Czechoslovak Mathematical Journal

Ilja Nestorovich Vekua

О некоторых условиях жесткости поверхностей положительной кривизны

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 6 (1956), No. 2, 143–160

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100187

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. 6 (81) ПРАГА 30. VI. 1956 г. • No 2

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ЖЕСТКОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

И. Н. ВЕКУА, Москва.

Прочитано на IV съезде чехословацких математиков в Праге 6/IX 1955 г.

Мы ставим себе целью указать некоторые новые признаки жесткости поверхностей положительной гауссовой кривизны в отношении бесконечно малых изгибаний. Эти вопросы тесно связаны с некоторыми задачами механики, например, с проблемой безмоментного напряженного состояния упругих оболочек.

Интересующие нас задачи приводят к изичению системы уравнений в частных производных эллиптического типа следующего вида

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} + a\varphi + b\psi = 0\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} + c\varphi + d\psi = 0\,. \tag{1}$$

За последние годы весьма полно изучены общие свойства решений системы (1) и краевые задачи с граничным условием вида

$$\alpha\varphi + \beta\psi = \gamma\,. \tag{2}$$

Эти краевые условия можно толковать как некоторые кинематические связи, наложенные на контур поверхности. Поэтому условия разрешимости задачи (1)—(2) выражают определенные условия совместимости такого рода связей с бесконечно малыми изгибаниями поверхности. Эти условия допускают и механическое толкование, но мы в дальнейшем ограничимся рассмотрением чисто геометрических вопросов.

Прежде всего я позволю себе напомнить некоторые известные результаты.[1]) Кроме того я постараюсь дать более четкую формулировку указанной задачи.

[1]) Весьма обстоятельное изложение классических проблем и результатов теории бесконечно малых изгибаний дано в работе Н. В. Ефимова: „Качественные вопросы теории деформации поверхностей". Успехи математич. наук, III, *2* (*24*) (1948), 47—158.

Пусть задана некоторая поверхность S с помощью векторного уравнения

$$\vec{T} = \vec{T}(x, y)\,, \tag{3}$$

где x, y — гауссовы (внутренние) координаты точки поверхности. В результате некоторой непрерывной деформации эта поверхность перейдет в новую поверхность S_*, уравнение которой будет иметь вид

$$\vec{T}_* = \vec{T}(x, y) + \vec{U}(x, y)\,, \tag{4}$$

где $\vec{U}$ — вектор смещения точки (x, y) первоначальной поверхности S. Вычисляя приращение квадрата линейного элемента поверхности S, будем иметь

$$\mathrm{d}s_*^2 - \mathrm{d}s^2 = 2\,\mathrm{d}\vec{T}\,\mathrm{d}\vec{U} + \mathrm{d}\vec{U}\,\mathrm{d}\vec{U}\,. \tag{5}$$

Деформация, соответствующая вектору смещения $\vec{U}$, называется бесконечно малым изгибанием, если приращение квадрата линейного элемента равно $|\mathrm{d}U|^2$. Для этого, очевидно, необходимо и достатечно, чтобы выполнялось равенство

$$\mathrm{d}\vec{T}\,\mathrm{d}\vec{U} = 0\,. \tag{6}$$

Это есть основное уравнение бесконечно малых изгибаний поверхности в векторной форме. Оно всегда допускает решение вида

$$\vec{U}_0 = \vec{\Omega} \times \vec{T} + \vec{C}\,, \tag{7}$$

где $\vec{\Omega}$ и $\vec{C}$ — произвольные постоянные векторы. Этот вектор выражает перемещение поверхности как жесткого тела. Следовательно, ему не соответствует внутренняя деформация поверхности. Из-за этого векторы вида (7) в дальнейшем будем называть тривиальными изгибаниями. Так как постоянные векторы $\vec{\Omega}$ и $\vec{C}$ имеют по три компоненты, которые можно выбирать совершенно произвольно, то уравнение (6) допускает 6 линейно независимых тривиальных решений.

При бесконечно малых изгибаниях поверхности квадрат ее линейного элемента получает приращение бесконечно малое высшего порядка. Поэтому в результате такой деформации поверхность практически не испытывает сжатий (растяжений) и сдвиги. Иными словами при бесконечно малых изгибаниях поверхность ведет себя как гибкая в отношении изгиба упругая оболочка, которая способна оказывать значительное сопротивление деформациям сжатия (растяжения) и сдвига. Вследствие этого бесконечно малые изгибания являются весьма специальным случаем общей деформации поверхности.

Как показывает равенство (6),

$$\mathrm{d}\vec{U} = \vec{V} \times \mathrm{d}\vec{T}\,, \tag{8}$$

где $\vec{V} = \vec{V}(x, y)$ — вектор, который зависит от положения точки, и называется вектором вращения. Формула (8) указывает на то, что при бесконечно малом изгибании каждый элемент поверхности поворачивается вокруг некоторой оси на определенный угол как жесткое тело, не испытывая при этом внутренней деформации. Это обстоятельство еще раз указывает на то, что такого рода деформации могут осуществляться лишь при некоторых весьма специальных условиях, и что они несовместимы с произвольными внешними связями.

Если уравнение (6) не допускает нетривиальных непрерывных ограниченных решений, то говорят, что поверхность является жесткой в отношении бесконечно малых изгибаний.

Известно, что замкнутые поверхности положительной кривизны — так называемые овалоиды — являются жесткими.[2])

Жесткими являются также усеченные овалоиды, т. е. овалоиды с плоскими отверстиями, которые склеены с соответствующими плоскостями.[3])

Поверхности отрицательной кривизны или же незамкнутые поверхности положительной кривизны, не стесненные внешними связями, всегда допускают нетривиальные бесконечно малые изгибания.

В связи с этим естественно ставить вопрос о том, какие связи совместимы и какие несовместимы с бесконечно малыми изгибаниями. Связи, несовместимые с бесконечно малыми изгибаниями поверхности, будем называть жесткими связями. Устройство жестких связей не представляет большой трудности. Но следует иметь в виду, что не всякие жесткие связи приемлемы. Следует различать корректные и некорректные жесткие связи. Корректными жесткими связями мы называем такие связи, которые в результате малых возмущений всегда переходят в связи, совместимые с бесконечно малыми изгибаниями поверхности. Именно такие связи и представляют значительный интерес с точки зрения механики. Вместе с тем следует иметь ввиду, что, из-за специального характера деформации, с которой мы имеем дело при бесконечно малых изгибаниях, труднее реализовать такого рода жесткие связи.

Запишем основное уравнение бесконечно малых изгибаний в координатной форме. Так как в дальнейшем нас будут интересовать лишь поверхности положительной кривизны, то в качестве координатных линий целесообразно взять так называемую сопряженно изометрическую сеть линий.

Относительно этой системы координат вторая основная квадратичная форма поверхности имеет вид

$$\Pi = \Lambda(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)\,, \quad \Lambda \neq 0\,. \tag{9}$$

Заметим, что конформное преобразование переменных x и y сопряженно изометрическую сеть линий переводит опять в сопряженно изометрическую

[2]) Эта теорема в общем виде впервые доказана *Либманом*. После более простое доказательство указал *Бляшке*; см. *Ефимов*, l. c. [1])

[3]) См. *Ефимов*, l. c. [1])

сеть. Пользуясь этим обстоятельством, область рассмотрения искомых величин всегда можно привести к удобному виду.

В такой системе координат уравнение (6) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} + a\varphi + b\psi = 0\,, \\ &\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} + b\varphi - a\psi = 0\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Если введем в рассмотрение комплексную функцию $w = \varphi + i\psi$, то эту систему мы можем записать в виде одного уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} + B(z)\,\overline{w} = 0 \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \bar z} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)\right). \tag{11}$$

Здесь B выражается по формуле

$$B = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial \lg \sqrt{K}(EG - F^2)}{\partial z} + \left\{\begin{matrix} 2 \\ 1\ 2 \end{matrix}\right\} - i\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1\ 2 \end{matrix}\right\}, \tag{12}$$

где E, F, G — коэффициенты первой основной квадратной формы, K — гауссова кривизна.

Комплексная функция w выражается через касательные компоненты u и v вектора смещения следующим образом

$$w = \frac{\sqrt{E}u + i\sqrt{G}v}{\sqrt{\sqrt{K}(EG - F^2)}}\,. \tag{13}$$

Нужно еще иметь ввиду, что нормальное смещение u_0 однозначно выражается через касательные компоненты вектора смещения. Если возьмем на поверхности некоторую дугу s, то вдоль нее

$$u_0 = R\,\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}s} + \operatorname{tg}\Theta\, u_l\,, \tag{14}$$

где R — радиус нормальной кривизны поверхности в направлении касательной дуги s, Θ — угол между нормалью поверхности и главной нормалью кривой, u_s и u_l — компоненты смещения по направлению касательной и тангенциальной нормали кривой. Если рассматриваемая дуга — геодезическая, то $\operatorname{tg}\Theta = 0$ и формула (14) примет вид

$$u_0 = R\,\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}s}\,. \tag{15}$$

В случае поверхности, для которой $B(z) = 0$, система (10) переходит в систему Коши-Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0\,, \tag{16}$$

т. е.

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0\,, \qquad w = \varphi + i\psi\,. \tag{17}$$

Таким образом проблема бесконечно малых изгибаний поверхности положительной кривизны приводится к системе уравнений в частных производных первого порядка эллиптического типа (10), которая для целого ряда поверхностей (например для сферических) превращается в систему Коши-Римана (16).

Важным обстоятельством является тот факт, что многие свойства аналитических функций сохраняются и в классе функций, являющихся решениями более общей системы уравнений (10). Этому обстоятельству соответствует тот важный геометрический факт, что *основные свойства бесконечно малых изгибаний характеризуются топологической инвариантностью в отношении всего класса поверхностей положительной кривизны.*

Приведем теперь одно важное соотношение, устанавливающее связь между аналитическими функциями и решениями системы уравнений вида (10).

Теорема 1. *Пусть $w(z)$ — решение уравнения* (11) *в некоторой области D плоскости z. В таком случае функция*

$$\Phi(z) = w(z) \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int\!\!\int_D \frac{B(\zeta)\,\overline{w(\zeta)}}{(\zeta - z)\,w(\zeta)}\,d\xi\,d\eta\right) \tag{18}$$

представляет собой аналитическую функцию в области D.

На основании этой формулы ряд свойств аналитических функций непосредственно обобщается на решения уравнения (11) .

Например, обобшиются принцип аргумента, теорема единственности, формула Коши, принцип компактности, локальная однолистность отображения, свойства вблизи изолированных особых точек и др. Учитывая это обстоятельство, *решение уравнения вида* (11) *будем называть еще обобщенными аналитическими функциями.* Этот класс функций будем обзначать через $\mathfrak{A}(B, D)$. Функцию $B(z)$, т. е. коэффициент уравнения (11) будем называть *характеристикой* обобщенной аналитической функции. Если $B(z) = 0$, то мы будем иметь обычные аналитические функции.

Можно доказать и обратное предложение:

Если $\Phi(z)$ — заданная аналитическая функция в области D, то найдется такое решение уравнения (11), *которое связано с $\Phi(z)$ соотношением* (18).

В силу этого, соотношение (18) мы будем называть в дальнейшем *формулой взаимности*.

Отметим, что формула взаимности имеет место, если коэффициент B уравнения (11) есть функция, суммируемая по области D в степени > 2, т. е. $B \in L_p(D)$, $p > 2$.

Кроме того, эта формула остается в силе и в том случае, когда область D совпадает со всей плоскостью z, которую мы будем обозначать через E. Для этого достаточно предположить, что $B \in L_p(D)$, $p > 2$, для любой ограниченной области D и кроме того $B = 0(|z|^{-1})$.

Будем обозначать этот класс функций через $L_p^*(E)$.

Следует еще заметить, что, говоря о решении уравнения (11), мы имеем ввиду *обобщенные решения в смысле С. Л. Соболева*. Так мы называем суммируемую по области D функцию $w(z)$, которая удовлетворяет соотношению

$$\iint\limits_D \left(\omega B \,\overline{w} - \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}}\, w\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = 0\,, \tag{19}$$

где ω — произвольная непрерывно дифференцируемая функция на всей плоскости, которая тождественно обращается в нуль вне некоторого замкнутого подмножества области D.

Обобщенные решения обладают следующими свойствами:

1. *Если* $B \in L_p(D)$, $p > 2$, *то обобщенные решения уравнения* (11) *непрерывны в* D *в смысле Гельдера с показателем равным* $\dfrac{p-2}{p}$.

2. *Если* $B \in \mathrm{Lip}\,(\alpha, D)$, $0 < \alpha < 1$, *то обобщенные решения непрерывно дифференцируемы, причем производные принадлежат* $\mathrm{Lip}\,(\alpha, D)$.

Следовательно, *в этом случае обобщенные решения будут решениями в классическом смысле*.

3. *Если частные производные порядка* k *функции* B *принадлежат* $\mathrm{Lip}\,(\alpha, D)$, $0 < \alpha < 1$, *то производные* $(k+1)$*-го порядка всякого обобщенного решения уравнения* (11) *принадлежат* $\mathrm{Lip}\,(\alpha, D)$.

Из формулы взаимности на основании теоремы Лиувилля вытекает

Теорема 2. *Пусть* $B(z) \in \mathrm{L}_p^*(E)$, $p > 2$. *Пусть* w — *обобщенное решение уравнения* (11), *непрерывное и ограниченное на плоскости. Если* $w(z)$ *обращается в нуль в некоторой точке* z_0 *или на бесконечности* ($w = 0(|z|^{-1})$), *то* $w = 0$ *всюду*.

Эта теорема представляет собой математическое выражение того факта, что овалоиды не допускают нетривиальных бесконечно малых изгибаний. В частности классическая теорема Лиувилля, которая есть частный случай этой теоремы, выражает жесткость полной сферической поверхности.

Из формулы взаимности вытекает также

Теорема 3. *Если непрерывная в области D обобщенная аналитическая функция $w(z)$ ($w \in \mathfrak{A}(B, D)$, $B \in L_p(D)$, $p > 2$) обращается в нуль в точках некоторого множества, имеющего предельную точку внутри D, то $w(z) = 0$ всюду.*

Это есть теорема единственности для решений уравнений вида (11). Она впервые была доказана Карлеманом.[4])

Имеет место также

Теорема 4. *Пусть обобщенная аналитическая функция $w(z)$ класса $\mathfrak{A}(B, D)$ ($B \in L_p(D)$, $p > 2$) непрерывна в замкнутой области D, ограниченной кусочно гладкими кривыми Жордана. Если $w(z) = 0$ на некотором множестве контурных точек положительной (линейной) меры, то $u(z) = 0$ всюду.*

Это следует из формулы взаимности, если учтем, что теорема справедлива для класса аналитических функций (теорема Ф. и М. Рисса, Лузина и Привалова).

Приведенные теоремы допускают следующие геометрические интерпретации:

Теорема 5. *Если на множестве точек поверхности положительной кривизны, имеющем хотя бы одну предельную точку внутри поверхности, касательные компоненты u и v вектора смещения равны нулю, то поверхность является жесткой в отношении бесконечно малых изгибаний.*

Теорема 6. *Если на множестве точек контура поверхности положительной кривизны, имеющем положительную (линейную) меру, касательные компоненты u и v вектора смещения равны нулю, то поверхность является жесткой в отношении бесконечно малых изгибаний.*

Из этих теорем следует, в частности, что закрепление наглухо некоторой сколь угодно малой дуги устанавливает на всей поверхности положительной кривизны жесткую связь. Вместе с тем следует иметь ввиду, что эта связь не будет корректной. В самом деле, как следует из формулы (14), связь вида

$$u = 0\,, \quad v = 0\,, \quad u_0 = f \quad \text{(на дуге)}\,,$$

---

[4]) *T. Carleman*, C. R. Paris, *197* (1933), 471—474. Заметим, что формула взаимности (18) легко вытекает из теоремы Карлемана, если воспользуемся равенством $w(z) = \Phi(z) \exp\left(\frac{1}{\pi}\iint \frac{A(\zeta)\,d\xi\,d\eta}{\zeta - z}\right)$, дающим общее решение уравнения $w_{\bar z} + A(z)w = 0$ (*N. Theodoresco,* La derivée aréolaire, Thèses Paris, 1931; *L. Bers*, Proc. Mat. Ac. Sci. USA, *37*, 1 (1951), 42—47; *И. Н. Векуа*, Мат. сб. *31(73)* : 2 (1952), 217—314; *L. Bers,* Theory of pseudo-analytic functions, New York, 1953). Но можно ее доказать непосредственно. Тогда теорема Карлемана, очевидно, является ее следствием (см. И. Н. Векуа, Сообщ. Акад. наук. Грузии *XIV, 8* (1953) 449—453).

где f — непрерывная функция точки дуги, несовместима с бесконечно малыми изгибаниями поверхности.

Некорректность связи, устанавливаемой на поверхности положительной кривизны закреплением некоторой ее дуги, выражается в том, что любая деформация поверхности будет реализоваться ввиде растяжений (сжатий) и сдвигов. Если к тому же наличные связи способны выдержать значительные нагрузки, а поверхность плохо сопротивляется деформациям сжатия, растяжения и сдвига, то в результате могут образоваться на поверхности трещины и складки. Поэтому устраивать жесткие связи следует с большой осмотрительностью.

Вообще из формулы (14) следует, что, прилагая связи к точкам дуги поверхности, испытывающей бесконечно малые изгибания, мы можем распоряжаться по своему усмотрению не более чем двумя степенями свободы в каждой точке дуги.

Но, как уже было отмечено, прилагать к дуге связи, фиксирующие произвольно в каждой ее точке обе степени свободы, тоже нельзя. Такие связи, вообще говоря, не совместимы с бесконечно малыми изгибаниями. Вместе с тем, фиксирование лишь одной степени свободы, например, задание одного касательного компонента вектора смещения в каждой точке дуги, не определяет однозначно соответствующее бесконечно малое изгибание поверхности, если эта дуга разомкнутая или не представляет полной границы поверхности. Таким образом при бесконечно малых изгибаниях поверхности положительной кривизны наиболее естественными могут быть лишь те связи, которые приложены ко всему контуру поверхности и фиксируют в каждой его точке лишь одну степень свободы.

Такие связи будут выражаться в виде равенства

$$F(u, v) = 0\,, \tag{21}$$

устанавливающего в каждой точке контура одно соотношение между касательными компонентами вектора смещения.

Краевая задача такого рода для аналитических функций была сформулирована в свое время Риманом в его знаменитой работе: „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer Veränderlichen complexen Grössen“.

Сам Риман высказал весьма общие соображения в отношении метода решения этой задачи. Впервые после Римана серьезное внимание на эту проблему обратил Гильберт. Он изучал задачу Римана в линейной постановке, когда краевое условие (21) имеет вид

$$\alpha u + \beta v = \gamma\,, \tag{22}$$

где α, β, γ — некоторые вещественные функции точки контура Γ области D.

Это условие допускает простую геометрическую и кинематическую интерпретацию. Оно означает, что в каждой точке контура поверхности задается смещение точки в некотором касательном к поверхности направлении. Это направление не совпадает, вообще говоря, ни с касательной, ни с тангенциальной нормалью контура поверхности. Угол наклона в отношении касательной является переменной величиной и зависит от положения точки касания.

Ниже мы особо остановимся на вопросе о том, каким образом можно реализовать практически связи вида (22) на контуре поверхности.

Гильберт решил рассматриваемую им задачу двумя различными способами. В своем докладе „Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie" (Verhandl. des III. Internat. Mathematiker-Kongresse, Heidelberg, 1904), доложенном на третьем международном математическом конгрессе в Гейдельберге в 1904 г., Д. Гильберт предложил метод, основанный на применении теории интегральных уравнений. Но для полученных им интегральных уравнений не сохраняется обычная альтернатива Фредгольма, ибо они содержат особые интегралы в смысле главного значения. Поэтому эта работа Гильберта содержит ошибку, которую он исправил после в другой работе, дав весьма простой и изящный способ решения задачи.

Он показал, что искомое решение можно получить путем решения двух задач Дирихле[5].)

Несмотря на то, что упомянутая выше работа Гильберта содержала неточности, ее появление имело важное историческое значение, ибо она, наряду с появившейся несколько позже работой А. Пуанкаре,[6]) посвященной теории приливов, возбудила интерес исследователей к вопросам теории сингулярных интегральных уравнений. Благодаря исследованиям немецкого ученого Нетера, а затем советских математиков, в особенности из школы академика Н. И. Мусхелишвили,[7]) теория сингулярных интегральных уравнений получила весьма разностороннее развитие и широкое применение в граничных задачах аналитических функций и математической физики. Эти результаты позволили, в частности, полнее изучить и задачу Гильберта с краевыми условиями вида (22) не только для односвязной области, как это делал Гильберт, но также и для многосвязной области, причем в настоящее время изучены не только регулярные случаи, когда коэффициенты краевого условия (22) и контур области в достаточной мере гладкие, но также и некоторые классы задач для случая разрывных коэффициентов и контуров с угловыми точками. Здесь

[5]) *D. Hilbert,* Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig-Berlin, 1924.

[6]) *H. Poincaré,* Leçons de Mécanique céleste, t. III, 1910.

[7]) *Н. И. Мусхелишвили:* Сингулярные интегральные уравнения, Москва, 1946 г.

следует отметить в первую очередь исследования Н. И. Мусхелишвили, Н П. Векуа, Д. А. Квеселева, Ф. Д. Гахова и ряда их учеников.[8])

Нужно сказать, что Гильберт не ограничился рассмотрением задачи с краевыми условиями вида (22) для аналитических функций. Он рассмотрел для системы (1) краевое условие вида

$$u/\Gamma = f\,. \tag{23}$$

Но исследование этой задачи им не доведено до конца. Он даже высказал ряд неверных утверждений по поводу разрешимости этой задачи.[9])

Краевым задачам для системы уравнений вида (1) были посвящены многие исследования за последние годы.[10])

Я здесь приведу без доказательства некоторые результаты, которые были получены нами в цитированной выше работе.[4])

Относительно области D и коэффициентов краевого условия (22) мы примем следующие допущения. Область D ограничена конечным числом гладких простых замкнутых кривых Жордана. Совокупность их мы обозначаем через Γ. Мы считаем, что производные по дуге декартовых координат точек контура Γ непрерывны в смысле Гельдера, т. е. $x'(s)$, $y'(s) \in \mathrm{L}_{ip}(\lambda, \Gamma)$, $0 < \lambda \leqq 1$.

В таком случае будем говорить, что область D принадлежит классу C_λ: $D \in C_\lambda$. Коэффициенты α, β и свободный член γ краевого условия (22) мы считаем непрерывными в смысле Гельдера вдоль всего контура Γ, т. е. α, β, $\gamma \in \mathrm{L}_{ip}\,(\lambda, \Gamma)$, $0 < \lambda \leqq 1$. Кроме того, мы будем считать выполненным условие: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ на Γ. Это требование, очевидно, не ограничивает общности рассуждений, если $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ всюду на Γ.

В дальнейшем мы все время считаем, что $B \in L_p(D)$, $p > 2$.

Кроме того можно считать, что D — ограниченная область. Этого всегда можно добиться с помощью конформного преобразования области. В ре-

---

[8]) *Н. И. Мусхелишвили* l. c. [7]).

[9]) *G. Hellwig,* Math. Zeitschr. *56, 4* (1952), 388—408;

[10]) *W. Haack* u. *G. Hellwig,* Math. Nachr. *4,* Nr. 1—8 (1950/51), 408—418.

W. Haack, Math. Nachr. *7,* 1 (1952), 1—30; *8* (1952), 123—132;

Н. К. Усманов, Труды ин-та физ. и матем. Акад. наук Латв. ССР, I (1950), 41—100; II (1950), 59—100;

G. Hellwig, l. c.[9]), Math. Nachr. *8* (1952), 13—30; Arch. d. Math. VI (1955), 243—249;

J. Nitsche, Math. Nachr. *7,1* (1952), 31—33; Rendiconti Circolo mat. Palermo, *3,1* (1954), 109—114;

И. Н. Векиа, l. c. [4]);

Б. Боярский, Доклады АН СССР, т. *101* № 2 (1955).

зультате преобразования $z = \omega(\zeta)$, где $\omega(\zeta)$ — аналитическая функция, уравнение (11) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{\zeta}} + \overline{\omega'(\zeta)}\, B(\omega(\zeta))\, \overline{w} = 0 \,. \tag{24}$$

Запишем краевое условие (22) в комплексной форме

$$\mathrm{Re}[(\alpha - i\beta)\, w(z)] = \gamma \,. \tag{25}$$

Будем называть задачей I, задачу отыскания обобщенного решения уравнения

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + B(z)\, \overline{w} = 0 \,, \tag{11}$$

непрерывного в замкнутой области $D + \Gamma$ и удовлетворяющего краевому условию (25).

Задачей I_0 будем называть соответствующую однородную задачу ($\gamma \equiv 0$).

Рассмотрим еще уравнение

$$\frac{\partial w'}{\partial \bar{z}} - \overline{B(z)}\, \overline{w}' = 0 \tag{26}$$

и краевое условие вида

$$\mathrm{Re}\left[(\alpha + i\beta)\, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\, w'(z)\right] = 0 \,. \tag{27}$$

Назовем задачей I_0' задачу отыскания решения однородного уравнения (26) при однородном краевом условии (27).

Легко доказывается следующее тождество:

$$\mathrm{Re}\,[i \int_\Gamma w w' \,\mathrm{d}z] = 0 \,, \tag{28}$$

где w и w' — произвольные обобщенные решения уравнений (11) и (26), непрерывные в замкнутой области $D + \Gamma$. В силу этого свойства, уравнения (11) и (25) называются сопряженными, а задача I_0' — сопряженной с задачей I однородной краевой задачей.

Пусть контур Γ области D состоит из конечного числа простых замкнутых контуров $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$, причем Γ_0 содержит внутри себя все остальные контуры $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_m$. В качестве положительного направления на Γ примем то направление, которое область D оставляет слева. Это соглашение, очевидно, устанавливает также направление положительного обхода и на контуре поверхности S (этот контур мы обозначаем через L).

Обозначим через $\Delta_\Gamma f$ приращение функции $f(t)$ точки контура Γ при однократном обходе этого контура в положительном направлении.

Рассмотрим теперь число

$$n = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg(\alpha + i\beta) . \tag{29}$$

Это число, очевидно, целое или нуль. Назовем его *индексом* задачи I. Индекс сопряженной задачи I_0' равен

$$\begin{gathered} n' = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg\left[(\alpha - i\beta)\frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}s}\right] = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg(\alpha - i\beta) + \\ + \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg \frac{\mathrm{d}\bar{z}}{\mathrm{d}s} = -n + m - 1 . \end{gathered} \tag{30}$$

Рассмотрим на плоскости единичный вектор с компонентами α и β, приложенный в некоторой фиксированной точке Z_0. Так как направление этого вектора есть функция точки контура Γ, то при изменении положения этой точки вектор (α, β) будет вращаться вокруг точки Z_0. Назовем циклом одно обращение этого вектора вокруг Z_0, причем будем считать цикл положительным, если это обращение произошло против движении часовой стрелки, и отрицательным в противном случае.

Когда точка контура Γ один раз опишет этот контур в положительном направлении, то вектор (α, β), совершив конечное число положительных и отрицательных циклов, возвратится в свое исходное положение (в силу непрерывности и однозначности α и β). Обозначим числа этих циклов соответственно через n^+ и n^-. Тогда индекс n будет равен их разности: $n = n^+ - n^-$.

Как увидим ниже, индекс n и число m — порядок связности области — играют весьма важную роль в задаче Гильберта.

Прежде всего приведем следующую теорему:

Теорема 7. *Неоднородная краевая задача* I *имеет решение тогда и только тогда, когда правая часть γ краевого условия* (25) *удовлетворяет следующему равенству*

$$\int_\Gamma (\alpha + i\beta)\, w'\gamma \,\mathrm{d}z = 0 , \tag{31}$$

где w' — любое решение сопряженной однородной задачи I_0'.

Из этой теоремы вытекает

Теорема 8. *Неоднородная краевая задача* I *имеет решение для любой правой части γ краевого условия* (25) *тогда и только тогда, когда сопряженная однородная задача I_0' не имеет решения.*

Важный признак разрешимости задачи I дает следующая

Теорема 9. *Если индекс n задачи* I *удовлетворяет неравенству:* $n > m - 1$, *то однородная задача* I *имеет* $2n - m + 1$ *линейно независимых решений, сопряженная однородная задача* I_0' *вовсе не имеет решения, а неоднородная задача* I *всегда разрешима.*

Если индекс n задачи I *отрицателен,* $n < 0$, *то однородная задача* I_0 *не имеет решения, сопряженная задача имеет ровно* $m - 2n - 1$ *решений, а неоднородная задача разрешима лишь при соблюдении равенств*

$$\int_\Gamma (\alpha + i\beta)\, w_j' \gamma \,\mathrm{d}z = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m - 2n - 1)\,, \tag{32}$$

где $w_1', \ldots, w_{m-2n-1}'$ — *линейно независимые решения однородной сопряженной задачи* I_0'.

Особо отметим, что для односвязной области ($m = 0$) последняя теорема принимает следующий вид

Теорема 10. *Если область D односвязна, то при* $n \geqq 0$ *число решений однородной задачи* I_0 *равно* $2n + 1$, *а неоднородная задача всегда разрешима.*

Если $n < 0$, *то однородная задача* I_0 *не имеет решения, а неоднородная задача* I *имеет решение лишь при соблюдении* $-(2n + 1)$ *интегральных равенств вида* (32).

Сделаем теперь следующее замечание. Приведенные выше теоремы были доказаны нами ранее для случая системы уравнений с непрерывными коэффициентами.[11]) Но недавно я установил, что эти теоремы имеют место и в том случае, когда коэффициенты принадлежат $L_p(D)$, $p > 2$. Это обобщение не является тривиальным вот в каком отношении. Рассмотрим уравнение с коэффициентом $B(z) \in L_p(D)$ а краевые условия для областей, ограниченных кусочно гладкими контурами. Функции α, β, γ, входящие в краевые условия, будем считать попрежнему непрерывными в смысле Гельдера. Если область D плоскости $z = x + iy$ отобразим конформно на некоторую область D' плоскости ζ с гладкой границей (например на область, ограниченной окружностями), то получим уравнение вида (24) с коэффициентом $\overline{\omega'(\zeta)}\, B(\omega(\zeta))$, где $\omega(\zeta)$ — функция, осуществляющая указанное конформное отображение. Если внутренние углы > 0, то, как известно, особенности $\omega'(\zeta)$ будут такими, что $\overline{\omega'(\zeta)}\,.\, B(\omega(\zeta)) \in L_p(D)$, $p > 2$. Поэтому мы можем теперь утверждать, что полученные ранее результаты, относящиеся к разрешимости краевой задачи I для непрерывных коэффициентов и гладких контуров, остаются в силе и для регулярных поверхностей с кусочно гладкими контурами.

Приведенные выше результаты, очевидно, остаются в силе и в частном случае системы Коши-Римана.

---

[11]) См. *И. Н. Векуа*, l. c. [10]).

Таким образом признаки разрешимости краевой задачи Гильберта обнаруживают свойство топологической инвариантности в отношении класса поверхностей положительной кривизны.

Отметим, что ряд из этих результатов для случая аналитических функций ($B(z) = 0$) был получен ранее другими авторами.[12])

Отметим также, что некоторые из указанных выше признаков разрешимости задачи I для общей системы уравнений несколько иным путем были получены также в цитированных выше работах Гаака и Гельвига. Однако, эти авторы делали более сильные предположения в отношении коэффициентов уравнений и других данных задачи.

Переходим теперь к применению вышеприведенных результатов к задачам бесконечно малых изгибаний поверхностей. Прежде всего поясним, как можно на самом деле осуществить те связи, которые приводят к контурным условиям Гильберта.

Рассмотрим овалоид S, на котором имеется конечное число отверстий и щелей. Пусть в эти отверстия и щели вставлены некоторые жесткие или упругие тела, которые плотно их заполняют. Обозначим поверхности этих тел через Σ. Таким образом поверхность S находится в контакте с поверхностями Σ вдоль всего контура. Допустим, что в процессе деформации поверхностей S и Σ контакт между ними не нарушается. Иными словами, поверхности Σ все время плотно прилегают к контурам отверстий и щелей овалоида и зазоры между ними не возникают. Обозначая через $\vec{U}$ и $\vec{W}$ векторы смещения точек овалоида S и поверхности Σ, условие непрерывного контакта между S и Σ можем записать в виде

$$\vec{\nu}\vec{U} = \vec{\nu}\vec{W}, \quad \text{т. е.} \quad u_\nu = w_\nu \quad \text{на } L \tag{33}$$

где $\vec{\nu}$ обозначает нормаль поверхности Σ, а L — совокупность контуров отверстий и щелей поверхности S.

Мы рассмотрим тот случай, когда поверхности S и Σ взаимно ортогональны. Кроме того предположим, что поверхности Σ — идеально гладкие и абсолютно жесткие. В таком случае, $\vec{\nu}$ будет тангенциальной (в отношении S) нормалью контура L и, следовательно, $u_\nu = u\cos\sigma + v\sin\sigma$, где σ — угол, составленный направлением $\vec{\nu}$ с касательной координатной кривой $y = \text{const}$. По предположению, Σ представляет собой совокупность абсолютно жестких поверхностей $\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$, вставленных в отверстия и щели $L_0, L_1, \ldots, L_m$ овалоида S. Поэтому для этих поверхностей $\vec{W}$ будет вектором тривиального изгибания, т. е. для поверхности Σ_j

$$\vec{W} = \vec{W}_j \equiv \vec{\Omega}_j \times \vec{T} + \vec{C}_j \quad (j = 0, 1, \ldots, m), \tag{34}$$

[12]) *D. Hilbert*, l. c. [5]);
Д. А. Квеселава: Сообщения Акад. наук Груз. ССР, VI, *8* (1945), 581—590;
A. Lienard, Journ. Ec. Polyt. III serie, *5—7* (1938), 35—158, 177—226.
И. Н. Векуа: Труды Тбилисского Математического ин-та, XI (1942), 109—139.

где $\vec{\Omega}_j$ и $\vec{C}_j$ — постоянные векторы. В силу этого, условие контакта (33) примет вид

$$u_\nu \equiv u \cos \sigma + v \sin \sigma = \gamma \quad (\text{на } L), \tag{35}$$

где

$$\gamma = \vec{\nu}\vec{W}_j \quad \text{на} \quad \Gamma_j \quad (j = 0, 1, \ldots, m). \tag{36}$$

Таким образом контурная связь, устанавливаемая с помощью непрерывного идеально гладкого и жесткого поверхностного контакта, приводит к краевому условию типа Гильберта.

Так как поверхности Σ, устанавливающие эту связь, по предположению идеально гладкие, то, очевидно, они не будут оказывать сопротивление перемещениям точек контуров отверстий и щелей вдоль этих поверхностей. Следовательно, такого рода связи фиксируют в каждой точке контура поверхности лишь одну степень свободы, не ограничивая совершенно остальные две. Назовем такую связь *идеально гладкой контурной связью поверхностного контакта*. Соответствующую задачу Гильберта будем называть задачей идеального контакта.

Можно указать еще ряд других способов осуществления таких контурных связей, которые приводят к краевому условию Гильберта. Таковы, например, условия, которые имеют место по контуру усеченного овалоида. В таком случае контуры отверстий — плоские кривые.

Предположим, что эти контуры окаймлены замкнутыми плоскими полосами $T_0, T_1, \ldots, T_m$, по ширине сколь угодно малыми. Они могут быть расположены как внутри, так и вне отверстий.

Легко показать, что бесконечно малое изгибание плоской полосы T_j имеет вид

$$\vec{U}_j = \vec{n}_j\varphi_j + \vec{\Omega}_j \times \vec{T} + \vec{C}_j, \tag{37}$$

где $\vec{n}_j$ — орт нормали T_j, φ_j — произвольная функция точки полосы T_j, $\vec{\Omega}_j$ и $\vec{C}_j$ — постоянные векторы. Обозначим попрежнему через $\vec{U}$ вектор бесконечно малого изгибания поверхности S.

На контурах отверстий, в силу непрерывности деформации, должны иметь место равенства

$$\vec{U} = \vec{U}_j \equiv \vec{n}_j\varphi_j + \vec{\Omega}_j \times \vec{T} + \vec{C}_j \quad (j = 0, 1, \ldots, m). \tag{38}$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на орт $\vec{s}$ касательной контура овалоида, приходим к следующему равенству:

$$u_s \equiv -u \sin \sigma + v \cos \sigma = \delta \quad (\text{на } L), \tag{39}$$

где

$$\delta = \vec{s}(\vec{\Omega}_j \times \vec{T}) + \vec{s}\vec{C}_j \quad (\text{на } L_j) \quad (j = 0, 1, \ldots, m). \tag{40}$$

Таким образом мы опять пришли к краевому условию типа Гильберта.

В данном случае оно является условием сопряжения поверхности усеченного овалойда с плоскими полосами, окаймляющими его контуры.

Если обратимся к формуле (13), выражающей решение уравнения (11) через касательные компоненты вектора смещения, то краевые условия (35) и (39) мы запишем в виде

$$\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}} - i\frac{\sin\sigma}{\sqrt{G}}\right) w(z)\right] = \gamma_0\,, \tag{41}$$

$$\mathrm{Re}\left[\left(\frac{\sin\sigma}{\sqrt{E}} + i\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\right) w(z)\right] = \delta_0\,. \tag{42}$$

Если нанесем на плоскости векторы $(\cos\sigma,\ \sin\sigma)$, $\left(\frac{\cos\sigma}{\sqrt{E}},\ \frac{\sin\sigma}{\sqrt{G}}\right)$, $\left(\frac{\sin\sigma}{\sqrt{E}},\ -\frac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\right)$, то легко убедимся, что они совершают одни и те же циклы при обходе контуров отверстий рассматриваемой поверхности. Вектор $(\cos\sigma,\ \sin\sigma)$, соответствующий направлению тангенциальной нормали, совершает один положительный цикл при обходе замкнутого контура в направлении движения часовой стрелки и один отрицательный цикл при обходе в противоположном направлении. Поэтому при обходе границы Γ области D в положительном направлении этот вектор один раз совершает положительный цикл и m раз — отрицательный. Следовательно, индексы наших краевых условий в (41) и (42) будут равны $1 - m$.

Рассмотрим сперва случай овалоида с одним отверстием. Тогда $m = 0$ и, следовательно, индексы рассматриваемых краевых задач равны 1. По теореме 10 соответствующие однородные задачи имеют по 3 линейно независимых решения, а неоднородные задачи всегда разрешимы. Эти решения однородных задач могут быть тривиальными (изгибаниями) решениями или нетривиальными. Тривиальными они будут в случае усеченного овалоида. Если плоскость отверстия возьмем в качестве плоскости oxy, то легко убедиться, что три линейно независимых тривиальных изгибания

$$\vec{e}_1 \times \vec{T}\,,\quad \vec{e}_2 \times \vec{T}\,,\quad \vec{e}_3\,, \tag{43}$$

где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ — орты декартовой системы, удовлетворяют однозначным краевым условиям

$$u_\nu = 0\,,\quad u_s = 0\,. \tag{44}$$

Очевидно, что неоднородные краевые условия

$$u_\nu = \vec{\nu}(\vec{\Omega} \times \vec{T}) + \vec{\nu}\vec{C}\,,\quad u_s = \vec{s}(\vec{\Omega} \times \vec{T}) + \vec{s}\vec{C} \tag{45}$$

всегда допускают тривиальное частное решение $\vec{\Omega} \times \vec{T} + \vec{C}$. Следовательно, если отверстие — плоская кривая, то задача идеального контакта и усеченного конуса допускают лишь тривиальные решения.

Таким образом доказаны следующие теоремы:

Теорема 11. *Овалоид с одним плоским отверстием, находящийся в идеальном контакте с ортогональной идеально гладкой и абсолютно жесткой поверхностью, является жестким в отношении бесконечно малых изгибаний.*

Кроме того жесткая связь, устанавливаемая с помощью идеального контакта, является корректной в отношении возмущений, обусловленных упругой податливостью поверхности контакта[13]).

Последняя часть теоремы о корректности связи идеального контакта следует из того, что неоднородная задача с краевым условием $u_\nu = f$ разрешима для любой непрерывной функции f и решение непрерывно зависит от f.

Теорема 12. (О жесткости усеченного овалоида, окаймленного плоской полосой). *Усеченный овалоид, окаймленный плоской полосой, является жестким в отношении бесконечно малых изгибаний.*

Переходя к рассмотрению многосвязных овалоидов, остановимся сначала на случае $m > 1$. В этом случае индексы краевых задач отрицательны. Будем считать, что поверхности неподвижны. Тогда краевое условие идеального контакта принимает вид

$$u_\nu = 0 \quad (\text{на } L)\,. \tag{46}$$

Но согласно теореме 9, эта задача не имеет решения, ибо индекс задачи отрицателен, $1 - m < 0$.

Таким образом имеет место

Теорема 13. *Если поверхность овалойда с тремя или большим числом отверстий находится в контакте с неподвижными абсолютно жесткими и идеально гладкими ортогональными поверхностями, то он (овалойд) будет жестким в отношении бесконечно малых изгибаний.*

Следует заметить, что эта жесткость уже не будет корректной в отношении возмущений на упругую податливость поверхностей контакта. Это следует из того, что неоднородная краевая задача

$$u_\nu = f \quad (\text{на } L) \tag{47}$$

в данном случае ($m > 1$) не имеет решения для любой краевой части.

Это очевидно, так как индекс сопряженной задачи $n' = 2(m - 1) > m - 1$. Поэтому, согласно теореме 10, задача имеет равно $m - 1$ решений.

Замечу, что случай двусвязной поверхности (овалойд с двумя отверстиями) имеет некоторые свои особенности. Но для овалойдов с плоскими отверстиями остается в силе предыдущая теорема 13.

---

[13]) Поверхность контакта Σ мы называем упруго податливой, если она допускает бесконечно малые деформации, оставаясь при этом все время в контакте с поверхностью S. Мы считаем также, что Σ в процессе деформации не теряет свойства идеальной гладкости и остается ортогональной в отношении S.

Аналогично доказывается, что *овалоид с двумя или большим числом плоских отверстий, окаймленных плоскими полосами, не может испытывать нетривиальные бесконечно малые изгибания.*

Замечу, что теорема о жесткости усеченных овалоидов доказана иным путем в упомянутой выше статье Н. В. Ефимова.

Математический институт
им. В. А. Стеклова Академии наук СССР,
Москва, август, 1955 г.

Résumé

SUR CERTAINES CONDITIONS DE LA NON-DÉFORMABILITÉ DES SURFACES À COURBURE POSITIVE

I. N. VEKUA, Moscou.

Conférence faite le 6 septembre 1955 au IV[e] Congrès des mathématiciens tchécoslovaques à Prague.

On montre dans ce travail quelques nouveaux critères de non-déformabilité des surfaces à courbure de Gauss positive dans le cas de déformations infiniment petites. Ces problèmes sont étroitement liés à des problèmes de Mécanique conduisant à un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} + a\varphi + b\psi = 0\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} + c\varphi + d\psi = 0 \tag{1}$$

que l'on peut transformer en

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} + B(z)\,\overline{w} = 0\,; \quad w = \varphi + i\psi\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right). \tag{11}$$

Certaines propriétés des fonctions analytiques qui vérifient le système (11) pour $B(z) = 0$ se transportent au cas des fonctions analytiques généralisées, c'est-à-dire de solutions généralisées (dans le sens de M. S. L. Sobolev) du système (11); par le procédé de géométrisation on obtient certains résultats concernant la non-déformabilité des surfaces à courbure positive.

Ensuite on cite (également sans démonstration) certains résultats qui ont été publiés dans le travail cité [4]), concernant l'existence des solutions du système (1) à la condition de frontière

$$\alpha\varphi + \beta\psi = \gamma\,. \tag{2}$$

Ces résultats donnent certains théorèmes sur la non-déformabilité des ovaloïdes (c'est-à-dire des surfaces fermées à courbure positive) soumis à des liaisons conduisant à des conditions de frontière du type Hilbert (2).