Czechoslovak Mathematical Journal

Zbyněk Nádeník

Слой гиперповерхностей и нулевое соответствие в n-мерном проективном пространстве S_n

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 7 (1957), No. 1, 73–95

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100233`

Чехословацкий математический журнал, т. 7 (82) 1957, Прага

СЛОЙ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ И НУЛЕВОЕ СООТВЕТСТВИЕ В n-МЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ S_n

ЗБЫНЕК НАДЕНИК (Zbyněk Nádeník), Прага.

(Поступило в редакцию 22/III 1956 г.)

Пусть A — точка гиперповерхности (A) из слоя гиперповерхностей (однопараметрической системы гиперповерхностей) в S_n и α — касательная гиперплоскость к гиперповерхности (A) в точке A. При условии одно-однозначности изучается нулевое соответствие $A \longleftrightarrow \alpha$ и соответствующий слой гиперповерхностей.

1. Пусть в n-мерном проективном пространстве S_n, в котором введены однородные координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$, вместо которых будем в дальнейшем коротко писать x, задана однопараметрическая система Σ гиперповерхностей, аналитически представленных уравнениями $x = x(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v)$, где $x(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v)$ — аналитические функции, в которых v играет роль параметра гиперповерхности в системе Σ. Предположим, что хотя бы в некоторой области Ω из S_n проходит через каждую точку x точно одна гиперповерхность (x) системы Σ и что последняя имеет в точке x касательную гиперплоскость

$$\xi = \left[x \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x}{\partial u_{n-1}}\right].$$

Следуя Э. Чеху, назовем эту систему Σ гиперповерхностей *слоем V гиперповерхностей* (в области Ω); будем также говорить, что слой V образован (в области Ω) гиперповерхностями системы Σ. Далее будем предполагать, что гиперплоскость ξ является (хотя бы в области Ω) касательной гиперплоскостью только к гиперповерхности (x) и только в одной ее точке x. Аналитически эти требования выражаются условиями (которые выполняются по крайней мере в области Ω)

$$\left[x \frac{\partial x}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial x}{\partial u_{n-1}} \frac{\partial x}{\partial v}\right] \neq 0\,, \quad \left[\xi \frac{\partial \xi}{\partial u_1} \cdots \frac{\partial \xi}{\partial u_{n-1}} \frac{\partial \xi}{\partial v}\right] \neq 0\,.$$

Теперь поставим в соответствие каждой точке x из области Ω (которую будем также называть точкой x слоя V) касательную гиперплоскость ξ

к гиперповерхности (x) в точке x; будем называть ее также гиперплоскостью слоя V. Вследствие приведенных выше условий, получаем таким образом в области Ω одно-однозначное соответствие между точками и гиперплоскостями слоя V, в котором соответственные элементы инцидентны. Это соответствие назовем, следуя Э. Чеху, *нулевым соответствием* N. В дальнейшем будут исследованы только локальные свойства слоя V или нулевого соответствия N.

Описанное нулевое соответствие является, конечно, весьма частным случаем общего нулевого соответствия, при котором точке из S_n сопоставлена инцидентная с ней гиперплоскость. По очевидным причинам можно наше нулевое соответствие N зачислить к „голономному" типу в противоположность общему „неголономному" случаю. Соответствия этого рода уже изучались автором по побуждению Э. Чеха для случая плоскости[1]), где каждое нулевое соответствие относится к голономному типу; в дальнейшем будем все время считать $n \geqq 3$.

2. В дальнейшем будем все исследования проводить по методам Э. Картана. В пространстве S_n введем реперы $A_0, A_1, \ldots, A_n$, подчиненные пока только условию

$$[A_0A_1 \ldots A_n] = 1 . \tag{2,1}$$

Основные уравнения имеют вид

$$\mathrm{d}A_i = \sum_{j=0}^{n} \omega_{ij}A_j , \quad i = 0, 1, \ldots, n , \tag{2,2}$$

где ω_{ij} $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$ суть формы Пфаффа в дифференциалах $(n + 1)^2 -$ $- 1$ параметров; они подчинены также уравнениям структуры n-мерного проективного пространства

$$[\mathrm{d}\omega_{ij}] = \sum_{s=0}^{n} [\omega_{is}\omega_{sj}] ; \quad i, j = 0, 1, \ldots, n . \tag{2,3}$$

Помимо этого точечного репера будем также пользоваться двойственным сопряженным репером, состоящим из гиперплоскостей $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, которые однозначно определены следующими условиями:

$$SA_r\alpha_r = 1 , \quad SA_r\alpha_s = 0 ; \tag{2,4}$$
$$r, s = 0, 1, \ldots, n ; \quad r \neq s ,$$

откуда, имея ввиду (2,1), получаем опять

$$[\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_n] = 1 , \tag{2,5}$$

и далее

$$\alpha_r = (-1)^{n+r} [A_0A_1 \ldots A_{r-1}A_{r+1} \ldots A_n] ; \quad r = 0, 1, \ldots, n . \tag{2,6}$$

[1]) См. [2].

Основные уравнения для сопряженного репера имеют тогда вид

$$\mathrm{d}\alpha_i = -\sum_{j=0}^{n} \omega_{ij}\alpha_j\,; \quad i = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{2,7}$$

Так как соотношения (2,4) симметричны по отношению к реперам A_0, $A_1, \ldots, A_n$ и $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$, то, согласно (2,6), будет также

$$A_r = (-1)^{n+r}[\alpha_0\alpha_1 \ldots \alpha_{r-1}\alpha_{r+1} \ldots \alpha_n]\,; \quad r = 0, 1, \ldots, n\,. \tag{2,8}$$

Локальной системой координат назовем такую систему, координатные вершины которой лежат в точках репера $A_0, A_1, \ldots, A_n$, причем все координаты точки A_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) равны нулю за исключением i-той координаты, которую положим равной 1. Двойственно можно определить локальную систему координат при помощи репера из гиперплоскостей $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$, $\ldots, \alpha_n$.

3. Асимптотической касательной к гиперповерхности (x) в точке x разумеем прямую, которая имеет в точке x с гиперповерхностью касание второго порядка. Двойственно будем называть асимптотическим касательным подпространством в касательной гиперплоскости ξ гиперповерхности (x) (но рассматриваемой теперь как гиперповерхность, образованную гиперплоскостями!) в ее точке x пространство размерности $n - 2$, которое содержится в гиперплоскости ξ и которое имеет с данной гиперповерхностью касание второго порядка; это подпространство проходит, конечно, через точку x.

Вследствие наших предположений о гиперповерхностях слоя, образуют в каждой точке x слоя V асимптотические касательные к гиперповерхности (x) в точке x квадратичный $(n - 2)$-конус (т. е. $(n - 2)$-квадрику с одной единственной особой точкой) в касательной гиперплоскости ξ с вершиной в точке x. Асимптотические подпространства в гиперплоскости ξ являются касательными подпространствами этого $(n - 2)$-конуса, который будем называть асимптотическим.

Первое избрание реперов произведем в области Ω следующим образом: 1. Точка A_0 геометрически тождественна с точкой x; 2. гиперплоскость α_n геометрически тождественна с гиперплоскостью ξ, причем $x \to \xi$ в нулевом соответствии N; 3. прямые $[A_0A_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, являются полярно сопряженными по отношению к асимптотическому $(n - 2)$-конусу гиперповерхности (x) в точке x. Последнее требование, очевидно, эквивалентно условию, чтобы подпространства $[\alpha_n\alpha_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$, были полярно сопряженными по отношению к тому же $(n - 2)$-конусу.

Выбранные таким способом реперы, которые будем называть реперами 1-го порядка, зависят от n параметров главных $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, v$ и от $(n + \overline{n - 1} + \ldots + 2) + (n + 1) = \frac{1}{2}n(n + 3)$ параметров вторичных. Следовательно, между $(n+1)^2$ формами ω_{ij} $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$ должно выполняться $(n+1)^2 - 1 - n - \frac{1}{2}n(n+3) = \frac{1}{2}n(n-1)$ соотношений, которые будем постепенно выводить. В их числе не содержится соотношение

$$\omega_{00} + \omega_{11} + \ldots + \omega_{nn} = 0\,, \tag{3,1}$$

которое является следствием (2,1) или (2,5).

Если фиксировать главные параметры, то точка A_0 и гиперплоскость α_n также геометрически фиксированы и наоборот. Это, ввиду (2,2), для $i = 0$ и, ввиду (2,7), для $i = n$ значит, что формы ω_{0i} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ равно как и формы ω_{in} $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ являются n независимыми линейными комбинациями одних только дифференциалов n главных параметров. Для краткости положим

$$\omega_{0i} = \omega_i\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{3,2}$$

Следовательно, будет также

$$\omega_{in} = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}\omega_j + a_i\omega_n\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{3,3}$$

причем

$$|a_{ij}| \neq 0\,, \tag{3,4}$$

где a_{ij} и a_i $(i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$ суть какие-то скалярные функции главных и вторичных параметров.

Прямая

$$[A_0, \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_{n-1}A_{n-1}] \tag{3,5}$$

является асимптотической касательной к гиперповерхности (A_0) в точке A_0, согласно (2,2), тогда и только тогда, если одновременно

$$\omega_n = 0 \tag{3,6}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n-1} \omega_{jn}\omega_j = 0\,. \tag{3,7}$$

Согласно (3,3), (3,6), (3,7) и требования 3, возлагаемого на наши реперы, $a_{ij} = 0$; $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$; $i \neq j$. Соотношения (3,3), следовательно, сводятся к

$$\omega_{in} = a_{ii}\omega_i + a_i\omega_n\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \tag{3,8}$$

где

$$a_{11}a_{22}\ldots a_{n-1,n-1} \neq 0\,. \tag{3,8'}$$

Уравнение (3,6), которое теперь, вследствие (3,8), оказывается вполне интегрируемым, является дифференциальным уравнением гиперповерхностей нашего слоя.

Внешним дифференцированием уравнений (3,8) по уравнениям структуры (2,3) получается для $i = 1, 2, \ldots, n - 1$:

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n-1}[a_{kk}\omega_{ik} + a_{ii}\omega_{ki}, \omega_k] + [-\,\mathrm{d}a_{ii} + a_{ii}(-\,\omega_{00} + 2\omega_{ii} - \omega_{nn}), \omega_i] + \\ &+ [-\,\mathrm{d}a_i + \omega_{i0} + a_{ii}\omega_{ni} - a_i\omega_{00} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(\omega_{ik} - a_i\omega_k), \omega_n] = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (3,9)$$

Отсюда прежде всего следует

$$[a_{kk}\omega_{ik} + a_{ii}\omega_{ki}, \omega_1\omega_2 \ldots \omega_n] = 0;\; i, k = 1, 2, \ldots, n - 1;\; i \neq k\,, \qquad (3,10)$$

что вместе с (3,8) представляет искомые $\frac{1}{2}n(n + 1)$ соотношений.

В обыкновенной символике затем будет

$$e_{0i} = 0\,;\quad i = 1, 2, \ldots, n\,; \qquad (3,11)$$

$$e_{in} = 0\,,\quad i = 0, 1, \ldots, n - 1\,, \qquad (3,12)$$

и, согласно (3,1) и (3,10), будет также

$$e_{00} + e_{11} + \ldots + e_{nn} = 0\,, \qquad (3,13)$$

$$a_{kk}e_{ik} + a_{ii}e_{ki} = 0\,;\quad i, k = 1, 2, \ldots, n - 1;\, i \neq k\,. \qquad (3,14)$$

Из (3,9) далее для $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ вытекает:

$$\left.\begin{aligned}\delta a_{ii} &= a_{ii}(-\,e_{00} + 2e_{ii} - e_{nn})\,,\\ \delta a_i &= e_{i0} + a_{ii}e_{ni} - a_ie_{00} + \sum_{k=1}^{n-1} a_ke_{ik}\,.\end{aligned}\right\} \qquad (3,15)$$

Так как формы $-\,e_{00} + 2e_{ii} - e_{nn}$ и e_{i0} $(i = 1, 2, \ldots, n - 1)$ независимы, можно, ввиду (3,14), выбрать вторичные параметры так, что

$$a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{n-1,n-1} = 1\,,\quad a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0\,. \qquad (3,16)$$

Реперы 1-го порядка, для которых справедливо (3,16), назовем реперами 2-го порядка. Согласно (3,8) и (3,16), будет для них

$$\omega_{in} = \omega_i\,;\quad i = 1, 2, \ldots, n - 1\,, \qquad (3,17)$$

и между формами ω_{rs} $(r, s = 0, 1, \ldots, n)$ выполняется дальнейших $2(n - 1)$ соотношений, т. е. всего $\frac{1}{2}n(n - 1) + 2(n - 1) = \frac{1}{2}(n - 1)(n + 4)$ соотношений.

При условии, что выполняется (3,16), можно представить уравнения (3,9) в следующем виде:

$$\sum_{k=1}^{n-1}[\omega_{ik} + \omega_{ki} - \delta_i^k(\omega_{00} + \omega_{nn}), \omega_k] + [\omega_{i0} + \omega_{ni}, \omega_n] = 0\,; \qquad (3,18)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n - 1\,.$$

δ_i^k $(i, k = 1, 2, \ldots, n - 1)$ означает здесь известное дельта Кронекера.

Из (3,18) затем, в силу леммы Картана, следует

$$\left.\begin{aligned} \omega_{ik} + \omega_{ki} - \delta_i^k(\omega_{00} + \omega_{nn}) &= \sum_{r=1}^{n} b_{kr}^{(i)}\omega_r\,, \\ \omega_{i0} + \omega_{ni} = \sum_{r=1}^{n} b_{nr}^{(i)}\omega_r\,; \quad i, k &= 1, 2, \ldots n-1\,, \end{aligned}\right\} \tag{3,19}$$

причем

$$b_{sr}^{(i)} = b_{rs}^{(i)}\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1;\ r, s = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{3,20}$$

Вследствие симметричности форм $\omega_{ik} + \omega_{ki} - \delta_i^k(\omega_{00} + \omega_{nn})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, \ldots, n-1)$ по отношению к индексам i, k будет также

$$b_{kr}^{(i)} = b_{rk}^{(i)}\,; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n-1;\ r = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{3,21}$$

В дальнейшем будут играть важную роль формы $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$, которые определим следующим образом

$$\Omega_0 = 2\sum_{j=1}^{n-1}\omega_j^2\,, \quad \Omega_i = \sum_{r=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} b_{rs}^{(i)}\omega_r\omega_s\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{3,22}$$

Прямая (3,5) является, согласно (3,6), (3,7) и (3,17), асимптотической касательной к гиперповерхности (A_0) в точке A_0 тогда и только тогда, если $\Omega_0 = 0$.

Заметим еще, что для реперов 2-го порядка только что упомянутые $\frac{1}{2}(n-1)(n+4)$ соотношения между формами ω_{rs} $(r, s = 0, 1, \ldots, n)$ являются как раз соотношениями (3,17) и (3,19). Из последнего, имея ввиду (3,13), получаем

$$\left.\begin{aligned} e_{00} + e_{nn} = 0\,; \quad e_{ii} = 0\,; \quad e_{ik} + e_{ki} = 0\,; \\ e_{i0} + e_{ni} = 0\,; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n-1;\ i \neq k\,. \end{aligned}\right\} \tag{3,22}$$

4. Для реперов 2-го порядка с геометрически фиксированной точкой A_0 справедливо, согласно (2,2), (3,11), (3,12) и (3,22),

$$\delta A_0 = e_{00}A_0\,,$$

$$\delta A_i = e_{i0}A_0 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n-1} e_{ik}A_k\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,;$$

$$\delta A_n = e_{n0}A_0 - \sum_{k=1}^{n-1} e_{k0}A_k - e_{00}A_n\,.$$

Аналогичные соотношения справедливы для двойственных сопряженных реперов. Легко можно затем обнаружить, что

$$\delta[A_0A_n] = -\sum_{k=1}^{n-1} e_{k0}[A_0A_k]\,, \quad \delta[\alpha_n\alpha_0] = -\sum_{k=1}^{n-1} e_{k0}[\alpha_n\alpha_k]\,.$$

Эти уравнения означают, что прямая $[A_0A_n]$ и подпространство $[\alpha_n\alpha_0]$ являются (в рассматриваемых реперах) *одновременно* фиксированнымн. Это соответствие между прямыми, проходящими через точку A_0, и подпространствами размерности $n-2$ в гиперплоскости α_n

$$[A_0A_n] \longleftrightarrow [\alpha_n\alpha_0] \tag{4,1}$$

исследуем более подробно.[2])

Положим

$$\omega_i = l_i\varrho\ ; \quad i = 1, 2, \ldots, n\ , \tag{4,2}$$

где ϱ — какая-то отличная от нуля форма. Если имеет место соотношение (4,2), то точка A_0 опишет кривую, касательная к которой лежит всегда в прямой

$$[A_0, \sum_{i=1}^{n} l_iA_i] \tag{4,3}$$

и гиперплоскость α_n образует однопараметрическую систему гиперплоскостей, характерные подпространства которой, вследствие (3,17) и (4,2), всегда геометрически тождественны с подпространствами

$$[\alpha_n, \sum_{i=1}^{n-1} l_i\alpha_i + l_n\alpha_0]\ . \tag{4,4}$$

Легко видно, что прямая (4,3) и подпространство (4,4) соответствуют друг другу в полярном соответствии P, зависящем от одного параметра λ и определенном следующим образом:

$$PA_0 = \alpha_n\ , \quad PA_i = \alpha_i\ , \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\ , \quad PA_n = \alpha_0 + \lambda\alpha_n\ . \tag{4,5}$$

Базисами всех этих полярных соответствий являются гиперквадрики связки, уравнение которой в локальной системе координат следующее:

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 2x_0x_n + \lambda x_n^2 = 0\ . \tag{4,6}$$

Значит, асимптотические касательные к гиперповерхности (A_0) нашего слоя V в точке A_0 являются прямыми всех гиперквадрик (4,6), имеющих в точке A_0 друг с другом касание 3-го порядка. Этими гиперквадриками будем заниматься еще в следующем отделе.

Все полярные соответствия (4,5) *индуцируют между прямыми, проходящими через точку* A_0, *и подпространствами размерности* $n-2$ *в гиперплоскости* α_n, *одну и ту же полярную кореляцию, которую в дальнейшем будем обозначать через* π; *эта кореляция нет ничто иное, как соответствие* (4,1).

5. Во всем пятом отделе будем полагать $v = \text{const.}$, т. е.

$$\omega_n = 0\ , \tag{5,1}$$

[2]) См. [3], стр. 76.

что не будем далее особо подчеркивать. Также и символ d будет далее означать дифференцирование при $v = \text{const}$.

Тогда из (2,2) следует

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}A_0 &= \omega_{00}A_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j A_j\,, \\
\mathrm{d}^2A_0 &= (\mathrm{d}\omega_{00} + \omega_{00}^2 + \sum_{s=1}^{n-1} \omega_{s0}\omega_s)\, A_0 + \sum_{j=1}^{n-1} (\mathrm{d}\omega_j + \omega_{00}\omega_j + \sum_{s=1}^{n-1} \omega_{sj}\omega_s)\, A_j + \\
&\quad + \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s^2 A_n\,, \\
\mathrm{d}^3A_0 &= (.)\, A_0 + (.)\, A_1 + \ldots + (.)\, A_{n-1} + \\
&\quad + (3 \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s\, \mathrm{d}\omega_s + \overline{\omega_{00} + \omega_{nn}} \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s^2 + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \omega_{sr}\omega_s\omega_r)\, A_n\,.
\end{aligned}
$$

Потому что для точки A поверхности (A_0) нашего слоя в окрестности точки A_0 справедливо равенство $A = A_0 + \mathrm{d}A_0 + \frac{1}{2!}\,\mathrm{d}^2A_0 + \frac{1}{3!}\,\mathrm{d}^3A_0 + (4)$, будут координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ точки A в локальной системе координат следующие:

$$
\left.
\begin{aligned}
x_0 &= 1 + \omega_{00} + (2)\,; \\
x_j &= \omega_j + \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\omega_j + \omega_{00}\omega_j + \sum_{s=1}^{n-1} \omega_{sj}\omega_s\right) + (3)\,; \quad j = 1, 2, \ldots, n-1\,; \\
x_n &= \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s^2 + \frac{1}{6}\,(3 \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s\, \mathrm{d}\omega_s + \overline{\omega_{00} + \omega_{nn}} \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s^2 + \\
&\quad + \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \omega_{sr}\omega_s\omega_r) + (4).
\end{aligned}
\right\} \qquad (5,2)
$$

Гиперквадрика, которая имеет в точке A_0 касание 2-го порядка с гиперповерхностью (A_0) слоя V, должна необходимо содержать асимптотический $(n-2)$-конус гиперповерхности (A_0) в точке A_0. Следовательно, ее уравнение в локальной системе координат необходимо должно иметь вид $\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 - 2x_n \sum_{j=0}^{n} \lambda_j x_j = 0$, где (как легко следует из (5,2)) $\lambda_0 = 1$. Далее из (5,2), (3,19), (3,22) и (5,1) вытекает, что

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 - 2x_0x_n - 2x_n \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = \\
&= -\frac{1}{3}\,(\omega_{00} + \omega_{nn}) \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s^2 + \frac{2}{3} \sum_{s=1}^{n-1} \sum_{r=1}^{n-1} \omega_{sr}\omega_s\omega_r - \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s^2 \,.\, \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j\omega_j + (4) = \\
&= \frac{1}{3} \sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r\omega_r - \frac{1}{2}\,\Omega_0 \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j\omega_j + (4) = \sum_{r=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\,\Omega_r - \frac{1}{2}\,\lambda_r\Omega_0\right)\omega_r + (4)\,. \qquad (5,3)
\end{aligned}
$$

Теперь выберем прямую

$$[A_0, \omega_1 A_1 + \ldots + \omega_{n-1} A_{n-1}] \tag{5,4}$$

так, чтобы она была полярно сопряженной с прямой

$$[A_0, \Omega_1 A_1 + \ldots + \Omega_{n-1} A_{n-1}] \tag{5,5}$$

по отношению к асимптотическому $(n - 2)$-конусу в точке A_0 гиперповерхности (A_0) слоя V. Это, очевидно, возможно тогда и только тогда, если

$$\sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r \omega_r = 0 . \tag{5,6}$$

В n-параметрической системе гиперквадрик, которые имеют в точке A_0 касание 2-го порядка с гиперповерхностью (A_0) и уравнение которых в локальной системе координат имеет вид

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 - 2x_0 x_n - 2x_n \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = 0 , \tag{5,7}$$

можно гиперквадрики связки, имеющей уравнение вида

$$\sum_{j=1}^{n-1} x_j^2 - 2x_0 x_n - 2\lambda_n x_n^2 = 0 , \tag{5,8}$$

охарактеризовать следующим образом: это именно все те гиперквадрики из числа гиперквадрик (5,7), *которые в направлении прямой* (5,4), *которая полярно сопряжена с прямой* (5,5) *по отношению к асимптотическому $(n - 2)$-конусу в точке A_0 гиперповерхности (A_0), имеют с гиперповерхностью (A_0) касание* 3*-го порядка в точке A_0.*

Связка гиперквадрик (4,6), *которые служили базисами полярных соответствий P, определенных в* (4,5), *возникает из связки* (5,8) *путем центрической инволюторной коллинеации с центром в точке A_n и осевой гиперплоскостью α_n.*

6. Чтобы выяснить геометрический смысл выбора (3,16), вернемся еще к реперам 1-го порядка, для которых справедливо (3,8). Исследуем, в каком случае *кореляция K^* первого рода*, определенная уравнениями $K^* A_i = \sum_{j=0}^{n-1} \mu_{ij} \alpha_j + \mu_i \alpha_n$; $i = 0, 1, \ldots, n$, является — в известном смысле, определенном Э. Чехом — *касательной* к нашему нулевому соответствию N,[3]) при котором $NA_0 = \alpha_n$. Из условия $K^*\, \mathrm{d}A_0 = \mathrm{d}\alpha_n + (.)\, \alpha_n$ легко вы-

[3]) См. [1], часть I, стр. 91.

текает, что кореляция K^* является касательной к соответствию N тогда и только тогда, если

$$\left.\begin{aligned} K^*A_0 = \alpha_n\,, \quad K^*A_i &= -\,a_{ii}\alpha_i + \mu_i\alpha_n\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \\ K^*A_n &= -\,\alpha_0 - \sum_{s=1}^{n-1} a_s\alpha_s + \mu_n\alpha_n\,, \end{aligned}\right\} \tag{6,1}$$

где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ — произвольные параметры. *Эта кореляция никогда не будет ни полярной* и, вследствие (3,8′), *ни нулевой*. Гиперквадрика, которая является геометрическим местом точки B, инцидентной с соответственной гиперплоскостью K^*B, имеет в локальной системе координат уравнение вида

$$\sum_{s=1}^{n-1} a_{ss}x_s^2 + \sum_{s=1}^{n-1} (a_s - \mu_s)\, x_s x_n - \mu_n x_n^2 = 0\,. \tag{6,2}$$

Смысл выбора (3,16) теперь уже ясно виден из (6,1) и (6,2). Если ограничимся только реперами 2-го порядка, то *гиперквадрика инцидентности* (6,2) *кореляции* (6,1) *при*

$$4\mu_n + \sum_{s=1}^{n-1} \mu_s^2 \neq 0 \tag{6,3}$$

и только в этом случае, является квадратичным гиперконусом с вершиной в точке A_0. *В противном случае имеет гиперквадрика инцидентности* (6,2) *в точности одну прямую особых точек, которая представляет собой прямую* $[A_0A_n]$ *только в том случае, когда все параметры* μ_i *равны нулю. Это геометрически характеризует кореляцию из числа всех касательных кореляций* K^*:

$$\left.\begin{aligned} K^*A_0 = \alpha_n\,, \quad K^*A_i &= -\,\alpha_i + \mu_i\alpha_n\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \\ K^*A_n &= -\,\alpha_0 + \mu_n\alpha_n\,, \end{aligned}\right\} \tag{6,4}$$

определенных при помощи реперов 2-го порядка, *такую, для которой*

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0\,. \tag{6,5}$$

В дальнейшем будем обозначать ее через K.

Согласно (2,6) и (6,4), получаем

$$\left.\begin{aligned} K^*\alpha_0 &= (-1)^{n+1}\Big(\mu_n A_0 + \sum_{s=1}^{n-1} \mu_s A_s + A_n\Big)\,, \\ K^*\alpha_i = (-1)^n A_i\,, &\quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \quad K^*\alpha_n = (-1)^n A_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6,6}$$

Далее, для коллинеации $C = K^{*2}$ справедливо, ввиду (6,4) и (6,6)

$$CA_0 = (-1)^n A_0\,, \quad CA_i = (-1)^n (\mu_i A_0 - A_i)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

$$CA_n = (-1)^n \Big(2\mu_n A_0 + \sum_{s=1}^{n-1} \mu_s A_s + A_n\Big)\,.$$

В этой коллинеации точка A_0 и гиперплоскость α_n являются самосопряженными; помимо этого в гиперплоскости α_n будет самосопряженной еще каждая точка

$$-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-1}\beta_i\mu_i A_0 + \sum_{s=1}^{n-1}\beta_i A_i\,, \tag{6,7}$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ — произвольные параметры. Других самосопряженных точек в гиперплоскости α_n нет. Следовательно, коллинеация C индуцирует в самосопряженной гиперплоскости α_n центральную коллинеацию с центром в точке A_0 и осевым подпространством размерности $n-2$, состоящим из точек вида (6,7). Легко можно убедиться в том, что эта коллинеация является инволюторной. Самосопряженные точки коллинеации C, которые не лежат в гиперплоскости α_n, существуют тогда и только тогда, если $4\mu_n + \sum_{s=1}^{n-1}\mu_s^2 = 0$. Они заполняют тогда в точности лишь прямую

$$\left[A_0, \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-1}\mu_s A_s + A_n\right].$$

В нулевом соответствии N, в котором $NA_0 = \alpha_n$, будет наоборот $N^{-1}\alpha_n = A_0$. Теперь при помощи реперов второго порядка определим кореляцию K'^* второго рода $K'^*\alpha_i = \sum_{i=o}^{n-1}\mu'_{ij}A_j + \mu'_i A_n$; $i = 0, 1, \ldots, n$. Из условия $K'^*\,\mathrm{d}\alpha_n = \mathrm{d}A_0 + (\,.\,)\,A_0$ затем следует, что кореляция K'^* является касательной[4]) к нулевому соответствию N^{-1} тогда и только тогда, если

$$\left.\begin{aligned} K'^*\alpha_n = A_0\,, \quad K'^*\alpha_i = -A_i + \mu'_i A_0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,,\\ K'^*\alpha_0 = -A_n + \mu'_n A_0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6,8}$$

В дальнейшем будем рассматривать и эту кореляцию, хотя мы могли бы, конечно, проводить о ней рассуждения, двойственные до сих пор проведенным.

Ту из кореляций (6,8), для которой $\mu'_1 = \mu'_2 = \ldots = \mu'_n = 0$, будем в дальнейшем обозначать через K'.

Для коллинеации $K'^*\,.\,K^*$, согласно (6,4) и (6,8), будет

$$K'^*K^*A_0 = A_0\,, \quad K'^*K^*A_i = A_i + (\mu_i - \mu'_i)\,A_0\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Значит, она является тождественным соответствием тогда и только тогда, когда

$$\mu_i = \mu'_i\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{6,9}$$

---

[4]) См. [1], часть I, стр. 91.

7. Из (2,2) и (2,7), ввиду (3,17), вытекает:

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{d}A_0 &= \omega_{00}A_0 + \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j A_j + \omega_n A_n\,,\\
\mathrm{d}^2A_0 &= (\mathrm{d}\omega_{00} + \omega_{00}^2 + \omega_{n0}\omega_n + \sum_{s=1}^{n-1} \omega_{s0}\omega_s)\, A_0 +\\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (\mathrm{d}\omega_j + \omega_{00}\omega_j + \omega_{nj}\omega_n + \sum_{s=1}^{n-1} \omega_{sj}\omega_s)\, A_j +\\
&\quad + (\mathrm{d}\omega_n + \omega_{00}\omega_n + \omega_{nn}\omega_n + \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s^2)\, A_n\,;\\
\mathrm{d}\alpha_n &= -\,\omega_n\alpha_0 - \sum_{j=1}^{n-1} \omega_j\alpha_j - \omega_{nn}\alpha_n\,,\\
\mathrm{d}^2\alpha_n &= (-\,\mathrm{d}\omega_n + \omega_{00}\omega_n + \omega_{nn}\omega_n + \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s^2)\,\alpha_0 +\\
&\quad + \sum_{j=1}^{n-1} (-\,\mathrm{d}\omega_j + \omega_{j0}\omega_n + \omega_{nn}\omega_j + \sum_{s=1}^{n-1} \omega_{js}\omega_s)\,\alpha_j +\\
&\quad + (-\,\mathrm{d}\omega_{nn} + \omega_{n0}\omega_n + \omega_{nn}^2 + \sum_{s=1}^{n-1} \omega_{ns}\omega_s)\,\alpha_n\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (7,1)$$

Для касательной кореляции K, при которой

$$KA_0 = \alpha_n\,, \quad KA_i = -\,\alpha_i\,, \quad KA_n = -\,\alpha_0\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

согласно (7,1), получаем

$$\left.\begin{aligned}
K\,\mathrm{d}A_0 &= \mathrm{d}\alpha_n + (\omega_{00} + \omega_{nn})\,\alpha_n\,,\\
K\,\mathrm{d}^2A_0 &= \mathrm{d}^2\alpha_n + 2(\omega_{00} + \omega_{nn})\,\mathrm{d}\alpha_n + (\,.\,)\,\alpha_n - \Omega_0\alpha_0 - \sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r\alpha_r\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (7,3)$$

Формы $\Omega_0, \Omega_1, \ldots, \Omega_{n-1}$ были определены в (3,22). Аналогично, в случае касательной кореляции K', для которой

$$K'\alpha_n = A_0\,, \quad K'\alpha_i = -\,A_i\,, \quad K'\alpha_0 = -\,A_n\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,, \qquad (7,4)$$

обнаружим, что

$$\left.\begin{aligned}
K'\,\mathrm{d}\alpha_n &= \mathrm{d}A_0 - (\omega_{00} + \omega_{nn})\,A_0\,,\\
K'\,\mathrm{d}^2\alpha_n &= \mathrm{d}^2A_0 - 2(\omega_{00} + \omega_{nn})\,\mathrm{d}A_0 + (\,.\,)\,A_0 - \sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r A_r - \Omega_0 A_n\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (7,5)$$

Для всякой другой касательной кореляции K^* справедливо

$$\left.\begin{aligned}
K^*\,\mathrm{d}A_0 &= \mathrm{d}\alpha_n + (\omega_{00} + \omega_{nn} + \sum_{s=1}^{n} \mu_s\omega_s)\,\alpha_n\,,\\
K^*\,\mathrm{d}^2A_0 &= \mathrm{d}^2\alpha_n + 2(\omega_{00} + \omega_{nn} + \sum_{s=1}^{n} \mu_s\omega_s)\,\mathrm{d}\alpha_n + (\,.\,)\,\alpha_n -\\
&\quad - \Omega_0^*\alpha_0 - \sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r^*\alpha_r\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (7,6)$$

где

$$\Omega_0^* = \Omega_0 - 2\omega_n\vartheta\,, \quad \Omega_r^* = \Omega_r - 2\omega_r\vartheta\,; \quad r = 1, 2, \ldots, n-1\,; \tag{7,7}$$

$$\vartheta = \sum_{s=1}^{n} \mu_s\omega_s\,. \tag{7,8}$$

Для касательной кореляции K'^*, определенной в (6,8), также получим

$$\left.\begin{aligned} K'^*\,\mathrm{d}\alpha_n &= \mathrm{d}A_0 - (\omega_{00} + \omega_{nn} + \sum_{s=1}^{n} \mu_s'\omega_s)\,A_0\,,\\ K'^*\,\mathrm{d}^2\alpha_n &= \mathrm{d}^2A_0 - 2(\omega_{00} + \omega_{nn} + \sum_{s=1}^{n} \mu_s'\omega_s)\,\mathrm{d}A_0 + (\,.\,)\,A_0 -\\ &\quad - \sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r'^*A_r - \Omega_0'^*A_n\,, \end{aligned}\right\} \tag{7,9}$$

где теперь

$$\Omega_r'^* = \Omega_r - 2\omega_r\vartheta'\,; \quad r = 1, 2, \ldots, n-1\,; \quad \Omega_0'^* = \Omega_0 - 2\omega_n\vartheta' \tag{7,10}$$

и

$$\vartheta' = \sum_{s=1}^{n} \mu_s'\omega_s\,. \tag{7,11}$$

Теперь рассмотрим прямую, проходящую через точку A_0,

$$[A_0, \sum_{r=1}^{n-1} \omega_rA_r + \omega_nA_n] = [A_0\,\mathrm{d}A_0] \tag{7,12}$$

и подпространство размерности $n-2$ в гиперплоскости α_n

$$[\alpha_n, \omega_n\alpha_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \omega_r\alpha_r] = -[\alpha_n\,\mathrm{d}\alpha_n]\,. \tag{7,13}$$

Эта прямая и указанное подпространство соответствуют друг другу в полярном соответствии π (см. отдел 4). То же самое можно сказать о прямой

$$[A_0, \sum_{r=1}^{n-1} \Omega_rA_r + \Omega_0A_n] \tag{7,14}$$

и подпространстве размерности $n-2$

$$[\alpha_n, \Omega_0\alpha_0 + \sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r\alpha_r]\,. \tag{7,15}$$

Следуя Э. Чеху, назовем квадратичное преобразование

$$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n) \to (\Omega_1^*, \Omega_2^*, \ldots, \Omega_{n-1}^*, \Omega_0^*) \tag{7,16*}$$

соответственно

$$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n) \to (\Omega_1'^*, \Omega_2'^*, \ldots, \Omega_{n-1}'^*, \Omega_0'^*) \tag{7,16'*}$$

K^*-линеаризирующим преобразованием[5]) *нулевого соответствия* N, со-

[5]) См. [1], часть I, стр. 101.

ответственно, *K'^*-линеаризирующим преобразованием нулевого соответствия* N^{-1}. В силу (7,7), (7,8), (7,10) и (7,11), преобразования (7,16*) и (7,16'*) являются тождественными преобразованиями тогда и только тогда, если имеет место (6,9). Следовательно, *к каждому K^*-линеаризирующему преобразованию существует в точности одно K'^*-линеаризирующее преобразование, с ним тождественное и наоборот.* Это значит, что изучая нулевые соответствия, можем ограничиться лишь преобразованиями (7,16*) (или преобразованиями (7,16'*)). В частности, при $\mu_i = \mu'_i = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$, ввиду (7,7), (7,8), (7,10) и (7,11), имеем преобразование

$$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n) \to (\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_{n-1}, \Omega_0)\,, \tag{7,16}$$

которое, конечно, вследствие (7,3) и (7,5), является теперь *K-линеаризирующим преобразованием нулевого соответствия N* или *K'-линеаризирующим преобразованием нулевого соответствия N^{-1}*. Придерживаясь все время терминологии Э. Чеха, назовем прямую (7,14) *K-линеаризирующей прямой для прямой* (7,12) и подпространство (7,15) — *K-линеаризирующим подпространством подпространства* (7,13).[6]) *K'-линеаризирующая прямая* (*подпространство*) прямой (7,12) (подпространства (7,13)), совпадает, конечно, с K-линеаризирующей прямой (подпространством) этой прямой (подпространства). Пользуясь опять-таки терминологией Э. Чеха, назовем прямую (7,12) или подпространство (7,13), для которых

$$\Omega_1 : \Omega_2 : \ldots : \Omega_{n-1} : \Omega_0 = \omega_1 : \omega_2 : \ldots : \omega_{n-1} : \omega_n\,, \tag{7,17}$$

соответственно

$$\Omega_0 = \Omega_1 = \ldots = \Omega_{n-1} = 0 \tag{7,18}$$

характеристическими[7]), соответственно, *K-главными*[8]) *или K'-главными.* Характеристические прямые и подпространства для всех касательных коллинеаций соответствий N и N^{-1} всегда одни и те же, и каждая K-главная прямая является одновременно и K'-главной прямой и наоборот. Это легко вытекает из соотношений, приведенных в настоящем отделе.

Геометрический смысл преобразования (7,16), K-линеаризирующих, характеристических и K-главных прямых легко видеть для двойственного преобразования из результатов, полученных Э. Чехом в первой работе из серии его статей *Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами* I (отдел 9). Присоединим к ним лишь несколько замечаний.

Согласно (3,7), (3,17) и (3,22) прямая (7,12) является асимптотической касательной в точке A_0 к гиперповерхности (A_0) тогда и только тогда, если

$$\Omega_0 = 0\,, \quad \omega_n = 0\,. \tag{7,19}$$

[6]), [7]), [8]) См. [1], часть I, стр. 101.

Следовательно, *прямая* (7,12) *находится одновременно со своей K-линеаризирующей прямой* (7,14) *в гиперплоскости α_n тогда и только тогда, когда она сама является асимптотической касательной в точке A_0. Если она действительно такой является и если она к тому же является и характеристической, то*, в силу (7,17), (7,19) и (3,22),

$$\sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r \omega_r = 0 , \tag{7,20}$$

следовательно, согласно (5,3), (7,19) и (7,20), *каждая гиперквадрика, которая имеет с гиперповерхностью (A_0) в точке A_0 касание 3-го порядка, имеет в направлении данной прямой с гиперповерхностью (A_0) в точке A_0 касание 2-го порядка*. Ввиду (7,18), (7,19) и (5,3), *можно то же самое сказать о всякой асимптотической касательной в точке A_0, которая в то же время является K-главной (или K'-главной) прямой. Это утверждение справедливо также для K^*-главной и K'^*-главной прямой*, что можно легко видеть и аналитически проверить следующим образом: если прямая (7,12) является K^*-главной, соответственно, K'^*-главной, то

$$\Omega_0^* = \Omega_1^* = \ldots = \Omega_{n-1}^* = 0 , \tag{7,21}$$

соответственно

$$\Omega_0'^* = \Omega_1'^* = \ldots = \Omega_{n-1}'^* = 0 . \tag{7,22}$$

Следовательно, в первом случае, в силу (7,7), будет $\Omega_r = 2\omega_r\vartheta$; $r = 1, 2, \ldots, n-1$, а во втором — $\Omega_r = 2\omega_r\vartheta'$; $r = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда, согласно (7,19), в обоих случаях $\sum_{r=1}^{n-1} (\frac{1}{3}\Omega_r - \frac{1}{2}\lambda_r\Omega_0)\,\omega_r = 0$, откуда, на основании (5,3), следует высказанное утверждение. Наконец, *каждая характеристическая прямая и каждая K^*-главная (или K'^*-главная) прямая* (7,12) *в гиперплоскости α_n является асимптотической касательной в точке A_0 к гиперповерхности (A_0)*.

Если прямая (7,12) *обладает тем свойством, что она является асимптотической касательной к гиперповерхности (A_0) в точке A_0 и что ее K^*-линеаризирующая (или K'^*-линеаризирующая) прямая лежит в касательном подпространстве асимптотического $(n-2)$-конуса с вершиной в точке A_0 вдоль его прямой* (7,12), *то в этом касательном подпространстве содержится вся линеаризирующая плоскость прямой* (7,12) (т. е. плоскость, определенная прямыми (7,12) и (7,14)), *и всякая гиперквадрика, которая имеет с гиперповерхностью (A_0) в точке A_0 касание 2-го порядка, имеет с этой гиперповерхностью в направлении прямой* (7,12) *касание 3-го порядка*. Действительно, если справедливо (7,19) и $\sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r^*\omega_r = 0$, причем последнее уравнение выражает то обстоятельство, что K^*-линеаризирующая прямая

$\left[A_0, \sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r^* A_r + \Omega_0^* A_n\right]$ прямой (7,12) лежит в касательном подпространстве асимптотического $(n-2)$-конуса гиперповерхности (A_0) в точке A_0 вдоль его прямой (7,12), то будет

$$0 = \sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r^* \omega_r = \sum_{r=1}^{n-1} (\Omega_r - 2\omega_r \vartheta)\, \omega_r = \sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r \omega_r - 2\vartheta \Omega_0 = \sum_{r=1}^{n-1} \Omega_r \omega_r\,,$$

откуда, на основании (5,3), легко вывести доказываемое утверждение.

Мы могли бы, далее, проводить двойственные рассуждения с K^*-линеаризирующим, соответственно, с K'^*-линеаризирующим подпространством пространства (7,13). Для этой цели можно было бы воспользоваться и полярным соответствием π.

8. Из (7,17) вытекает

$$\omega_i \Omega_0 - \omega_n \Omega_i = 0\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{8,1}$$

Наоборот, каждая прямая (7,12), которая не лежит в гиперплоскости α_n и для которой справедливо (8,1), является характеристической (или даже K-главной). Если положить $\omega_j = x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ можно — пользуясь все время локальной системой координат — уравнения (8,1) вместе с уравнением $x_0 = 0$ толковать как уравнения $n-1$ кубических $(n-2)$-поверхностей в гиперплоскости α_0 (т. е. многообразий V^3_{n-2}); обозначим их последовательно через

$$\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}\,. \tag{8,2}$$

Кубические $(n-2)$-поверхности имеют всегда общую точку, которая не лежит в гиперплоскости α_n. Если ее избрать за точку A_n, то такой выбор значит то, что

$$b_{nn}^{(i)} = 0\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,; \tag{8,3}$$

и что прямая $[A_0 A_n]$ является характеристической (возможно, K-главной).

В таком случае можно провести классификацию нулевых соответствий N, и, следовательно, тоже слоев V, руководствуясь характером описанной общей точки многообразий (8,2) или же, по случаю, тем, как они распадаются. Позднее мы будем изучать в особенности тот случай, когда (можно реперы выбрать так, что) многообразия (8,2) имеют общую особую точку. Согласно (8,1), (8,3), (3,19)—(3,22), можно этот случай (опять-таки при подходящем выборе реперов) охарактеризовать аналитически уравнениями (3,17) и $\omega_{i0} + \omega_{ni} = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Другие возможности классификации рассматриваемого случая дает уравнение (5,3). В отделе 9 пока только покажем, что к этому случаю (существование общей особой точки многообразий (8,2)) принадлежат тоже нулевые соответствия N, которые являются огибающими кореляций.

Если проследить свойства многообразий (8,2), можно из коэффициентов $b^{(i)}_{rs}$ ($i = 1, 2, \ldots, n - 1$; $r, s = 1, 2, \ldots, n$) конструировать инварианты. На примере покажем этот процесс лишь в простом случае $n = 3$. Φ_1, Φ_2 являются в таком случае кубическими кривыми, и уравнения касательных к ним (в локальной системе координат) в точках пересечения их с прямой $[A_1A_2]$ при $x_0 = 0$ имеют вид

$$y_1x_1 + y_2x_2 - \frac{x_3}{4y_1}\,(b^{(1)}_{11}y_1^2 + \overline{b^{(1)}_{12} + b^{(1)}_{21}}\,y_1y_2 + b^{(1)}_{22}y_2^2) = 0\,,$$

$$y_1x_1 + y_2x_2 - \frac{x_3}{4y_2}\,(b^{(2)}_{11}y_1^2 + \overline{b^{(2)}_{12} + b^{(2)}_{21}}\,y_1y_2 + b^{(2)}_{22}y_2^2) = 0\,,$$

где

$$y_1^2 + y_2^2 = 0\,, \quad y_1y_2 \neq 0\,. \tag{8,4}$$

Эти касательные по две совпадают тогда и только тогда, если

$$b^{(2)}_{11}y_1^3 + (b^{(2)}_{12} + b^{(2)}_{21} - b^{(1)}_{11})\,y_1^2y_2 + (b^{(2)}_{22} - b^{(1)}_{12} - b^{(1)}_{21})\,y_1y_2^2 - b^{(1)}_{22}y_2^3 = 0\,,$$

откуда, вследствие (8,4) и симметричности коэффициентов $b^{(i)}_{rs}$ ($i, r, s = 1, 2$) по всем индексам, легко вытекает

$$(b^{(1)}_{11} - 3b^{(1)}_{22})^2 + (b^{(2)}_{22} - 3b^{(2)}_{11})^2 = 0\,. \tag{8,5}$$

Затем известным способом действительно обнаружим, что

$$\begin{aligned}
\delta b^{(1)}_{11} &= 6e_{10} - e_{00}b^{(1)}_{11} + 3e_{12}b^{(2)}_{11}\,,\\
\delta b^{(2)}_{11} &= 2e_{10} - e_{12}b^{(1)}_{11} - e_{00}b^{(2)}_{11} + 2e_{12}b^{(1)}_{22}\,,\\
\delta b^{(1)}_{22} &= 2e_{10} - 2e_{12}b^{(2)}_{11} - e_{00}b^{(1)}_{22} + e_{12}b^{(2)}_{22}\,,\\
\delta b^{(2)}_{22} &= 6e_{10} - 3e_{12}b^{(1)}_{22} - e_{00}b^{(2)}_{22}\,.
\end{aligned}$$

Итак, если выражение в левой части соотношения (8,5) обозначить, скажем, через U, будет $\delta U = -\,2e_{00}U$, так что U — инвариант.

9. В серии своих работ по проективной дифференциальной геометрии соответствий Э. Чех изучает — вслед за несложным случаем, когда каждая прямая, проходящая через точку A_0 является характеристической[9]) — *соответствия с тотально K-линеаризирующей прямой*,[10]) *соответствия с K-главной гиперплоскостью*[11]) *и соответствия, которые являются огибающими коллинеаций.*[12]) Исследуем теперь, возможна ли подобная классификация в случае нашего нулевого соответствия N.

Если бы каждая прямая, проходящая через точку A_0, была характеристической, то матрица

$$\begin{pmatrix} \Omega_0 & \Omega_1 & \ldots & \Omega_{n-1} \\ \omega_n & \omega_1 & \ldots & \omega_{n-1} \end{pmatrix}$$

[9]) См. [1], часть I, стр. 106.

[10]) См. [1], часть II, стр. 109.

[11]) См. [1], часть VI, стр. 298.

[12]) См. [1], часть V, стр. 168.

должна была бы иметь ранг 1 при любом выборе $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, так что должна была бы существовать форма Пфаффа φ такая, что было бы справедливо (тождественно) $\Omega_0 = \omega_n\varphi$, $\Omega_i = \omega_i\varphi$; $i = 1, 2, \dots, n-1$. Но, очевидно, не может тождественно выполняться $\Omega_0 - \omega_n\varphi = 0$, чем доказано, что в случае нашего нулевого соответствия N не может случиться, чтобы каждая прямая, проходящая через точку A_0 была характеристической.

Если бы существовала тотально K-линеаризирующая прямая, то это значило бы, что можно выбрать касательную кореляцию K так, чтобы выполнялось (тождественно)

$$\Omega_0 = c_0\Omega\ , \quad \Omega_i = c_i\Omega\ ; \quad i = 1, 2, \dots, n-1\ ; \tag{9,1}$$

где Ω — квадратичная форма в $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ не равная тождественно нулю: $\Omega = \sum\limits_{r=1}^{n} \sum\limits_{s=1}^{n} b_{rs}\omega_r\omega_s$.

Из (9,1) непосредственно следует

$$b_{11} = b_{22} = \dots = b_{n-1,n-1} \neq 0\ , \quad b_{nn} = 0\ ; \tag{9,2}$$

$$b_{rs} = 0\ ; \quad r, s = 1, 2, \dots, n\ ; \quad r \neq s\ . \tag{9,3}$$

Из (9,1) и (3,22) следует далее

$$b^{(i)}_{rs} = c_i b_{rs}\ ; \quad r, s = 1, 2, \dots, n\ ; \quad i = 1, 2, \dots, n-1\ , \tag{9,4}$$

так что по (9,3) будет $b^{(i)}_{rs} = 0$; $r, s = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, n-1$; $r \neq s$. В частности, для $s = i$ будет $b^{(i)}_{ri} = 0$; $r = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, n-1$; $r \neq i$. Следовательно, согласно (3,21), будет также

$$b^{(r)}_{ii} = 0\ ; \quad i, r = 1, 2, \dots, n-1;\ i \neq r\ . \tag{9,5}$$

Из (9,2), (9,4) и (9,5) легко вывести $c_i = 0$; $i = 1, 2, \dots, n-1$, так что в данном случае, в силу (9,1), будет тождественно

$$\Omega_i = 0\ ; \quad i = 1, 2, \dots, n-1\ . \tag{9,6}$$

Итак, тотально K-линеаризирующей прямой является прямая $[A_0A_n]$. Прямые (7,12) такие, что для них $\Omega = 0$, являются теперь, конечно, K-главными и образуют гиперквадрику, которая представляет собой проекцию с тотально K-линеаризирующей прямой $[A_0A_n]$ асимптотического $(n-2)$-конуса гиперповерхности (A_0) в точке A_0. В последнем, 10-том отделе покажем геометрическое построение таких нулевых соответствий.

Чтобы в случае нулевого соответствия N существовала K-главная гиперплоскость, формы (3,22) должны быть необходимо приводимы. Но форма Ω_0 является приводимой тогда и только тогда, если $n \leqq 3$. Значит, как только $n \geqq 4$, указанный тип нулевых соответствий N не существует. При $n = 2$ можно всегда выбрать реперы таким образом, чтобы существовала K-главная гиперплоскость (для любой точки A_0); она совпадает с единственной K-главной прямой, которая существует для каждой точки A_0. Последний оставшийся случай $n = 3$ будет разобран в другой работе, в которой будут подробно изучены нулевые соответствия и слой поверхностей в S_3.

Наконец, приступим к исследованию, существуют ли нулевые соответствия N, которые — в известном смысле, определенном Э. Чехом — являются *огибающими кореляций.* Выберем реперы так, чтобы касательная кореляция K соответствия N была задана уравнениями (7,2), дифференцированием которых, согласно (2,2), (2,7) и (3,17), получается

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}K \,.\, A_0 = -(\omega_{00} + \omega_{nn})\,\alpha_n\,, \\ &\mathrm{d}K \,.\, A_i = 2\omega_i\alpha_0 + \sum_{k=1}^{n-1}(\omega_{ik} + \omega_{ki})\,\alpha_k + (\omega_{ni} - \omega_{i0})\,\alpha_n\,; \\ &\qquad i = 1, 2, \ldots, n-1\,; \\ &\mathrm{d}K \,.\, A_n = (\omega_{00} + \omega_{nn})\,\alpha_0 + \sum_{i=1}^{n-1}(\omega_{i0} + \omega_{ni})\,\alpha_i\,. \end{aligned}\right\} \qquad (9,7)$$

Нулевое соответствие N является огибающей своих касательных кореляций K, если же K зависит от s параметров, причем $1 \leqq s < n$. Но $[\omega_1\omega_2 \ldots \ldots \omega_{n-1}] \neq 0$ и из (9,7₂) следует сразу же, что *может наступить только случай $s = n - 1$.*

Из (9,7) легко вытекает, что $s = n - 1$ тогда и только тогда, если

$$\left.\begin{aligned} &[\omega_{ik} + \omega_{ki} - \delta_i^k(\omega_{00} + \omega_{nn})\,,\ \omega_1\,\omega_2 \ldots \omega_{n-1}] = 0\,, \\ &[\omega_{i0} + \omega_{ni},\, \omega_1\omega_2 \ldots \omega_{n-1}] = 0\,,\quad [\omega_{i0} - \omega_{ni},\, \omega_1\omega_2 \ldots \omega_{n-1}] = 0\,; \\ &\qquad\qquad i, k = 1, 2, \ldots, n-1\,. \end{aligned}\right\} \qquad (9,8)$$

В таком случае будет, согласно (3,1) и $(9,8_1)$, при $i = k$ также

$$[\omega_{00} + \omega_{nn},\, \omega_1\omega_2 \ldots \omega_{n-1}] = 0\,,\quad [\omega_{ii}\omega_1\omega_2 \ldots \omega_{n-1}] = 0\,;\ i = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Действительно, тогда при выполнении (9,8) вдоль каждой кривой (которая в этом случае является прямой) $\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{n-1} = 0$ будет $\mathrm{d}K \,.\, A_j = 0$; $j = 0, 1, \ldots, n$.

Из $(9,8_1)$ и $(3,19_1)$ вытекает $b_{kn}^{(i)} = 0$; $i, k = 1, 2, \ldots, n-1$, так что ввиду (3,20), также $b_{nk}^{(i)} = 0$; $i, k = 1, 2, \ldots, n-1$, что совместно с $(9,8_2)$, ввиду $(3,19_2)$, значит, что $\omega_{i0} + \omega_{ni} = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Таким образом, мы пришли к случаю, рассмотренному уже в отделе 8. Изучать его будем позднее.

10. *Нулевое соответствие N с тотально K-линеаризирующей прямой,* согласно (9,6), (3,22) и (3,19), характеризируется аналитически уравнениями (3,17) и

$$\left.\begin{aligned} &\omega_{ik} + \omega_{ki} = 0\,,\quad -\omega_{00} + 2\omega_{ii} - \omega_{nn} = 0\,, \\ &\omega_{i0} + \omega_{ni} = 0\,,\quad i, k = 1, 2, \ldots, n-1,\quad i \neq k\,. \end{aligned}\right\} \qquad (10,1)$$

Уравнения $(10,1_2)$, ввиду $(3,1)$, эквивалентны уравнениям

$$\omega_{00} + \omega_{nn} = 0\,, \quad \omega_{ii} = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{10,2}$$

Внешне дифференцируя уравнения $(10,2_2)$, получаем, ввиду $(10,1_1)$, $(10,1_3)$ и $(3,17)$ $[\omega_{i0}\,\omega_i] = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$, так что

$$\omega_{i0} = \beta_i \omega_i\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{10,3}$$

Внешне дифференцируя уравнения $(10,1_1)$, получаем, ввиду $(3,17)$, $(10,1_3)$, $(10,1_1)$ и $(10,2_2)$ $[\omega_{i0}\omega_k] + [\omega_{k0}\omega_i] = 0$; $i, k = 1, 2, \ldots, n-1$; $i \neq k$, так что, вследствие $(10,3)$, $(\beta_i - \beta_k)[\omega_i\omega_k] = 0$; $i, k = 1, 2, \ldots, n-1$; $i \neq k$. Отсюда следует, что можно положить $\beta_i = \beta$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$, и, следовательно, согласно $(10,3)$, будет

$$\omega_{i0} = \beta\omega_i\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{10,4}$$

Внешне дифференцируя уравнения $(10,4)$, получаем далее, ввиду $(3,17)$, $(10,1_3)$, $(10,2)$ и $(10,4)$ $[\mathrm{d}\beta - \beta^2\omega_n - 2\beta\omega_{nn} + \omega_{n0}, \omega_i] = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n-1$, откуда сразу же вытекает (так как $n \geq 3$!)

$$\mathrm{d}\beta = \beta^2\omega_n + 2\beta\omega_{nn} - \omega_{n0}\,. \tag{10,5}$$

По $(10,1_3)$, $(10,4)$ и $(10,5)$ $\mathrm{d}(\beta A_0 + A_n) = (\beta\omega_n + \omega_{nn})(\beta A_0 + A_n)$, так что точка $\beta A_0 + A_n$ геометрически фиксирована. Можем выбрать ее за точку A_n; вследствие такого выбора будет $\beta = 0$, и, следовательно, согласно $(10,5)$, $(10,4)$, и $(10,1)$,

$$\omega_{n0} = 0\,, \quad \omega_{i0} = \omega_{ni} = 0\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{10,6}$$

Итак, геометрически фиксированной будет и гиперплоскость α_0.

Рассмотрим теперь $(n-2)$-конус $\varkappa$, который лежит в гиперплоскости α_0 и который из точки A_n проектирует $(n-3)$-квадрику, которая является пересечением подпространства $[A_1A_2 \ldots A_{n-1}]$ и асимптотического $(n-2)$-конуса гиперповерхности (A_0) в точке A_0 нашего слоя V. Боковая линия этого $(n-2)$-конуса $\varkappa$ —

$$[A_n \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s A_s]\,, \tag{10,7}$$

где

$$\sum_{s=1}^{n-1} \omega_s^2 = 0\,. \tag{10,8}$$

Для дифференциала прямой $(10,7)$ по $(10,6)$ найдем

$$\mathrm{d}[A_n \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s A_s] = \omega_{nn}[A_n \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s A_s] + [A_n \sum_{s=1}^{n-1} (\mathrm{d}\omega_s + \sum_{r=1}^{n-1} \omega_{rs}\omega_r)\, A_s]\,. \tag{10,9}$$

Согласно $(10,1)$, $(10,2)$ и $(10,8)$ $\sum_{s=1}^{n-1} \omega_s(\mathrm{d}\omega_s + \sum_{r=1}^{n-1} \omega_{rs}\omega_r) = 0$, и это уравнение выражает то обстоятельство, что прямые $(10,7)$ и $(10,9)$ полярно сопряжены относительно $(n-2)$-конуса $\varkappa$. Иначе говоря, прямая (10,9) лежит в касательном подпространстве $(n-2)$-конуса $\varkappa$ вдоль его прямой (10,7), откуда следует, что $(n-2)$-конус $\varkappa$ геометрически фиксирован. Следовательно, можно брать геометрически фиксированными и прямые $[A_n A_1]$, $[A_n A_2], \ldots, [A_n A_{n-1}]$ (которые полярно сопряжены по отношению к $(n-2)$-конусу $\varkappa$), что не значит ни что иное, как

$$\omega_{ik} = 0\,; \quad i, k = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{10,10}$$

Согласно (10,6), форма ω_{nn} является полным дифференциалом, значит, можно положить $\omega_{nn} = \mathrm{d} \log \varrho$. В силу $(10,2_1)$ тогда будет $\omega_{00} = \mathrm{d} \log \frac{1}{\varrho}$. Если же вместо точки A_n взять точку ϱA_n, то, ввиду (2,1), нужно точку A_0 заменить точкой $\frac{1}{\varrho} A_0$, и для наших реперов получим

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}A_0 &= \sum_{s=1}^{n-1} \omega_s A_s + \omega_n A_n\,, \\ \mathrm{d}A_i &= \qquad\quad \omega_i A_i\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,; \\ \mathrm{d}A_n &= 0\,; \end{aligned}\right\} \tag{10,11}$$

здесь мы, конечно, применим также (3,17), (10,6) и (10,10). Формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ (которые являются кратными первоначальных форм $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$) теперь являются полными дифференциалами:

$$\omega_n = \mathrm{d}u\,, \quad \omega_i = \mathrm{d}u_i\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,.$$

Интегрируя систему (10,11), получаем

$$\left.\begin{aligned} A_i &= u_i A_n + C_i\,; \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,; \\ A_0 &= \frac{1}{2}\Big(2u + \sum_{s=1}^{n-1} u_s^2\Big) A_n + \sum_{s=1}^{n-1} u_i C_i + C_0\,, \end{aligned}\right\} \tag{10,12}$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ — аналитически фиксированные линейно независимые точки; действительно, в силу (10,12) и (2,1), будет $[C_0 C_1 \ldots C_{n-1} A_n] = 1$. Следовательно, точки $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}, C_n = A_n$ можно считать вершинами системы координат, причем все координаты точки C_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$ равны нулю, за исключением j-той, которая равна 1. Если затем обозначить координаты точки A_0 в данной системе координат $x_0, x_1, \ldots, x_n$ то, ввиду $(10,12_2)$, уравнение гиперповерхности (A_0) рассматриваемого слоя будет $\sum_{s=1}^{n-1} x_s^2 + 2x_0 x_n - 2u x_0^2 = 0$. Итак, имеем следующий результат:

Слой V такой, что связанное с ним нулевое соответствие N имеет тотально K-линеаризирующую прямую, образован (в области, несодержащей точку A_n) *связкой гиперквадрик, которые имеют в точке A_n взаимно касание 3-го порядка. Тотально K-линеаризирующая прямая слоя в точке A_0 соеди-*

няет эту точку с точкой A_n, и K-главная гиперквадрика для точки A_0 является проекцией с прямой $[A_0A_n]$ всех прямых гиперквадрики (A_0), проходящих через точку A_0.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Э. Чех:* Проективная дифференциальная геометрия соответствий между двумя пространствами, часть I, Чехословацкий математический журнал, *2* (*77*), 1952, 91—107; часть II, там же, *2* (*77*), 1952, 109—123; часть V, там же, *2* (*77*), 1952, 167—188; часть VI, там же, *2* (*77*), 1952, 297—331.

[2] *Z. Nádeník:* O projektivních diferenciálních invariantech rovinné vrstvy křivek, Časopis pro pěstování matematiky, *78* (1953), 229—258.

[3] *A. Pantazi:* Sur certaines propriétés projectives des familles de surfaces, Mathematica (Cluj), *VII* (1932), 70—88.

Résumé

LA COUCHE D'HYPERSURFACES ET LA CORRESPONDANCE NULLE DANS UN ESPACE PROJECTIF A n DIMENSIONS

ZBYNĚK NÁDENÍK, Praha.

(Reçu le 22 mars 1956.)

Soit A_0 un point d'hypersurface (A_0) d'une couche d'hypersurfaces dans un espace projectif S_n à n dimensions (c'est à dire d'une famille d'hypersurfaces dans S_n remplissante simplement une région de S_n) et α_n l'hyperplan tangent à l'hypersurface (A_0) au point A_0. On considère la correspondance nulle $A_0 \longleftrightarrow \alpha_n$ sous la supposition qu'elle est biunivoque. On la désigne par N.

Si l'on associe à chaque point A_0 de chaque hypersurface de notre couche un repère $A_0, A_1, \ldots, A_n$ tel que dans la correspondance N on a $A_0 \rightarrow \alpha_n = [A_0A_1 \ldots A_{n-1}]$, on peut le particulariser de manière suivante (on se sert de la symbolique bien connue de M. E. Cartan):

$$\mathrm{d}A_0 = \omega_{00}A_0 + \sum_{s=1}^{n} \omega_s A_s\,, \quad \mathrm{d}A_i = \sum_{s=0}^{n-1} \omega_{is}A_s + \omega_i A_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)\,,$$

$$\mathrm{d}A_n = \sum_{s=0}^{n} \omega_{ns}A_s\,.$$

A l'aide de ces repères, on peut associer à chaque point A_0 de notre couche un faisceau d'hyperquadriques, qui ont toutes au point A_0 le contact du troisième

ordre. On étudie le rapport de ce faisceau au système d'hyperquadriques qui ont au point A_0 le contact du second ordre avec l'hypersurface de couche passante par le point A_0.

La correspondance dans laquelle $[A_0\, \mathrm{d}A_0] \longleftrightarrow [\alpha_n\, \mathrm{d}\alpha_n]$, est la corrélation polaire qui est dans le point A_0 induite par les polarités (ordinaires), dont les bases forment les hyperquadriques du faisceau mentionné plus haut.

A la correspondance N, toutes les corrélations K^*

$$K^*A_0 = \alpha_n\,, \quad K^*A_i = -\,\alpha_i + \mu_i\alpha_n \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)\,,$$
$$K^*A_n = -\,\alpha_0 + \mu_n\alpha_n$$

sont tangentes (au sens défini par M. E. Čech. Aussi dans ce que suit, on emploie la terminologie de M. E. Čech de ses travaux sur la géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces; voir la bibliographie). On étudie l'homographie adjointe K^*K^*, les corrélations tangentes à la correspondance nulle N^{-1} et aussi le contact éventuel du second ordre des corrélations tangentes avec la correspondance N.

La condition pour que la droite $[A_0\, \mathrm{d}A_0]$ soit caractéristique est

$$\omega_1 : \omega_2 : \ldots : \omega_{n-1} : \omega_n = \Omega_1 : \Omega_2 : \ldots : \Omega_{n-1} : \Omega_0\,, \tag{*}$$

où $\Omega_0 = 2\sum_{s=1}^{n-1}\omega_s^2$ et Ω_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ sont certaines formes quadratiques dans $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ (voir (3,22) dans le travail). On peut écrire les conditions (*) de la manière suivante: $\omega_i\Omega_0 - \omega_n\Omega_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, et les interpréter comme les équations des hypersurfaces cubiques dans S_{n-1}. Les correspondances N pour lesquelles ces variétés V_{n-2}^3 ont un point singulier commun, seront étudiées plus tard. On démontre seulement, que ce cas contient aussi celles correspondances N qui sont les enveloppes des corrélations; il est possible seulement le cas quand la corrélation tangente dépende de $n-1$ paramètres.

A la fin, on détermine les couches d'hypersurfaces dans S_n pour lesquelles la correspondance nulle N parmi leurs points et leurs hyperplans tangents a la droite totalement K-linéarisante. Chaque couche de cette espèce est formée par un faisceau d'hyperquadriques qui ont au point commun le contact du troisième ordre.