Václav Havel

Eine Bemerkung zum Staudtschen Satz in der Moufang-Ebene

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 2, 314–317

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100250

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

EINE BEMERKUNG ZUM STAUDTSCHEN SATZ IN DER MOUFANG-EBENE

VÁCLAV HAVEL, Praha.

(Eingelangt 28. XI. 1956.)

Die Bemerkung enthält die Korrektur eines Fehlers im Artikel des Verfassers „On the theorem of Staudt in Moufang plane". Das Ziel der Bemerkung ist es, zu zeigen, dass das Hauptresultat des erwähnten Artikels im wesentlichen richtig bleibt.

L. A. Skornjakov[1]) hat in der Arbeit [2] des Verfassers einen Fehler entdeckt, indem er eine Cayley-Dickson-Algebra zur Konstruktion eines solchen Jordan-Homomorphismus gebraucht hat, der das Produkt weder direkt noch indirekt reproduziert. Es wird aber gezeigt werden, dass das Hauptresultat der Arbeit [2] durch diesen Fehler im wesentlichen nicht beeinträchtigt wird.

Behauptung 1. *Es sei σ eine Abbildung des Alternativringes A in den Alternativring B, die folgende Identitäten erfüllt:*

$$(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma \,, \tag{1}$$

$$(x^2)^\sigma = (x^\sigma)^2 \,. \tag{2}$$

Dann gilt auch die Identität

$$(xy + yx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma \,. \tag{3}$$

Beweis. Aus der Gleichung $xy + yx = (x + y)^2 - x^2 - y^2$ ergibt sich wegen (1) und (2): $(xy + yx)^\sigma = (x^\sigma + y^\sigma)^2 - (x^\sigma)^2 - (y^\sigma)^2 = x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma$.

Behauptung 2. *Es sei σ eine Abbildung des Alternativringes A in den Alternativring B der Charakteristik $\neq 2$, die die Identitäten* (1) *und* (3) *erfüllt. Dann gilt die Identität* (2) *und weiter auch die Identität*

$$(xyx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma x^\sigma \,. \tag{4}$$

Beweis. Setzt man in (1) $x = y = v^2$ ein, dann ergibt sich $(2v^2)^\sigma = 2(v^2)^\sigma$. Setzt man weiter in (3) $x = y = v$ ein, so bekommt man $(2v^2)^\sigma = 2(v^\sigma)^2$.

[1]) Реферативный журнал 1956, Nr. *9*, 6833, S. 100.

Wegen der Charakteristik $\neq 2$ ist also $(v^2)^\sigma = (v^\sigma)^2$. Damit ist die Identität (2) bewiesen.

Weiter wendet man die Gleichung $2(xyx) = ((xy + yx)\,x + x(xy + yx)) - (xy^2 + yx^2)$ an. Mit Hilfe von (1), (2) und (3) folgt aus dieser Gleichung: $2(xyx)^\sigma = (2(xyx))^\sigma = (xy + yx)^\sigma\, x^\tau + x^\tau(xy + yx)^\sigma - (x^2)^\sigma y^\sigma - y^\sigma(x^2)^\sigma = (x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma)\, x^\sigma + x^\sigma(x^\tau y^\sigma + y^\sigma x^\sigma) - (x^\sigma)^2\, y^\sigma - y^\sigma(x^\sigma)^2 = 2(x^\sigma y^\sigma x^\sigma)$. Wegen der Charakteristik $\neq 2$ ist also $(xyx)^\sigma = x^\tau y^\sigma x^\sigma$, was zu beweisen war.

Aus den Behauptungen 1 und 2 ergibt sich die Richtigkeit des Satzes 3 [2] für Alternativringe.

Damit man den Beweis des Satzes 1 [3] auch auf die Alternativringe übertragen kann, ist die Identität $((ab)c + c(ba))^\sigma = (a^\sigma b^\sigma)\, c^\sigma + c^\sigma(b^\sigma a^\sigma)$ nötig, und nicht die Identitäten $(a(bc) + c(ba))^\sigma = a^\sigma(b^\sigma c^\sigma) + c^\sigma(b^\sigma a^\sigma)$, $((ab)\,c + (cb)\,a)^\sigma = (a^\sigma b^\sigma)\,c^\sigma + (c^\sigma b^\sigma)\,a^\sigma$, wie fälschlicherweise in [2] nach der Formulation des Satzes 1 behauptet wird. Nach L. A. Skornjakov existiert nämlich eine solche Abbildung σ eines Alternativkörpers A auf sich, die zwar die Identitäten (1) und (3), aber weder die Gleichung $(xy)^\sigma = x^\sigma y^\sigma$, noch die Gleichung $(xy)^\sigma = y^\sigma x^\sigma$ identisch erfüllt. In diesem Falle ist die Gleichung $((ab)\,c + c(ba)) = (a^\sigma b^\sigma)\,c^\sigma + c^\sigma(b^\sigma a^\sigma)$ in A nicht identisch erfüllt.

Jetzt soll das Hauptresultat des Artikels [2] in einer berichtigten Gestalt formuliert und bewiesen werden.

Behauptung 3. *Wenn die Punktabbildung σ der in einer Moufang-Ebene mit Charakteristik $\neq 2$ liegenden Geraden $(y = 0)$ auf sich harmonische Punktquadrupel reproduziert und die Punkte $(0, 0)$, $(1, 0)$ und den uneigentlichen Punkt X_∞ nicht ändert, dann erfüllt σ die Gleichungen (1), (2), (3) und (4), die identisch im Koordinatenalternativkörper gelten.*[2])

Beweis. a) Setzt man voraus, dass die Punkte $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(c, 0)$, $(0, 0)$ ein harmonisches Quadrupel bilden, wobei $a + b \neq 0$. Dann gilt die Gleichung $-(a - c)^{-1}\, a = (b - c)^{-1}\, b$ [3]) und aus dieser Gleichung gewinnt man nach einer kurzen Berechnung $c = 2(a(a + b)^{-1}\, b)$. Es ist auch $c^\sigma = 2(a^\sigma \,.\, (a^\sigma + b^\tau)^{-1}\, b^\sigma)$, da auch die Punkte $(a^\sigma, 0)$, $(b^\sigma, 0)$, $(c^\sigma, 0)$, $(0, 0)$ ein harmonisches Quadrupel bilden. Für die Elemente a und b, die von 0 verschieden sind und die Bedingung $a + b \neq 0$ erfüllen, gilt also die Gleichung

$$(2(a(a + b)^{-1}\, b))^\tau = 2(a^\sigma(a^\sigma + b^\sigma)^{-1}\, b^\sigma)\,. \tag{5}$$

b) Setzt man weiter voraus, dass die Punkte $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(c, 0)$, X_∞ ein harmonisches Quadrupel bilden, so ist $c = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ [4]). Es gilt aber auch

[2]) Der Begriff der Moufang-Ebene ist in [4], S. 186 eingeführt.

[3]) Siehe [1] Formel (3) und die daraus folgende Gleichung $-(a - c)^{-1}\,(a - d) = (b - c)^{-1}\,(b - d)$.

[4]) [1] Lehrsatz 5.

$c^\sigma = \frac{1}{2}a^\sigma + \frac{1}{2}b^\sigma$, weil die Punkte $(a^\sigma, 0)$, $(b^\sigma, 0)$, $(c^\sigma, 0)$, X_∞ auch ein harmonisches Quadrupel bilden. Es gilt also die Identität

$$(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b)^\sigma = \tfrac{1}{2}a^\sigma + \tfrac{1}{2}b^\sigma \,. \tag{6}$$

(Die Richtigkeit für $a = 0$ oder $b = 0$ ist klar. Voraussetzungsgemäss ist nämlich $0^\sigma = 0$.)

c) Die Quadrupel $(d, 0)$, X_∞, $(2d, 0)$, $(0, 0)$, bzw. $(d^\sigma, 0)$, X_∞, $((2d^\sigma), 0)$, $(0, 0)$ sind offenbar harmonisch. Also $(2d)^\sigma = 2d^\sigma$ und aus (6) ergibt sich sofort die Identität $(a + b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$, also die Identität (1).

d) Setzt man in (1) $x = 2a$, $y = -2a^2$ ein, so erhält man

$$(2a - 2a^2)^\sigma = 2a^\sigma - 2(a^2)^\sigma \,. \tag{7}$$

Setzt man weiter in (5) $a \neq 0$; $b = 1 - a$, so ist auch $a + b \neq 0$, und also

$$(2a(1 - a))^\sigma = 2a^\sigma(1 - a^\sigma) \,. \tag{8}$$

Die Richtigkeit der Gleichungen $(0^2)^\sigma = (0^\sigma)^2$, $(1^2)^\sigma = (1^\sigma)^2$ folgt augenblicklich aus $0^\sigma = 0$, $1^\sigma = 1$. Aus (7), (8) und aus $(0^2)^\sigma = (0^\sigma)^2$, $(1^2)^\sigma = (1^\sigma)^2$ gewinnt man die Identität $(a^2)^\sigma = (a^\sigma)^2$, also die Identität (2). Der Rest des Beweises folgt nun aus den Behauptungen 1 und 2.

Behauptung 4. *Die Abbildung σ des Alternativkörpers A der Charakteristik $\neq 2$ auf sich, die die Identitäten* (1), (2), (3), (4) *erfüllt, reproduziert alle harmonischen Quadrupel auf der Geraden* $(y = 0)$ *der zugeordneten Moufang-Ebene.*

Beweis. Aus (2) gewinnt man $0^\sigma = (0^\sigma)^2$, $1^\sigma = (1^\sigma)^2$, indem man $x = 0$, bzw. $x = 1$ einsetzt. Aus (1) folgt für $x = y = 0$: $0^\sigma = 2 \,.\, 0^\sigma$ und $0^\sigma = 0$. Aus der Gleichung $1^\sigma = (1^\sigma)^2$ folgt entweder $1^\sigma = 0$ oder $1^\sigma = 1$. Weil σ umkehrbar ist, so ist $1^\sigma = 1$. Setzt man nun in (4) $x \neq 0$, $y = x^{-1}$ ein, so erhält man $x^\sigma = x^\sigma(x^{-1})^\sigma x^\sigma$; aus dieser Gleichung folgt weiter $1 = (x^{-1})^\sigma x^\sigma$ und

$$(x^\sigma)^{-1} = (x^{-1})^\sigma \quad \text{für} \quad x \neq 0 \,. \tag{9}$$

Mit Hilfe von (1) und (9) lässt sich jetzt leicht die Reproduzierung der Gleichungen $2c = a + b$, bzw. $2(a - b)^{-1} = (a - c)^{-1} + (a - d)^{-1}$ beweisen, die für die Quadrupel $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(c, 0)$, X_∞, bzw. $(a, 0)$, $(b, 0)$, $(c, 0)$, $(d, 0)$ die harmonische Relation ausdrücken.[5])

Das Resultat aus [2], S. 88-9, lautet nun:

Jede umkehrbare, harmonische Quadrupel reproduzierende Abbildung zwischen zwei Geraden p, p' einer Moufang-Ebene der Charakteristik $\neq 2$ ist das Produkt einer Projektivität zwischen p, p' und einer Abbildung σ der Geraden p' auf sich, wobei σ die Identitäten (1), (2), (3), (4) *mit x, y aus dem Koordinatenalternativkörper erfüllt.*[6])

---

[5]) Lehrsatz 5 und Formel (4) in [1].

[6]) Der Beweis folgt aus [4], Satz 6, S. 9, und aus der Behauptung 3, indem man die x-Achse in p' wählt.

LITERATUR

[1] *V. Havel:* Harmonical quadruplet in Moufang plane, Czech. Mat. J. *5* (1955), 76—82.

[2] *V. Havel:* On the theorem of Staudt in Moufang plane, Czech. Mat. J. *5* (1955), 83—90.

[3] *L. K. Hua:* Über Semi-Homomorphismen von Ringen und ihre Anwendung in der projektiven Geometrie, (russ.), Усп. мат. наук *8*, Nr. 3; *55* (1955), 143—148.

[4] *G. Pickert:* Projektive Ebenen, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

Резюме

ЗАМЕТКА К ТЕОРЕМЕ ШТАУДТА В ПЛОСКОСТИ МУФАНГ

ВАЦЛАВ ГАВЕЛ (Václav Havel), Прага.

(Поступило в редакцию 28/XI 1956 г.)

Содержанием заметки является исправление ошибки в статье автора [2], на которую обратил внимание Л. А. Скорняков. Доказана справедливость следующего утверждения:

Пусть σ — точечное отображение альтернативной прямой p (характеристики $\neq 2$) на себя, сохраняющее гармонические четверки точек и не меняющее нулевую, единичную и несобственную точки прямой p. Тогда отображение σ удовлетворяет уравнениям

$$(x + y)^\sigma = x^\sigma + y^\sigma\,, \quad (x^2)^\sigma = (x^\sigma)^2\,,$$

$$(xy + yx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma + y^\sigma x^\sigma\,, \quad (xyx)^\sigma = x^\sigma y^\sigma x^\sigma$$

тождественно относительно x, y из координатного альтернативного тела.