Karel Winkelbauer

К теории обобщенных случайных процессов

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 4, 517–521

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100218

К ТЕОРИИ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

КАРЕЛ ВИНКЕЛЬБАУЭР (Karel Winkelbauer), Прага.

(Поступило в редакцию 23/IX 1955 г.)

И. М. Гельфанд ввел в статье [1] понятие обобщенного случайного процесса в смысле теории распределений Шварца (см. [2]) заданием вероятностей, для которых выполняются некоторые требования согласованности и непрерывности. В настоящей статье показано, что вероятностную меру, задающую обобщенный случайный процесс, можно характеризовать еще другим, также очень простым образом.

Пусть X — множество всех комплексных бесконечно дифференцируемых функций от k вещественных переменных, обладающих компактным суппортом. Обозначим через $\tilde{X}$ множество всех распределений в X в смысле Шварца (ср. [2], гл. I, § 2). Пусть F — множество всех комплексных функций в X. Обозначим через $\mathfrak{F}$ минимальную σ-алгебру подмножеств множества F, содержащую все множества вида:

$$\{f\colon \operatorname{Re} f(\varphi) < a\,, \quad \operatorname{Im} f(\varphi) < b\}\,; \quad \varphi \in X;\ a, b \text{ — вещественны}\,. \tag{1}$$

Если μ — вероятностная мера в $\mathfrak{F}$ такова, что $\bar{\mu}(\tilde{X}) = 1$ ($\bar{\mu}$ — внешняя мера, индуцированная мерой μ), то пространство вероятностей $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ назовем *обобщенным случайным процессом*.

Пусть P обозначает множество всех k-членных последовательностей неотрицательных целых чисел. Для $p \in P$, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, и для целого $r \geqq 0$ мы положим:

$$\mathrm{d}^p = \frac{\partial^{p_1 + p_2 + \ldots + r_k}}{\partial t_1^{p_1}\, \partial t_2^{p_2} \ldots \partial t_k^{p_k}}\,, \quad \mathrm{d}^r = \mathrm{d}^{(r, r, \ldots, r)}\,. \tag{2}$$

Если $p \in P$, $q \in P$, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$, то $p \leqq q$ означает, что $p_i \leqq q_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Через $\langle -m, m\rangle$ (m — вещественно) мы обозначим множество всех точек $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ k-мерного евклидова пространства R^k, для которых $|t_i| \leqq m$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Для любого вещественного m $X\langle -m, m\rangle$ будет обозначать множество всех $\varphi \in X$, суппорт которых содержится в множестве $\langle -m, m\rangle$. Для каждого $A \subset X$ мы положим

$A\langle -m, m\rangle = A \cap X\langle -m, m\rangle$. Когда $\varphi \in X$, полагаем $\|\varphi\| = \max |\varphi(t)|$, $t \in R^k$. — Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы пространство вероятностей $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ было обобщенным случайным процессом.

Теорема. *Пространство вероятностей* $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ *является обобщенным случайным процессом тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

[1] *для каждой пары* φ_1, φ_2 *функций из* X

$$\mu(\{f\colon f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)\}) = 1\,; \tag{I}$$

[2] *для всякого натурального числа* m *и для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $N(m, \varepsilon)$ *такое, что при всех* $r \geqq N(m, \varepsilon)$ (r — *целое неотрицательное число*) *имеет место неравенство:*

$$\mu(\bigcap_{\varphi \in S} \{f\colon |f(\varphi)| \leqq r(2m)^{kr}\, \|\mathrm{d}^r\varphi\|\}) \geqq 1 - \varepsilon \tag{II}$$

для каждого конечного множества $S \subset X\langle -m, m\rangle$.

Для доказательства теоремы мы введем некоторые дальнейшие понятия. — Если $\varphi \in X$, $\varphi_n \in X$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то по определению последовательность φ_n сходится к φ (мы пишем: $\varphi_n \to \varphi$), когда существует вещественное число m такое, что $\varphi \in X\langle -m, m\rangle$, $\varphi_n \in X\langle -m, m\rangle$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ и $\|\mathrm{d}^p(\varphi_n - \varphi)\| \to 0$ при всяком $p \in P$.

Множество X является относительно обычного определения сложения функций группой. Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс всех подгрупп группы X. Пусть $\mathfrak{D}$ — класс всех счетных подгрупп $D \subset X$, обладающих следующим свойством:

для каждого натурального m *и* $\varphi \in X\langle -m, m\rangle$ *существуют* $\varphi_n \in D\langle -m, m\rangle$ *такие, что* $\varphi_n \to \varphi$. (3)

Лемма 1. *Класс* $\mathfrak{D}$ *покрывает множество* X.

Доказательство. Пусть m — натуральное число и $p \in P$. Так как $X\langle -m, m\rangle$ относительно метрики ϱ_p, $\varrho_p(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{q \leqq p} \|\mathrm{d}^q(\varphi_1 - \varphi_2)\|$, сепарабельно, то существует счетное множество $D_{p,m}$, плотное в $X\langle -m, m\rangle$ относительно метрики ϱ_p. Пусть теперь D^* — минимальная подгруппа группы X, содержащая все множества $D_{p,m}$. Методом диагональной последовательности мы убедимся легко в том, что D^* обладает свойством (3). Видно, что D^* счетно и, следовательно, $D^* \in \mathfrak{D}$. Для каждого $\varphi \in X$ обозначим через D_φ подгруппу, образованную множеством $D^* \cup \{\varphi\}$. Ясно, что $D_\varphi \in \mathfrak{D}$. Отсюда легко вытекает утверждение леммы.

Лемма 2. *Каждое счетное соединение подгрупп из* $\mathfrak{D}$ *содержится в некоторой подгруппе из* $\mathfrak{D}$.

Доказательство. Подгруппа, образованная счетным соединением подгрупп из $\mathfrak{D}$, счетна и, следовательно, лежит в $\mathfrak{D}$.

Если $A \in \mathfrak{A}$, то мы обозначим через $T(A)$ множество всех $f \in F$, выполняющих следующие требования:

$$f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2) \text{ для всякой пары } \varphi_1, \varphi_2 \text{ из } A; \tag{4}$$

для каждого натурального числа m существует $p_m \in P$ и натуральное число s_m такое, что

$$|f(\varphi)| \leqq s_m \, \|\mathrm{d}^{p_m}\varphi\| \text{ для всякого } \varphi \in A\langle -m, m\rangle . \tag{5}$$

Отображение T класса $\mathfrak{A}$ в класс всех подмножеств множества F обладает следующими свойствами:

$$\text{если } D \in \mathfrak{D},\ g \in T(D), \text{ то } T(X) \cap \bigcap_{\varphi \in D} \{f\colon f(\varphi) = g(\varphi)\} \neq 0 ; \tag{6}$$

$$\text{если } D \in \mathfrak{D}, \text{ то } T(D) \in \mathfrak{F}; \tag{7}$$

$$\text{если } A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathfrak{A},\ A \subset B, \text{ то } T(B) \subset T(A); \tag{8}$$

$$T(X) = \tilde{X} \neq 0. \tag{9}$$

Доказательство. Соотношение (9) легко следует из свойств распределений (см. [2], гл. III, § 6). Утверждение (8) очевидно. Свойство (7) вытекает из того, что для каждого $A \in \mathfrak{A}$

$$T(A) = [\bigcap_{\varphi_1, \varphi_2 \in A} \{f\colon f(\varphi_1 + \varphi_2) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2)\}] \cap$$

$$\cap [\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{p \in P} \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcap_{\varphi \in A\langle -m, m\rangle} \{f\colon |f(\varphi)| \leqq s\|\mathrm{d}^p\varphi\|\}] , \tag{10}$$

ибо $D \in \mathfrak{D}$ счетно. — Пусть $\varphi \in X$, $D \in \mathfrak{D}$, $g \in T(D)$. Тогда, согласно (3), найдем $\varphi_n \in D$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\varphi_n \to \varphi$. Следовательно, для некоторого натурального m $\varphi \in X\langle -m, m\rangle$, $\varphi_n \in X\langle -m, m\rangle$. Согласно (5), $|g(\varphi_n - \varphi_r)| \leqq$ $\leqq s_m\|\mathrm{d}^{p_m}(\varphi_n - \varphi_r)\|$ при любом n и r. Из (4) следует, что $g(\varphi_n - \varphi_r) =$ $= g(\varphi_n) - g(\varphi_r)$. Так как $\|\mathrm{d}^{p_m}(\varphi_n - \varphi_r)\| \to 0$ при $n, r \to \infty$, то существует $\lim g(\varphi_n)$. Когда $\varphi_n^* \to \varphi$, $\varphi_n^* \in D$, мы убедимся аналогичным методом в том, что $\lim g(\varphi_n^*) = \lim g(\varphi_n)$. Если мы положим для всякого $\varphi \in X$ $f(\varphi) =$ $= \lim g(\varphi_n)$, где $\varphi_n \in D$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, $\varphi_n \to \varphi$, то f будет лежать в множестве, написанном в левой части неравенства (6).

Доказательство теоремы. Из свойств (6), (7), (8), (9) преобразования T и лемм 1, 2 вытекает согласно теореме, приведенной в работе А. Шпачка [3], что для того, чтобы $\bar{\mu}(T(X)) = 1$, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(T(D)) = 1$ для всякого $D \in \mathfrak{D}$. В достаточности условий [1] и [2] теоремы мы убедимся, сравнивая их с видом (10) множества $T(A)$; очевидно, из условий [1] и [2] следует, что $\mu(T(D)) = 1$ для каждого $D \in \mathfrak{D}$. Обратно, если $\bar{\mu}(T(X)) = 1$, то условие [1] выполнено и для всякого натурального m

$$\bar{\mu}(\bigcup_{r=1}^{\infty} \bigcap_{\varphi \in X\langle -m,m\rangle} \{f: |f(\varphi)| \leqq r(2m)^{kr} \, \|\mathrm{d}^r\varphi\|\}) = 1 \,,$$

так как $\|\mathrm{d}^q\varphi\| \leqq (2m)^{\sum\limits_{i=1}^{k}(p_i - q_i)} \|\mathrm{d}^p\varphi\|$ для всякого $\varphi \in X\langle -m, m\rangle$, $p \in P$, $q \in P$, $q \leqq p$, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_k)$. Из свойства непрерывности внешней меры для монотонно возрастающих последовательностей множеств вытекает непосредственно необходимость условия [2]. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. М. Гельфанд*: Обобщенные случайные процессы. Докл. Акад. наук СССР, том 100 (1955), № *5*, 853—856.

[2] *L. Schwartz:* Théorie des distributions, t. I. Paris, 1950.

[3] *A. Špaček:* Regularity properties of random transforms. Czechosl. Mathem. Journ., vol. *5* (1955), 143—151.

Résumé

SUR LA THÉORIE DES DISTRIBUTIONS ALÉATOIRES DE SCHWARTZ

KAREL WINKELBAUER, Praha.

(Reçu le 23 septembre 1955.)

Soit X l'ensemble de toutes les fonctions complexes de k variables réelles, indéfiniment dérivables et à support compact. Désignons par $\tilde{X}$ l'ensemble de toutes les distributions sur X au sens de Schwartz (voir [2], ch. I, § 2). Soit F l'ensemble de toutes les fonctions complexes sur X. Nous appellerons $\mathfrak{F}$ la σ-algèbre minimale des sous-ensembles de l'ensemble F contenant tous les ensembles de la forme (1) (voir le texte russe). Si μ est une mesure de probabilité sur $\mathfrak{F}$ telle, que $\bar{\mu}(\tilde{X}) = 1$ ($\bar{\mu}$ est la mesure extérieure induite par la mesure μ), alors l'espace de probabilité $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ est appellé *distribution aléatoire*.

Soit P l'ensemble de toutes les suites de nombres entiers non négatifs contenant k membres. Pour $p \in P$, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$, r naturel ou zéro, nous définissons d^p et d^r suivant les formules (2); $p \leqq q$, $p \in P$, $q \in P$, signifie $p_i \leqq q_i$ ($i = 1, 2, \ldots, k$). Nous désignerons par $\langle -m, m\rangle$ (m réel) l'ensemble de tous les points $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ de l'espace euclidien à k dimensions R^k, pour lesquels $|t_i| \leqq m$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Pour tout nombre réel m, nous désignerons par

$X\langle -m, m\rangle$ l'ensemble de tous les $\varphi \in X$ à support contenu dans l'ensemble $\langle -m, m\rangle$. Le théorème suivant donne des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace de probabilité $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ soit une distribution aléatoire.

Théorème. *L'espace de probabilité* $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ *est une distribution aléatoire, si et seulement si les conditions suivantes sont remplies:*

[1] *pour chaque paire* φ_1, φ_2 *de fonctions de* X *est valable* (I);

[2] *pour tout nombre naturel* m *et pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $N(m, \varepsilon)$ *tel, que pour tous les* $r \geqq N(m, \varepsilon)$ (r *un nombre entier non négatif*) *l'inégalité* (II) *a lieu pour tout ensemble fini* $S \subset X\langle -m, m\rangle$.

La méthode de la démonstration est basée sur le théorème 1 contenu dans le travail [3]. La classe des ensembles correspondant à $\mathfrak{D}$ dans [3] est la classe de tous les sous-groupes dénombrables, qui, dans un certain sens, sont denses dans X.