big)\,\mathrm{d}y = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}f(x)\,. \tag{17}$$

Это формула (3) из статьи [1], стр. 93. Как надо понимать равенство (17), объяснено в подстрочном замечании[3]); разумеется, теперь $g(f) = f$ и v_g — обыкновенная лебеговская мера.

Предположим теперь, что функция f имеет ограниченное изменение на интервале $\langle a, b\rangle$. Пусть D — множество всех точек из (a, b), в которых не существует производная функции f (конечная ни бесконечная). Из известных теорем теории функций действительного переменного [см., напр., [3], гл. IX, § 6, теоремы (6.2) и (6.4)] вытекает, что множество $f(D)$ имеет меру нуль. Положим ещё $D_0 = E[x;\, x \in (a, b),\ f'(x) = 0]$. Покажем, что множество $f(D_0)$ имеет тоже меру нуль. Итак, пусть ε — произвольное положительное число. Поставим в соответствие каждому $x \in D_0$ положительное число h_x $(0 < h_x < b - x)$ так, чтобы выполнялась импликация

$$x < y \leqq x + h_x \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqq \varepsilon(y - x)\,. \tag{18}$$

Тогда система всех интервалов вида

$$\langle f(x) - \varepsilon(y - x), f(x) + \varepsilon(y - x)\rangle \ (x \in D_0, x < y \leqq x + h_x)$$

покрывает, очевидно, множество $f(D_0)$ в смысле Витали. Значит, из этой системы можно извлечь счётную (или конечную) подсистему непересекающихся интервалов $I_1, I_2, \ldots$, покрывающую $f(D_0)$ с точностью до множества меры нуль. Если положить

$I_n = \langle f(x_n) - \varepsilon(y_n - x_n), f(x_n) + \varepsilon(y_n - x_n)\rangle$, то из (18) видно, что

$f(\langle x_n, y_n\rangle) \subset I_n$. Итак, система интервалов $\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \ldots$ является тоже системой без пересечений, и внешняя мера множества $f(D_0)$ не больше чем $2\varepsilon(b - a)$.

Для $x \in (a, b) - (D \cup D_0)$ имеем $\eta(x) = \operatorname{sgn} f'(x)$ [4].) Так как множество $f(D \cup D_0)$ имеет меру нуль, то отсюда видно, что в формуле (17) можно заменить функцию $\eta(x)$ функцией $\operatorname{sgn} f'(x)$.

10. *Пусть Φ — функция в интервале $\langle \alpha, \beta\rangle$, которая может принимать и бесконечные значения. Тогда соотношение*

$$\int\limits_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\,\mathrm{d}g(y) = \int\limits_a^b \Phi(f(x))\,\mathrm{d}g(f(x)) \tag{19}$$

справедливо в следующем смысле: Если существует интеграл в правой части, то существует тоже интеграл в левой части и имеет место равенство.

Доказательство. Применяя формулу (14) к функции $F(x) = \Phi(f(x))$, получаем

$$\int\limits_a^b \Phi(f(x))\,\mathrm{d}g(f(x)) = \int\limits_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} \Phi(f(x))\,\eta_f(x)\Big)\,\mathrm{d}g(y) = \int\limits_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} \eta_f(x)\Big)\,\Phi(y)\,\mathrm{d}g(y)\,. \tag{20}$$

Построим теперь множество M как в доказательстве из § 9; имеем

$v_g(M) = 0$. Если $y \in \langle \alpha, \beta\rangle - M$, то множество $f^{-1}(y)$ конечно и $\eta_f(x) \neq 0$ для всех $x \in f^{-1}(y)$. Далее нетрудно обнаружить, что

$$\sum_{f(x)=y} \eta_f(x) = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sgn}(f(b) - y) - \operatorname{sgn}(f(a) - y))$$

(см. [1], формула (8), стр. 94). Отсюда вытекает

$$\int\limits_\alpha^\beta \Big(\sum_{f(x)=y} \eta_f(x)\Big)\,\Phi(y)\,\mathrm{d}g(y) = \int\limits_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\,\mathrm{d}g(y)\,,$$

что вместе с (20) даёт (19).

---

[4]) Мы пишем $\operatorname{sgn}(+\infty) = 1$, $\operatorname{sgn}(-\infty) = -1$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Ян Маржик* (Jan Mařík): Преобразование одномерных интегралов, Čas. pro pěst. mat., *82* (1957), 93—98.

[2] *П. Халмош*: Теория меры, Москва 1953 (перевод с английского: P. Halmos, Measure Theory).

[3] *S. Saks:* Theory of the integral, New York, 1936.

Zusammenfassung

TRANSFORMATION DES LEBESGUE-STIELTJESSCHEN INTEGRALS

JOSEF KRÁL und JIŘÍ MAREK, Praha

(Eingelangt am 27. IV. 1957)

Aus den Behauptungen, welche in vorlegender Behandlung beweist sind, folgt insbesonders der Satz:

Sei $f(x)$ eine auf einem Segment $\langle a, b\rangle$ definierte stetige Funktion und sei $g(x)$ stetige Funktion auf dem Segment $\langle \alpha, \beta\rangle = f(\langle a, b\rangle)$, wobei beide Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ endlich sind.

Und sei $\Phi(y)$ eine auf dem Segment $\langle \alpha, \beta\rangle$ gegebene Funktion, die auch unendlich sein kann. Nehmen wir an, dass Lebesgue-Stieltjessches Integral

$$\int_a^b \Phi(f(x))\, \mathrm{d}g(f(x))$$

existiert.

Dann existiert auch Lebesgue-Stieltjessches Integral $\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\, \mathrm{d}g(y)$ und gilt die Gleichung

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \Phi(y)\, \mathrm{d}g(y) = \int_a^b \Phi(f(x))\, \mathrm{d}g(f(x))\,.$$