Miroslav Laitoch

Совпадение центральных дисперсий 1-го и 2-го рода, соответствующих дифференциальному уравнению второго порядка $y'' = Q(x)y$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 3, 365–380

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100202

Чехословацкий математический журнал, т. 6 (81) 1956, Прага.

СОВПАДЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНЫХ ДИСПЕРСИЙ 1-ГО И 2-ГО РОДА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ ВТОРОГО ПОРЯДКА $y'' = Q(x)y$

МИРОСЛАВ ЛАЙТОХ (Miroslav Laitoch), Брно.

(Поступило в редакцию 27/IX 1955 г.)

В настоящей работе я занимаюсь нахождением дифф. уравнений второго порядка

$$y'' = Q(x)y\ , \tag{a}$$

интегралы которых колеблются, причем в множестве всех решений любого из таких дифференциальных уравнений для каждого интеграла y существует, во-первых, интеграл, производная которого имеет те же нули, как и интеграл y, и, во-вторых, интеграл, имеющий те же нули, как и производная интеграла y. При решении этой проблемы используется теория дисперсий.[1]) С точки зрения этой теории нужно отыскать дифф. уравнения вида (a) с тем свойством, что соответствующие им ν-ые центральные дисперсии первого и второго рода тождественно равны между собой.

1. Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' = Q(x)\,y\ , \tag{1}$$

причем коэффициент Q является в открытом интервале (a, b) непрерывной и отрицательной функцией. Далее мы предполагаем, что интегралы этого дифференциального уравнения в интервале (a, b) колеблются, т. е. если $x_0 \in (a, b)$ — произвольное число, то каждый интеграл дифф. уравнения (1) имеет в интервале (a, b), с одной стороны, бесконечное число нулей, больших чем x_0, а с другой стороны — бесконечное число нулей, меньших чем x_0. На протяжении всей работы мы исключаем из рассмотрения тривиальное решение дифференциального уравнения (1), а именно, интеграл $y(x) \equiv \equiv 0$.

[1]) См. [1], стр. 199 и сл.

Теорию дисперсий разработал О. Борувка в работе [1] при указанных выше предположениях[2]) с той только разницей, что Борувка предполагал, что коэффициент Q дифф. уравнения (1) является функцией, определенной на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$, в котором колеблются интегралы дифф. уравнения (1). Однако, всю теорию можно без труда совершенно аналогично разработать и при наших предположениях, т. е. для интервала (a, b). Не повторяя всех рассуждений, мы приведем в настоящем пункте лишь те результаты этой теории (сформулированные для нашего случая), которые нами будут в дальнейшем использованы.

Для интегралов дифф. уравнения (1) справедлива теорема:

Пусть $\xi, \eta \in (a, b)$ — произвольные числа, u и v — линейно независимые интегралы дифф. уравнения (1). *Уравнения*

а) $u(\xi)\, v(\eta) - u(\eta)\, v(\xi) = 0$, б) $u'(\xi)\, v'(\eta) - u'(\eta)\, v'(\xi) = 0$, в) $u(\xi)\, v'(\eta) - u'(\eta)\, v(\xi) = 0$

выполняются тогда и только тогда, когда

а) ξ, η — *два корня какого-либо интеграла y дифф. уравнения* (1),

б) ξ, η — *два корня производной какого-либо интеграла y дифф. уравнения* (1),

в) ξ — *корень какого-либо интеграла y дифф. уравнения* (1), *а η — корень его производной.*

Пусть $x \in (a, b)$ — произвольное число. Пусть $\boldsymbol{A}$ означает множество интегралов дифф. уравнения (1), одним корнем которых является x, $\boldsymbol{B}$ — множество интегралов, отличающихся тем, что одним корнем их производных является x. Известно, что у всех интегралов множества $\boldsymbol{A}$ или $\boldsymbol{B}$ все корни общие, общими же являются и корни их производных.

Пусть $n = 1, 2, \ldots$; для $x \in (a, b)$ обозначим через $\varphi_n(x)$ $[\varphi_{-n}(x)]$ n-й следующий за числом x (предыдущий числу x) общий корень интегралов множества $\boldsymbol{A}$, через $\psi_n(x)$ $[\psi_{-n}(x)]$ n-й следующий за числом x (предыдущий числу x) общий корень производных от интегралов множества $\boldsymbol{B}$.

Таково определение двух счетных систем функций φ_ν и ψ_ν, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Функция φ_ν (ψ_ν) называется ν-й центральной дисперсией первого рода (второго рода). Функцию же φ_1 (ψ_1) мы называем особо-основной (о.) центральной (ц.) дисперсией первого (второго) рода.

Нетрудно убедиться, что $\varphi_n(x) = \overbrace{\varphi \ldots \varphi}^{n}(x)$, $\psi_n(x) = \overbrace{\psi \ldots \psi}^{n}(x)$, причем φ (ψ) означает о. ц. дисперсию первого (второго) рода и что функция φ_{-n} (ψ_{-n}) является обратной к функции φ_n (ψ_n).

Относительно этих функций можно далее показать, что они обладают в интервале (a, b) следующими свойствами:

---

[2]) См. [1], стр. 200 и 216.

$$\left.\begin{array}{l}
1.\ \varphi_\nu \text{ имеют непрерывную производную третьего порядка,}\\
\quad \psi_\nu \text{ имеют непрерывную производную первого порядка,}\\
2.\ \text{они возрастают от } a \text{ до } b\ (\varphi_\nu'(x) > 0,\ \psi_\nu'(x) > 0)\,,\\
3.\ \text{для любого } x \in (a, b)\\
\qquad \ldots < \varphi_{-2}(x) < \varphi_{-1}(x) < x < \varphi_1(x) < \varphi_2(x) < \ldots\,,\\
\qquad \ldots < \psi_{-2}(x) < \psi_{-1}(x) < x < \psi_1(x) < \psi_2(x) < \ldots\,.
\end{array}\right\} \tag{2}$$

Пусть, далее, в настоящем пункте φ, ψ означает произвольную ц. дисперсию первого, соотв., второго рода.

Учитывая уравнения а) и б) предыдущей теоремы, нетрудно видеть, что функции тождественно удовлетворяют в интервале (a, b) следующим билинейным соотношениям между интегралами дифф. уравнения (1):

$$u(x)\, v[\varphi(x)] - u[\varphi(x)]\, v(x) = 0\,, \quad u'(x)\, v'[\psi(x)] - u'[\psi(x)]\, v'(x) = 0\,. \tag{3}$$

Производные этих функций даны формулами

$$\varphi'(x) = -\frac{u'(x)\, v[\varphi(x)] - u[\varphi(x)]\, v'(x)}{u(x)\, v'[\varphi(x)] - u'[\varphi(x)]\, v(x)}\,, \tag{4}$$

$$\psi'(x) = -\frac{Q(x)}{Q[\psi(x)]}\,\frac{u(x)\, v'[\psi(x)] - u'[\psi(x)]\, v(x)}{u'(x)\, v[\psi(x)] - u[\psi(x)]\, v'(x)}\,, \tag{5}$$

где u, v — два линейно независимых интеграла дифф. уравнения (1). В силу уравнения в) приведенной ранее теоремы, знаменатели в формулах (4) и (5) отличны от нуля для любого $x \in (a, b)$.

Эти формулы для производных можно при помощи формул (3) привести к виду

$$\varphi'(x) = \begin{cases} \dfrac{u^2[\varphi(x)]}{u^2(x)} & \text{для} \quad u(x) \neq 0 \qquad (6_1)\\[2ex] \dfrac{u'^2(x)}{u'^2[\varphi(x)]} & \text{для} \quad u(x) = 0 \qquad (6_2)\end{cases}$$

$$\psi'(x) = \begin{cases} \dfrac{Q(x)}{Q[\psi(x)]}\,\dfrac{u'^2[\psi(x)]}{u'^2(x)} & \text{для} \quad u'(x) \neq 0 \qquad (7_1)\\[2ex] \dfrac{Q(x)}{Q[\psi(x)]}\,\dfrac{u^2(x)}{u^2[\psi(x)]} & \text{для} \quad u'(x) = 0 \qquad (7_2)\end{cases}$$

где u означает интеграл дифф. уравнения (1).

2. Из определения ν-ых дисперсий легко видеть, что $\varphi(x) \equiv \psi(x) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow \varphi_\nu(x) \equiv \psi_\nu(x)$ для любого $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$, причем φ, ψ означают, соответственно, о. ц. дисперсию первого и второго рода. Итак, мы видим, что вопрос о тождественности ν-ых ц. дисперсий первого и второго рода приводит к вопросу о тождественности о. ц. дисперсий первого и второго рода; этим вопросом мы и будем в дальнейшем заниматься.

В наших рассуждениях существенно используем возможности преобразования интегралов дифф. уравнения $y'' = Q(x)\,y$ в интегралы другого дифф. уравнения того же вида. Связь между интегралами двух таких дифф. уравнений и взаимоотношения между их о. ц. дисперсиями первого и второго рода в одном частном случае будут приведены в следующих теоремах. Условимся в дальнейшем обозначать коэффициент дифф. уравнения 1, (1) буквой q соотв. p, если он будет определен в интервале $(-\infty, \infty)$, и буквой q_1 соотв. p_1 [q_1^* соотв. p_1^*], если он будет определен в интервале (l, ∞) $[(-\infty, l)]$, $l \in (-\infty, \infty)$.

Теорема 1. *Рассмотрим дифф. уравнение*

$$y'' = q(x)\,y\,, \tag{1}$$

где функция q непрерывна и отрицательна в интервале $(-\infty, \infty)$. Если y — интеграл этого дифф. уравнения, определенный в интервале $(-\infty, \infty)$, то функция

$$z(x) = (x - l)^{\frac{1}{2}}\, y[\log(x - l)] \tag{2}$$

будет в интервале (l, ∞) интегралом дифф. уравнения

$$z'' = q_1(x)\,z\,, \tag{3}$$

где $q_1(x) = -\dfrac{1}{(x-l)^2}\cdot\{\tfrac{1}{4} - q[\log(x - l)]\}$. *Наоборот, каждый интеграл z дифф. уравнения (3) можно выразить в интервале (l, ∞) в виде (2), где y есть некоторый интеграл дифф. уравнения (1), определенный в интервале $(-\infty, \infty)$.*

Доказательство теоремы ввиду его элементарности мы оставляем в стороне. По той же причине оставляются в стороне и доказательства остальных теорем настоящего пункта.

Заметим, что коэффициент q_1 дифф. уравнения (3) является в интервале (l, ∞) непрерывной функцией, меньшей, чем $-\dfrac{1}{4(x-l)^2}$.

Теорема 2. *Рассмотрим дифф. уравнение*

$$z'' = p_1(x)\,z\,, \tag{4}$$

где функция p_1 непрерывна в интервале (l, ∞) и меньше, чем $-\dfrac{1}{4(x-l)^2}$. Если z — интеграл этого дифф. уравнения, определенный в интервале (l, ∞), то функция

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}\,.\,z(\mathrm{e}^x + l) \tag{5}$$

будет в интервале $(-\infty, \infty)$ интегралом дифф. уравнения

$$y'' = p(x)\,y\,, \tag{6}$$

где $p(x) = \frac{1}{4} + e^{2x} \,.\, p_1(e^x + l)$. *Наоборот, каждый интеграл* y *дифф. уравнения* (6) *можно выразить в интервале* $(-\infty, \infty)$ *в виде* (5), *где* z — *некоторый интеграл дифф. уравнения* (4), *определенный в интервале* (l, ∞).

Заметим, что коэффициент p дифф. уравнения (6) является в интервале $(-\infty, \infty)$ непрерывной и отрицательной функцией.

Преобразуя по формуле (5) интегралы дифф. уравнения (3), получим интегралы дифф. уравнения (1), причем справедливо утверждение: если y — интеграл дифф. уравнения (1), то преобразование по формуле (2) переводит его в некоторый интеграл z дифф. уравнения (3). Этот интеграл z переходит в свою очередь преобразованием по формуле (5) обратно в данный интеграл y дифф. уравнения (1). Аналогично, преобразуя по формуле (5) интеграл z дифф. уравнения (4), получим некоторый интеграл y дифф. уравнения (6) и наоборот, преобразуя этот интеграл y по формуле (2), получим опять данный интеграл z дифф. уравнения (4). Поэтому мы говорим, что преобразования, данные формулами (2) и (5) взаимно обратны.

Из предыдущих теорем 1 и 2 непосредственно следует, что если интегралы дифф. уравнения (1), соотв. (4) колеблются в интервале $(-\infty, \infty)$, соотв. (l, ∞), то колеблются и интегралы дифф. уравнения (3), соотв. (6) в интервале (l, ∞), соотв. $(-\infty, \infty)$. В таком случае справедливы следующие теоремы о связи между о. ц. дисперсиями первого рода, соответствующими дифф. уравнениям (1) и (3), соотв. (4) и (6):

Теорема 3. *Пусть* φ *означает о. ц. дисперсию первого рода, соответствующую дифференциальному уравнению* (1) *в интервале* $(-\infty, \infty)$. *Пусть* Φ *означает о. ц. дисперсию первого рода, соответствующую дифф. уравнению* (3) *в интервале* (l, ∞). *Тогда*

$$\varphi[\log (x - l)] = \log [\Phi(x) - l] \quad \text{для} \quad x \in (l, \infty)\,. \tag{7}$$

Теорема 4. *Пусть* Φ *означает о. ц. дисперсию первого рода, соответствующую дифф. уравнению* (4) *в интервале* (l, ∞). *Пусть* φ *означает о. ц. дисперсию первого рода, соответствующую дифф. уравнению* (6) *в интервале* $(-\infty, \infty)$. *Тогда*

$$\Phi(e^x + l) = e^{\varphi(x)} + l \quad \text{для} \quad x \in (-\infty, \infty)\,. \tag{8}$$

Пример 1. В случае, если о. ц. дисперсия первого рода, соответствующая дифф. уравнению (1), имеет вид $\varphi(x) = x + d$, $d > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$, то о. ц. дисперсия первого рода Φ, соответствующая дифф. уравнению (3), выражается формулой (7). Имеем $\log (x - l) + d = \log [\Phi(x) - l]$ и отсюда $\Phi(x) = e^d \,.\, x - l(e^d - 1)$, причем $e^d > 1$, так как $d > 0$.

Пример 2. В случае, если о. ц. дисперсия первого рода, соответствующая дифф. уравнению (4), имеет вид $\Phi(x) = kx + d$, $k > 1$, $x \in (l, \infty)$, причем l дано уравнением $d = -l(k - 1)$, то о. ц. дисперсия первого рода, соответствующая дифф. уравнению (6), выражается формулой (8). Имеем $k(e^x + l) - l(k - 1) = e^{\varphi(x)} + l$ и отсюда $\varphi(x) = x + \log k$, причем $\log k > 0$, так как $k > 1$.

Используя при этих рассуждениях функцию φ_{-1}, обратную к о. ц. дисперсии первого рода φ, можно доказать дальнейшие теоремы, аналогичные теоремам 1—4, и привести дальнейшие примеры, аналогичные примерам 1 и 2. Мы приведем лишь те из них, на которые будем ссылаться в дальнейшем.

Теорема 1*. *Рассмотрим дифф. уравнение*

$$y'' = q(x)\, y\,, \tag{1*}$$

где функция q непрерывна и отрицательна в интервале $(-\infty, \infty)$. Если y — интеграл этого дифф. уравнения, определенный в интервале $(-\infty, \infty)$, то функция

$$z(x) = |x - l|\,.\, y(\log|x - l|) \tag{2*}$$

будет в интервале $(-\infty, l)$ интегралом дифф. уравнения

$$z'' = q_1^*(x)\, z\,, \tag{3*}$$

где $q_1^*(x) = -\dfrac{1}{(x-l)^2}\,.\,[\tfrac{1}{4} - q(\log|x - l|)]$. *Наоборот, каждый интеграл z дифф. уравнения (3*) можно в интервале $(-\infty, l)$ выразить в виде (2*), где y — некоторый интеграл дифф. уравнения (1*), определенный в интервале $(-\infty, \infty)$.*

Заметим, что коэффициент q_1^* дифф. уравнения (3*) является в интервале $(-\infty, l)$ непрерывной функцией, меньшей, чем $-\dfrac{1}{4(x-l)^2}$.

Теорема 3*. *Пусть φ — о. ц. дисперсия первого рода, соответствующая дифф. уравнению (1*) в интервале $(-\infty, \infty)$. Пусть Φ о. ц. дисперсия первого рода, соответствующая дифф. уравнению (3*) в интервале $(-\infty, l)$. Тогда*

$$\varphi_{-1}(\log|x - l|) = \log|\Phi(x) - l| \quad \text{для} \quad x \in (-\infty, l)\,, \tag{7*}$$

причем φ_{-1} — функция, обратная к функции φ.

Пример 1*. В случае, если о. ц. дисперсия первого рода, принадлежащая к дифф. уравнению (1*), имеет вид $\varphi(x) = x + d$, $d > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$, о. ц. дисперсия первого рода Φ, принадлежащая к дифференциальному уравнению (3*), получится из формулы (7*). Имеем $\log|x - l| - d = \log|\Phi(x) - l|$ и отсюда $\Phi(x) = e^{-d}\,.\,x - l(e^{-d} - 1)$ для $x \in (-\infty, l)$, причем $0 < e^{-d} < 1$, так как $d > 0$.

3. Исследуем теперь подробно случай, когда о. ц. дисперсия первого рода, принадлежащая к дифф. уравнению

$$y'' = Q(x)\, y \tag{1}$$

является линейной функцией, а также рассмотрим соотношение между о. ц. дисперииями первого и второго рода.

Для того, чтобы линейная функция

$$\varphi(x) = kx + d \tag{2}$$

была о. ц. дисперсией первого рода, необходимо, чтобы она удовлетворяла условиям 1, (2). Первое из этих условий, очевидно, выполняется, а остальные условия имеют вид $\varphi(x) > x$, $\varphi'(x) > 0$ для любого x, для которого определена φ. Подробным анализом нетрудно обнаружить, что указанные условия соблюдаются тогда и только тогда, если постоянные k, d, встречающиеся в (2), удовлетворяют условиям какого-либо из следующих трех возможных случаев:

$$\left.\begin{array}{l} 1.\ k = 1,\ d > 0, \text{ т. е. } \varphi(x) = x + d \text{ в инт. } (-\infty, \infty), \\ 2.\ k > 1,\ d \text{ — произвольно, т. е. } \varphi(x) = kx + d \text{ в инт. } (l, \infty), \\ 3.\ 0 < k < 1,\ d \text{ — произвольно, т. е. } \varphi(x) = kx + d \text{ в инт. } (-\infty, l)\,, \end{array}\right\} \tag{3}$$

причем в случаях 2 и 3 l дано уравнением $d = -l(k - 1)$.

В следующих трех теоремах мы теперь опишем связь между о. ц. дисперсиями первого и второго рода, предполагая, что о. ц. дисперсия первого рода φ принимает один из видов, указанных в (3).

Теорема 1. *Рассмотрим дифф. уравнение*

$$y'' = q(x)\, y\,, \tag{4}$$

где коэффициент q является в интервале $(-\infty, \infty)$ непрерывной и отрицательной функцией. Пусть в этом интервале интегралы дифф. уравнения колеблются. Если φ — о. ц. дисперсия первого рода, а ψ — о. ц. дисперсия второго рода, принадлежащие к этому дифф. уравнению, то

$$\varphi(x) = x + d \Longleftrightarrow \psi(x) = x + d\,, \quad q(x + d) = q(x)\,,$$

причем мы предполагаем, что $d > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Доказательство. А. По формуле 1, (6_1), если подставить $\varphi(x) = x + d$, $\varphi'(x) = 1$, и по смыслу о. ц. дисперсии первого рода получаем для любого интеграла u дифф. уравнения (4) равенство $u(x + d) = -u(x)$. Последовательным дифференцированием этого соотношения получаем $u'(x + d) = -u'(x)$ (*), $q(x + d)\, u(x + d) = -q(x)\, u(x)$, откуда $q(x + d) = q(x)$ для тех x, для которых $u(x) \neq 0$. Так как u — произвольный интеграл дифф. уравнения (4), можно отсюда заключить, что $q(x + d) = q(x)$ для любого $x \in (-\infty, \infty)$.

Известно, что при сделанных нами предположениях каждый интеграл дифф. уравнения (4) претерпевает между любыми двумя соседними корнями один и только один экстремум. Итак, из соотношения (*) следует, что расстояние между любыми двумя соседними корнями производной любого интеграла дифф. уравнения (4) равно d, т. е. $\psi(x) = x + d$.

Б. По формуле 1, (7_1), если подставить $\psi(x) = x + d$, $\psi'(x) = 1$, $q(x + d) = q(x)$, и по смыслу о. ц. дисперсии второго рода получаем дифференцированием $u(x + d) = - u(x)$ (**) для тех x, для которых $u'(x) \neq 0$. Ввиду произвольного выбора интеграла u дифф. уравнения (4), получаем из соотношения (**), что расстояние между любыми двумя соседними корнями произвольного интеграла этого дифф. уравнения равно d, т. е. $\varphi(x) = x + d$.

Подобным же образом можно доказать следующие две теоремы:

Теорема 2. *Рассмотрим дифф. уравнение*

$$y'' = q_1(x)\, y\,, \tag{5}$$

где коэффициент q_1 является в интервале (l, ∞) непрерывной и отрицательной функцией. Пусть в этом интервале интегралы дифф. уравнения колеблются. Если φ — о. ц. дисперсия первого рода , а ψ — о. ц. дисперсия второго рода, принадлежащие к этому дифф. уравнению, то

$$\varphi(x) = kx + d \Longleftrightarrow \psi(x) = kx + d\,, \quad k^2 q_1(kx + d) = q_1(x)\,,$$

причем мы предполагаем, что $k > 1$, $x \in (l, \infty)$ и l дано уравнением $d = - l(k - 1)$.

Теорема 2*. *Рассмотрим дифф. уравнение*

$$y'' = q_1^*(x)\, y\,, \tag{5*}$$

где коэффициент q_1^* является в интервале $(-\infty, l)$ непрерывной и отрицательной функцией. Пусть в этом интервале интегралы дифф. уравнения колеблются. Если φ — о. ц. дисперсия первого рода, а ψ — о. ц. дисперсия второго рода, принадлежащие к этому дифф. уравнению, то

$$\varphi(x) = kx + d \Longleftrightarrow \psi(x) = kx + d\,, \quad k^2 q_1^*(kx + d) = q_1^*(x)\,,$$

причем мы предполагаем, что $0 < k < 1$, $x \in (-\infty, l)$, и *l дано уравнением $d = - l(k - 1)$.*

4. В настоящем пункте приведем весьма простое необходимое и достаточное условие для того, чтобы о. ц. дисперсии первого и второго рода, принадлежащие к дифф. уравнению

$$y'' = Q(x)\, y \tag{1}$$

совпали, т. е. чтобы было тождественно $\varphi(x) = \psi(x)$.

Дифференцируя данную формулой 1, (4) функцию, получим

$$\varphi'' = - \frac{Q \,.\, [uv(\varphi) - u(\varphi)\, v] + \varphi' \,.\, [u'v'(\varphi) - u'(\varphi)\, v']}{uv'(\varphi) - u'(\varphi)\, v} + \tag{2}$$

$$+ \frac{[u'v(\varphi) - u(\varphi)\, v'] \,.\, \{[u'v'(\varphi) - u'(\varphi)\, v'] + Q(\varphi)\, \varphi' \,.\, [uv(\varphi) - u(\varphi)\, v]\}}{[uv'(\varphi) - u'(\varphi)\, v]^2}\,.$$

В случае $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ из формулы (2) следует, ввиду 1, (3) и с учетом замечания у формулы 1, (5), что должно быть $\varphi''(x) \equiv \psi''(x) \equiv 0$; отсюда, в частности, вытекает, что φ в этом случае обязательно будет линейной функцией. Как известно из рассуждений предыдущего пункта, эта функция может тогда принять вид только одного из случаев 3, (3). Отсюда и из теорем 3,1; 3,2 и 3,2* следует справедливость следующей теоремы:

О. ц. дисперсии первого и второго рода, соответствующие дифференциальному уравнению $y'' = Q(x)\, y$, тождественно равны между собой тогда и только тогда, если о. ц. дисперсия первого рода является линейной функцией, принимающей вид какого-либо из трех случаев, указанных в 3, (3).

5. Исследуем теперь более подробно дифф. уравнения

$$y'' = Q(x)\, y \tag{1}$$

с тождественно равными им соответствующими о. ц. дисперсиями первого и второго рода. Из предыдущего известно, что необходимо и достаточно исследовать дифф. уравнения вида (1) со следующими свойствами:

а) интегралы дифф. уравнения колеблются в интервале определения коэффициента Q и соответствующая о. ц. дисперсия первого рода является линейной функцией одного из видов, указанных в 3, (3),

б) коэффициент Q есть непрерывная и отрицательная функция.

Учитывая теоремы о преобразованиях интегралов одного дифф. уравнения второго порядка вида (1) в интегралы другого дифф. уравнения того же вида, равно как и преобразования соответствующих о. ц. дисперсий первого рода друг в друга в случае, когда они — линейные функции (пункт 2), мы видим на основании теорем из пункта 3, что достаточно ограничиться исследованием того случая, когда о. ц. дисперсия первого рода, соответствующая дифф. уравнению (1), есть линейная функция $\varphi(x) = x + d$, $d > 0$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Действительно, предположим, что дифф. уравнение

$$y'' = q(x)\, y \tag{2}$$

обладает в интервале $(-\infty, \infty)$ свойствами а) и б) и что соответствующая ему о. ц. дисперсия первого рода есть $\varphi(x) = x + d$, $d > 0$. Путем преобразования этого дифф. уравнения по теореме 2,1 получим дифф. уравнение $y'' = q_1(x)\, y$, обладающее свойствами а), б); в интервале (l, ∞) будет

$$q_1(x) = -\frac{1}{(x-l)^2}\cdot\{\tfrac{1}{4} - q[\log(x-l)]\} < -\frac{1}{4(x-l)^2} < 0\,,$$

и по теореме 2,3 и по примеру 2,1 этому дифф. уравнению соответствует о. ц. дисперсия первого рода

$$\Phi(x) = kx - l(k-1)\,, \quad k = e^d > 1\,.$$

Путем преобразования дифф. уравнения (2) по теореме 2,1* получим дифф. уравнение $y'' = q_1^*(x)\, y$, обладающее свойствами а), б); в интервале $(-\infty, l)$ будет

$$q_1^*(x) = -\frac{1}{(x-l)^2} \cdot [\tfrac{1}{4} - q(\log|x-l|)] < -\frac{1}{4(x-l)^2} < 0\,,$$

и по теореме 2,3* и по примеру 2,1* этому дифф. уравнению соответствует о. ц. дисперсия первого рода $\Phi(x) = kx - l(k-1)$, $0 < k = e^{-d} < 1$.

Множество функций q, q_1, q_1^* образует тогда систему S функций с тем свойством, что для каждой функции $Q \in S$ справедливо утверждение: соответствующие дифф. уравнению $y'' = Q(x)\, y$ о. ц. дисперсии первого и второго рода тождественно равны между собой.

Итак, мы ограничимся более подробным исследованием случая дифф. уравнения (2). В следующих двух теоремах мы дадим прежде всего ответ на вопрос о дифф. уравнениях, для которых соответствующая о. ц. дисперсия первого рода является линейной функцией $\varphi(x) = x + d$, $x \in (-\infty, \infty)$.

Теорема 1. *Рассмотрим дифф. уравнение*

$$y'' = q(x)\, y\,, \tag{3}$$

причем коэффициент q — непрерывная функция в интервале $(-\infty, \infty)$, интегралы дифф. уравнения колеблются и $\varphi(x) = x + d$, $d > 0$.

Пусть u, v — два независимых интеграла этого дифф. уравнения и w — их определитель Вронского. Пусть a_ν, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ означают все нули интеграла v и $a_{\nu+1} = a_\nu + d$.

Пусть

$$F(x) = -\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \cdot \alpha(x) \tag{4}$$

где α — первая фаза упорядоченной пары интегралов u, v, данная формулой

$$\alpha(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2} - \nu\pi\right) \cdot \operatorname{sgn} w & \text{для} \quad x = a_\nu\,, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{u(x)}{v(x)} - \nu\pi \cdot \operatorname{sgn} w & \text{для} \quad x \in (a_\nu, a_{\nu+1})\,. \end{cases}$$

Тогда мы утверждаем, что в интервале $(-\infty, \infty)$

1° *функция F является решением разностного уравнения*

$$F(x + d) - F(x) = 1\,,$$

2° *функция F имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно,*

3° *функция F возрастает от $-\infty$ до ∞, $(F'(x) > 0)$,*

4° $-\pi^2 F'^2(x) + \dfrac{3}{4}\dfrac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \dfrac{1}{2}\dfrac{F'''(x)}{F'(x)} = q(x)\,.$

Действительно, свойство 1° функции F следует для $x = a_\nu$ непосредственно из (5) и (4). Для $x \neq a_\nu$ тогда будет $F(x + d) - F(x) = -\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \cdot$ $\cdot\, [\alpha(x + d) - \alpha(x)] = -\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \cdot \left[\operatorname{arctg} \frac{u(x + d)}{v(x + d)} - (\nu + 1)\pi \cdot \operatorname{sgn} w - \right.$ $\left. - \operatorname{arctg} \frac{u(x)}{v(x)} + \nu\pi \cdot \operatorname{sgn} w\right] = -\frac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \cdot \left[\operatorname{arctg} \frac{u(x + d)}{v(x + d)} - \operatorname{arctg} \frac{u(x)}{v(x)} - \right.$ $\left. - \pi \cdot \operatorname{sgn} w\right] = 1$, так как, согласно 1, (3), $u(x + d)\, v(x) - u(x)\, v(x + d) = 0$ и, значит, для $x \neq a_\nu$

$$\frac{u(x + d)}{v(x + d)} = \frac{u(x)}{v(x)} .$$

Первая, вторая и третья производные функции F даны формулами

$$F' = \frac{|w|}{\pi} \cdot \frac{1}{u^2 + v^2}, \quad F'' = -2\frac{|w|}{\pi} \cdot \frac{(uu' + vv')}{(u^2 + v^2)^2},$$

$$F''' = -2\frac{|w|}{\pi} \cdot \frac{(u^2 + v^2)^2 \cdot q - 3(uu' + vv')^2 + w^2}{(u^2 + v^2)^3} .$$

Отсюда мы заключаем, что выполняется свойство 2°.

Свойство 3° следует из (4) и (5), если учесть, что $F'(x) > 0$.

Свойство 4° проверяется вычислением:

$$-\pi^2 F'^2 + \frac{3}{4}\frac{F''^2}{F'^2} - \frac{1}{2}\frac{F'''}{F'} = -\frac{w^2}{(u^2 + v^2)^2} +$$

$$+ \frac{3}{4}\frac{4(uu' + vv')^2}{(u^2 + v^2)^2} + \frac{1}{2}\frac{2[(u^2 + v^2)^2 \cdot q - 3(uu' + vv')^2 + w^2]}{(u^2 + v^2)} = q .$$

Теорема 2. *Пусть в интервале* $(-\infty, \infty)$ *справедливы утверждения:*

1° *функция* F *является решением разностного уравнения* $F(x + d) - F(x) = 1$, $d > 0$,

2° *функция* F *имеет непрерывные производные до третьего порядка включительно,*

3° *функция* F *возрастает от* $-\infty$ *до* ∞, $(F'(x) > 0)$,

4° $q(x) = -\pi^2 F'^2(x) + \frac{3}{4}\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \frac{1}{2}\frac{F'''(x)}{F'(x)}$.

Тогда интегралы дифф. уравнения

$$y'' = q(x)\, y \tag{6}$$

в интервале $(-\infty, \infty)$ *колеблются и соответствующая о. ц. дисперсия первого рода является линейной функцией* $\varphi(x) = x + d$.

Действительно, нетрудно убедиться, что в силу 2°, 3° функции

$$u(x) = \frac{\sin[\pi F(x)]}{\sqrt{F'(x)}}, \quad v(x) = \frac{\cos[\pi F(x)]}{\sqrt{F'(x)}} \tag{7}$$

представляют собой два независимых решения дифф. уравнения (6), колеблющиеся в интервале $(-\infty, \infty)$. По теореме Штурма колеблются, следовательно, все решения дифф. уравнения (6).

Из (7) мы заключаем, что каждые два соседних нуля интеграла u (v) находятся точно на расстоянии d друг от друга. Пусть $x_0 \in (-\infty, \infty)$ — произвольное число и y — интеграл дифф. уравнения (6) такой, что $y(x_0) = 0$. Интеграл y выразим в виде линейной комбинации интегралов u, v:

$$y(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x) = \{c_1 \sin[\pi F(x)] + c_2 \cos[\pi F(x)]\} : \sqrt{F'(x)}.$$

Теперь достаточно показать, что число $x_0 + d$ является корнем интеграла y, непосредственно следующим за корнем x_0. Покажем прежде всего, что $x_0 + d$ является корнем интеграла y. Действительно, имеем $y(x_0 + d) = \{c_1 \sin[\pi F(x_0 + d)] + c_2 \cos[\pi F(x_0 + d)]\} : \sqrt{F'(x_0 + d)} = \{c_1 \sin[\pi F(x_0) + \pi] + c_2 \cos[\pi F(x_0) + \pi]\} : \sqrt{F'(x_0)} = -y(x_0) = 0$, ибо, в силу свойства 1°, $F(x_0 + d) = F(x_0) + 1$, $F'(x_0 + d) = F'(x_0)$.

Между нулями x_0 и $x_0 + d$ интеграла y не лежат уже никакие другие нули интеграла y. В случае $y = c_1 u$ или $y = c_2 v$ это следует из формул (7). Если $c_1 \neq 0 \neq c_2$, то утверждение вытекает из теоремы Штурма об отделении нулей. Ибо, если бы в противном случае между нулями x_0 и $x_0 + l$ интеграла y лежал его дальнейший нуль, то, напр., интеграл u должен был бы иметь в интервале $(x_0, x_0 + d)$ два нуля, что невозможно.

Итак, условия 1°, 2°, 3°, 4°, приведенные в теоремах 1 и 2, необходимы и достаточны для того, чтобы расстояние между любыми двумя соседними нулями какого бы то ни было интеграла дифф. уравнения $y'' = q(x)y$ было d, другими словами, чтобы принадлежащая к этому дифф. уравнению о. ц. дисперсия первого рода была линейной функцией $\varphi(x) = x + d$.

Если кроме того потребовать, чтобы коэффициент q дифф. уравнения $y'' = q(x)\, y$ в теоремах 1 и 2 был отрицательной функцией, то мы знаем, что о. ц. дисперсии первого и второго рода, принадлежащие к такому дифф. уравнению, тождественно равны между собой и наша проблема решена.

В заключение приведем примеры дифф. уравнений таких, что принадлежащие к ним о. ц. дисперсии первого и второго рода тождественно равны между собой. Во всех примерах нетрудно проверить, что соблюдаются условия теоремы 2, равно как и приведенное в предыдущем замечании предположение об отрицательности коэффициента дифф. уравнения.

Пример 1. Функция $F(x) = \frac{1}{d}\,x$ является решением разностного уравнения $F(x + d) - F(x) = 1$. О. ц. дисперсии первого и второго рода, принадлежащие к дифф. уравнению $y'' = -\frac{\pi^2}{d^2}\,y$, общим интегралом которого является функция $y(x) = c_1 \sin\frac{\pi}{d}\,x + c_2 \cos\frac{\pi}{d}\,x$ совпадают, причем $\varphi(x) \equiv \equiv \psi(x) = x + d$.

Пример 2. Функция

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}\left\{\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}}\,.\,\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{a+1}}\operatorname{tg} x\right)\right] + \nu\pi\right\} \\ \qquad\qquad\qquad \text{для} \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \nu\pi, \frac{\pi}{2} + \nu\pi\right), \\ -\frac{1}{2} + \nu \quad \text{для} \quad x = -\frac{\pi}{2} + \nu\pi\,, \quad a > 3,\ \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \end{cases}$$

является решением разностного уравнения $F(x + \pi) - F(x) = 1$. Принадлежащие к дифф. уравнению

$$y'' = -\frac{a^2 + (2\cos^2 x - 1)(2\cos^2 x + 3a)}{(a + \cos^2 x)^2}\,y$$

о. ц. дисперсии первого и второго рода совпадают, причем $\varphi(x) \equiv \psi(x) = = x + \pi$.

Общим интегралом этого дифф. уравнения является функция $y(x) = = \{c_1 \sin[\pi F(x)] + c_2 \cos[\pi F(x)]\} : \sqrt{F'(x)}$; общий интеграл может быть также выражен следующим образом:

$$y(x) = \cos x\sqrt{a + \cos^2 x}\,.\left\{k_1 + k_2\left[\operatorname{tg} x - \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{a+1}}\operatorname{tg} x\right)\right]\right\}.$$

Преобразуя дифф. уравнения в примерах 1 и 2 согласно теореме 2,1, получим дальнейшие примеры дифф. уравнений, а именно, соответственно пр. 3 и 4. Принадлежащие к ним о. ц. дисперсии первого и второго рода также тождественно равны между собой.

Пример 3. О. ц. дисперсии первого и второго рода, принадлежащие к дифференциальному уравнению

$$z'' = -\frac{1 + 4\left(\frac{\pi}{d}\right)^2}{4x^2}\,z\,, \quad x \in (0, \infty)\,,$$

общим интегралом которого является функция

$$z(x) = \sqrt{x}\,.\left[c_1 \sin\left(\frac{\pi}{d}\log x\right) + c_2 \cos\left(\frac{\pi}{d}\log x\right)\right],$$

совпадают, причем $\varphi(x) \equiv \psi(x) = \mathrm{e}^d\,.\,x$.

Пример 4. Аналогично совпадают о. ц. дисперсии первого и второго рода, принадлежащие к дифф. уравнению

$$z'' = -\frac{5a^2 + 2a(13\cos^2\log x - 6) + \cos^2\log x(17\cos^2\log x - 8)}{4x^2(a + \cos^2\log x)^2},$$

$$a > 3, \; x \in (0, \infty),$$

общим интегралом которого является функция

$$z(x) = \sqrt{x} \,.\, \{c_1 \sin[\pi F(\log x)] + c_2 \cos[\pi F(\log x)]\} : \sqrt{F'(\log x)},$$

причем общий интеграл можно выразить также в следующем виде:

$$z(x) = \sqrt{x} \,.\, \cos\log x \sqrt{a + \cos^2\log x} \,.$$

$$.\left\{k_1 + k_2\left[\operatorname{tg}\log x - \frac{1}{\sqrt{a(a+1)}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a}{a+1}} \operatorname{tg}\log x\right)\right]\right\},$$

при этом $\varphi(x) \equiv \psi(x) = e^{\pi} \,.\, x$.

Аналогично из примеров 1 и 2 можно получить примеры 3* и 4*, воспользовавшись преобразованием по теореме 2,1*. Нетрудно было бы привести и дальнейшие примеры.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Борувка О.*: О колеблющихся интегралах дифф. лин. уравнений 2-го порядка, Чех. мат. журнал, Т. *3* (78), 1953, стр. 199 и сл.

Zusammenfassung

DIE IDENTITÄT DER ZENTRALDISPERSIONEN ERSTER UND ZWEITER ART, DIE ZU DER DIFFERENTIALGLEICHUNG ZWEITER ORDNUNG $y'' = Q(x)y$ GEHÖREN

MIROSLAV LAITOCH, Brno.

(Eingelangt am 27. November 1955.)

In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit der Bestimmung stetiger Funktionen Q der Eigenschaft, dass die Integrale der Differentialgleichung

$$y'' = Q(x)\; y \tag{a}$$

oszillieren und dass in der Menge aller Integrale dieser Gleichung (ausser $y(x) \equiv 0$) zu jedem Integral y einerseits ein Integral existiert, dessen Ableitung dieselbe Nullstellen wie y hat und anderseits ein Integral existiert, das dieselben Nullstellen hat, wie die Ableitung des Integrals y.

Zur Lösung dieses Problems gebrauche ich die Theorie der Dispersionen von O. Borůvka [1]. Vom Standpunkte dieser Theorie handelt es sich um die Bestimmung solcher Funktionen Q, dass die zu der Differentialgleichung (a) gehörigen n-ten Zentraldispersionen erster und zweiter Art identisch sind. In der Arbeit wird gezeigt, dass dies dann und nur dann zutritt, wenn die erste Zentraldispersion erster Art φ eine lineare Funktion ist. Es liegen drei Möglichkeiten vor:

1. $\varphi(x) = x + d$ im Interval $(-\infty, \infty)$, $d > 0$,

2. $\varphi(x) = kx + d$ im Interval (l, ∞), $k > 1$, d eine beliebige Zahl,

3. $\varphi(x) = kx + d$ im Interval $(-\infty, l)$, $0 < k < 1$, d eine beliebige Zahl; l ist durch die Gleichung $d = -l(k-1)$ gegeben.

Im 5. Abschnitt wird zuerst die erste Möglichkeit behandelt. Wenn wir in diesem Falle mit q den Koefizienten der Differentialgleichung (a) bezeichnen, so gelten die Sätze:

1. *Es sei eine lineare Differentialgleichung*

$$y'' = q(x)\ y \tag{b}$$

gegeben, wo q eine stetige Funktion im Interval $(-\infty, +\infty)$ ist, wobei die Integrale der Gleichung (b) *oszillieren und die zugehörige Zentraldispersion erster Art $\varphi(x) = x + d$, $d > 0$, ist.*

Es seien u, v zwei unabhängige Integrale der Gleichung (b) *und w ihr Wronskien.*

Es seien a_ν, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, alle Nullstellen des Integrals v, wobei $a_{\nu+1} = a_\nu + d$ ist.

Legen wir $F(x) = -\dfrac{\operatorname{sgn} w}{\pi} \,.\, \alpha(x)$, wo α die erste Phase des geordneten Paares der Integrale u, v ist, welche wir durch die Formel

$$\alpha(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\pi}{2} - \nu\pi\right) . \operatorname{sgn} w & \text{für} \quad x = a_\nu \\ \operatorname{arctg} \dfrac{u(x)}{v(x)} - \nu\pi \,.\, \operatorname{sgn} w & \text{für} \quad x \in (a_\nu, a_{\nu+1}) \end{cases}$$

definieren, dann gilt im Interval $(-\infty, \infty)$ folgendes:

1° *die Funktion F ist eine Lösung der Funktionalgleichung $F(x + d) - F(x) = 1$,*

2° *die Funktion F hat eine stetige Ableitung* 3. *Ordnung,*

3° *die Funktion F wächst von $-\infty$ bis $+\infty$, $(F'(x) > 0)$,*

4° $-\pi^2 F'^2(x) + \dfrac{3}{4} \dfrac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \dfrac{1}{2} \dfrac{F'''(x)}{F'(x)} = q(x)$.

2. *Wenn im Interval $(-\infty, \infty)$ folgendes gilt:*

1° *die Funktion F ist eine Lösung der Funktionalgleichung* $F(x + d) - F(x) = 1$,

2° *die Funktion F hat eine stetige Ableitung* 3. *Ordnung*,

3° *die Funktion F wächst von* $-\infty$ *bis* $+\infty$, $(F'(x) > 0)$,

4° $q(x) = -\pi^2 F'^2(x) + \frac{3}{4}\frac{F''^2(x)}{F'^2(x)} - \frac{1}{2}\frac{F'''(x)}{F'(x)}$,

dann oszillieren die Integrale der Differentialgleichung $y'' = q(x)y$ *im Interval* $(-\infty, +\infty)$ *und die zugehörige erste Zentraldispersion erster Art* φ *ist eine lineare Funktion*, $\varphi(x) = x + d$.

Die weiteren zwei Möglichkeiten 2), 3) werden dann durch solche Transformationen der Differentialgleichung (b) in anderen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gelöst, bei welchen die Linearität der ersten Zentraldispersion erster Art behalten wird.