Milan Kolibiar

К аксиоматике модулярных структур

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 3, 381–386

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100203

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага

К АКСИОМАТИКЕ МОДУЛЯРНЫХ СТРУКТУР

МИЛАН КОЛИБИАР (Milan Kolibiar), Братислава.

(Поступило в редакцию 3/X 1955 г.)

Многие авторы выработали системы аксиом для дистрибутивных структур, которые содержат как можно наименьшее число аксиом (смотри, например, [1], [2], [3]). В этой заметке приводится аналогичная система аксиом для модулярных структур. Исходным пунктом послужит нам тождество

$$[(a \cap b) \cap c] \cup (a \cap d) = [(d \cap a) \cup (c \cap b)] \cap a\,, \tag{1}$$

которое в структуре эквивалентно условию модулярности

$$x \leqq z \Rightarrow x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z\,.^{*)} \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть S — множество с двумя операциями $\cap$, $\cup$, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

P 1. *Для произвольных элементов $a, b, c, d \in S$ справедливо $[(a \cap b) \cap c] \cup (a \cap d) = [(d \cap a) \cup (c \cap b)] \cap a$.*

P 2. *Существует такой элемент $J \in S$, что для каждого $a \in J$ будет $a \cup J = J$, $J \cap a = a$.*

Тогда S является модулярной структурой с наибольшим элементом J. Аксиомы **P 1** *и* **P 2** *взаимно независимы.*

Доказательство. Пусть $a \in S$. Обозначим $a \cap J = b$. В силу P 1 и P 2

$$\begin{aligned} a = J \cap a = (a \cup J) \cap a = [(J \cap a) \cup (J \cap J)] \cap a = \\ = [(a \cap J) \cap J] \cup (a \cap J) = (b \cap J) \cup b\,. \end{aligned} \tag{1.1}$$

---

*) Действительно, пусть в структуре S для произвольных элементов $a, b, c, d \in S$ имеет место тождество (1). Пусть $x \leqq z$. Тогда

$$\begin{aligned} x \cup (y \cap z) = (z \cap y) \cup x = [(z \cap y) \cap y] \cup (z \cap x) = [(x \cap z) \cup (y \cap y)] \cap z = \\ = (x \cup y) \cap z\,. \end{aligned}$$

Пусть, наоборот, для структуры S справедливо (2). Тогда

$$[(a \cap b) \cap c] \cup (a \cap d) = (d \cap a) \cup [(c \cap b) \cap a] = [(d \cap a) \cup (c \cap b)] \cap a\,.$$

Согласно (1.1), Р 2, Р 1, Р 2, (1.1), будет

$$a \cap J = [(b \cap J) \cup b] \cap J = [(b \cap J) \cup (J \cap b)] \cap J = \\ = [(J \cap b) \cap J] \cup (J \cap b) = (b \cap J) \cup b = a . \qquad (1.2)$$

Если в Р 1 положить $a = c = J$ а затем применить Р 2, (1.2), то получим

$$b \cup d = d \cup b . \qquad (1.3)$$

Если в Р 1 положить $b = c = d = J$ и затем применить (1.2), Р 2, то получим

$$a \cup a = a . \qquad (1.4)$$

Если в Р1 положить $b = c = J$, а затем применить (1.2), Р 2, то получим

$$a \cup (a \cap d) = a . \qquad (1.5)$$

Из (1.5) и (1.3) следует

$$(a \cap d) \cup a = a . \qquad (1.6)$$

Если в Р 1 положим $c = d = J$ и применим Р 2, (1.2) и (1.6), то получим

$$(a \cup b) \cap a = a . \qquad (1.7)$$

Согласно (1.4) и (1.7),

$$a \cap a = a . \qquad (1.8)$$

Положив в Р 1 $c = J$, $d = b$ и применив (1.2), (1.4), Р 2, (1.6), получим

$$a \cap b = b \cap a . \qquad (1.9)$$

Для доказательства ассоциативного закона для обеих операций используем только следующие свойства:

$$\text{P } 1, (1.8), (1.4), (1.9), (1.3), (1.6), (1.7) . \qquad (\text{A})$$

Сначала докажем несколько вспомогательных соотношений.

Если в Р 1 положить $b = a$, $d = c$ и затем применить (1.8), (1.4), (1.9), то получим

$$c \cap a = (c \cap a) \cap a . \qquad (\text{A}.1)$$

Положив в Р1 $d = a$ и применив (1.8), (1.7), получим

$$[(a \cap b) \cap c] \cup a = a . \qquad (\text{A}.2)$$

Если в Р 1 положим $c = b$ и применим (А.1), (1.9), (1.8), (1.3), то получим

$$(b \cap a) \cup (d \cap a) = a \cap [b \cup (d \cap a)] . \qquad (\text{A}.3)$$

Если в Р 1 положим $a = x \cup z$, $b = c = y$, $d = x$, а затем применим (А.1), (1.7), (1.3), (1.7) и (1.9), (1.8), то получим

$$(x \cup y) \cap (x \cup z) = [(z \cup x) \cap y] \cup x . \qquad (\text{A}.4)$$

Теперь обозначим $(a \cup b) \cup c = A$, $a \cup (b \cup c) = B$. Согласно (1.7),

$$A \cap (a \cup b) = a \cup b . \qquad (\text{A}.5)$$

Согласно (1.7), (A.5), (A.2)

$$a \cup A = [(a \cup b) \cap a] \cup A = \{[A \cap (a \cup b)] \cap a\} \cup A = A\,.$$

Из последнего соотношения, используя (1.7) и (1.9), получим

$$a = a \cap (a \cup A) = a \cap A\,. \tag{A.6}$$

Согласно (1.3) и (A.6), соответственно, (1.7), (1.3) и (1.9), будет

$$b \cap A = b\,, \quad c \cap A = c\,. \tag{A.6'}$$

А теперь имеют место соотношения

$$\begin{aligned} B &= (a \cap A) \cup [(b \cap A) \cup (c \cap A)] \quad \text{ввиду (A.6), (A.6}'\text{)},\\ &= [(b \cap A) \cup (c \cap A)] \cup (a \cap A) \quad \text{ввиду (1.3)},\\ &= \{A \cap [b \cup (c \cap A)]\} \cup (a \cap A) \quad \text{ввиду (A.3)},\\ &= \{[A \cup (a \cap A)] \cap [b \cup (c \cap A)]\} \cup (a \cap A) \quad \text{ввиду (1.6), (1.9) и (1.3)},\\ &= \{(a \cap A) \cup [b \cup (c \cap A)]\} \cap [(a \cap A) \cup A] \quad \text{ввиду (A.4)},\\ &= [a \cup (b \cup c)] \cap A = B \cap A \quad \text{ввиду (A.6), (A.6}'\text{), (1.6) и (1.9)}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$B \cap A = B\,. \tag{A.7}$$

Из (A.7), используя (1.3), получим

$$A \cap B = A\,. \tag{A.7'}$$

Из (A.7), (A.7′) и (1.9) следует $A = B$. Этим доказан ассоциативный закон для операции $\cup$. Для доказательства нам понадобились лишь свойства (A). Для доказательства ассоциативного закона для операции $\cap$ достаточно доказать, что верно тождество, двойственное P 1 (тогда будем иметь систему свойств, двойственных свойствам системы (A)):

$$[(a \cup b) \cup c] \cap (a \cup d) = [(d \cup a) \cap (c \cup b)] \cup a\,. \tag{P 1*}$$

Но P 1* получается сразу же из соотношений (A.4), (1.3), если применим ассоциативный закон для операции $\cup$:

$$\begin{aligned} [(a \cup b) \cup c] \cap (a \cup d) = [a \cup (b \cup c)] \cap (a \cup d) = [(d \cup a) \cap (b \cup c)] \cup a =\\ = [(d \cup a) \cap (c \cup b)] \cup a\,. \end{aligned}$$

Этим мы доказали, что S — структура. Так как условие модулярности следует из P 1, то S — модулярная структура.

Что аксиомы P 1, P 2 независимы, видно на следующих примерах:

1. (к аксиоме P 1)

$\cap$	a	J
a	a	J
J	a	J

$\cup$	a	J
a	a	J
J	J	J

2. (к аксиоме P 2)

$\cap$	a	J
a	a	a
J	a	J

$\cup$	a	J
a	a	a
J	a	a

Этим доказательство теоремы завершается.

Замечание. На примере можно легко показать, что аксиому P 2 нельзя заменить следующим более слабым условием: P 2′. Существуют такие элементы I, $J \in S$, что для каждого элемента $a \in S$ будет $a \cup I = I$, $J \cap a = a$. (Из P 1 и P 2′ не следует $I = J$.)

Теорема 2. *Множество S с двумя операциями $\cap$, $\cup$, удовлетворяющее аксиомам* P 1 *и*

P′ 2. $[a \cup (b \cap b)] \cap b = b$ *для каждых* a, $b \in S$

является модулярной структурой.

Аксиомы P 1 и P′ 2 *взаимно независимы.*

Доказательство. Согласно P′ 2 и P 1,

$$a = [(a \cap a) \cup (a \cap a)] \cap a = [(a \cap a) \cap a] \cup (a \cap a)$$

откуда, ввиду P′ 2 следует

$$a \cap a = \{[(a \cap a) \cap a] \cup (a \cap a)\} \cap a = a\,. \tag{2.1}$$

Из (2.1) и P′ 2 следует

$$(a \cup b) \cap b = b\,. \tag{2.2}$$

Положив в P1 $b = c = a$ и применив (2.1) и P′ 2, получим

$$a \cup (a \cap d) = a\,. \tag{2.3}$$

Согласно (2.1) и (2.3),

$$a \cup a = a \cup (a \cap a) = a\,. \tag{2.4}$$

Если в P 1 положить $b = a$, $d = c$, а затем применить (2.1) и (2.4), то получим

$$(c \cap a) \cap a = a \cap c\,. \tag{2.5}$$

Если в P 1 положить $b = c$, а затем применить (2.5) и (2.1), то получим

$$(c \cap a) \cup (a \cap d) = [(d \cap a) \cup c] \cap a\,. \tag{2.6}$$

Полагая в (2.6) $d = a$ и используя (2.1), получаем

$$(c \cap a) \cup a = (a \cup c) \cap a\,. \tag{2.7}$$

Согласно (2.3) и (2.2),

$$a \cap (a \cap b) = [(a \cup (a \cap b)] \cap (a \cap b) = a \cap b\,. \tag{2.8}$$

Согласно (2.5), (2.8) и (2.5)

$$(a \cap b) \cap (b \cap a) = (a \cap b) \cap [(a \cap b) \cap b] = (a \cap b) \cap b = b \cap a \,. \quad (2.9)$$

Согласно (2.9) и (2.3),

$$(a \cap b) \cup (b \cap a) = (a \cap b) \cup [(a \cap b) \cap (b \cap a)] = a \cap b \,. \quad (2.10)$$

Положив в P1 $c = a$, $d = b$ и применив (2.10) и (2.5), получим

$$[(a \cap b) \cap a] \cup (a \cap b) = a \cap b \,. \quad (2.11)$$

Положив в P1 $c = a$, $d = a \cap b$ и применив (2.11) и (2.8), получим

$$(a \cap b) \cap a = a \cap b \,. \quad (2.12)$$

Если в P 1 положить $c = a$ и затем применить (2.12), (2.6) и (2.5), то получим

$$(a \cap b) \cup (a \cap d) = a \cap [(b \cap a) \cup d] \,. \quad (2.13)$$

Если в (2.13) положим $b = a$ и используем (2.1) и (2.3), получим

$$a \cap (a \cup d) = a \,. \quad (2.14)$$

Согласно (2.5) и (2.14),

$$(a \cup b) \cap a = [a \cap (a \cup b)] \cap (a \cup b) = a \cap (a \cup b) = a \,. \quad (2.15)$$

Согласно (2.7) и (2.15),

$$(a \cap b) \cup b = (b \cup a) \cap b = b \,. \quad (2.16)$$

Согласно (2.16) и (2.14),

$$(a \cap b) \cap b = (a \cap b) \cap [(a \cap b) \cup b] = a \cap b \,. \quad (2.17)$$

Согласно (2.17) и (2.5),

$$a \cap b = (a \cap b) \cap b = b \cap a \,. \quad (2.18)$$

Согласно (2.18) и (2.2),

$$b \cap (a \cup b) = (a \cup b) \cap b = b \,. \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} a \cup b &= \{[(a \cup b) \cap a] \cap a\} \cup [(a \cup b) \cap b] \,, \text{ согласно (2.15), (2.1), (2.2)} \\ &= \{[b \cap (a \cup b)] \cup (a \cap a)\} \cap (a \cup b), \text{ согласно P 1,} \quad (2.20) \\ &= (b \cup a) \cap (a \cup b), \text{ согласно (2.19), (2.1).} \end{aligned}$$

Согласно (2.20), (2.18) и (2.20),

$$a \cup b = (b \cup a) \cap (a \cup b) = (a \cup b) \cap (b \cup a) = b \cup a \,. \quad (2.21)$$

Потому что ассоциативные законы являются следствием свойств (A), которые мы уже доказали, то S — структура (модулярная).

На следующих примерах видно, что P 1 и P′ 2 независимы:

3. (к аксиоме P 1)

$\cap$	a	b
a	a	b
b	a	b

$\cup$	a	b
a	a	a
b	a	a

4. (к аксиоме P′ 2)

$\cap$	a	b
a	a	a
b	a	b

$\cup$	a	b
a	a	a
b	a	a

Этим доказательство завершается.

Замечание. Остается открытым вопрос, можно ли какую-нибудь из аксиом P 1, P′2 заменить более простым условием; например P 1 тождеством $(a \cap b) \cup (a \cap c) = [(c \cap a) \cup b] \cap a$ (это тождество в структуре эквивалентно условию модулярности) или P′ 2 тождеством $(a \cup b) \cap b = b$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. Birkhoff:* Lattice theory. New York, 1948.

[2] *R. Croisot:* Axiomatique des lattices distributives. Canad. J. Math. *3* (1951), 24—27.

[3] *M. Sholander:* Postulates for distributive lattices. Canad. J. Math. *3* (1951), 28—30.

Summary

ON THE AXIOMATIC OF MODULAR LATTICES

MILAN KOLIBIAR, Bratislava.

(Received October 3, 1955.)

This paper presents two minimal sets of postulates for modular lattices. We make use of the fact that in lattices the identity

$$[(a \cap b) \cap c] \cup (a \cap d) = [(d \cap a) \cup (c \cap b)] \cap a \tag{1}$$

is equivalent to the condition of modularity:

$$x \leqq z \quad \text{implies} \quad x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z\,.$$

In this paper there are the following two sets of independent postulates (the first set deals with modular lattices with the greatest element):

1. P 1. The identity (1) holds.

P 2. There is an element J such that $a \cup J = J$, $J \cap a = a$ holds for arbitrary a.

2. P 1 and

P′ 2. $[a \cup (b \cap b)] \cap b = b$ for arbitrary a, b.

In the first case the postulate P 2 cannot be replaced by the weaker postulate P′ 2: There are elements I, J such that $a \cup I = I$, $J \cap a = a$ holds for arbitrary a.