Czechoslovak Mathematical Journal

Alois Švec

Déformation projective des congruences de droites dans S_n

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 4, 546–558

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100170`

DÉFORMATION PROJECTIVE DES CONGRUENCES DE DROITES DANS S_n

ALOIS ŠVEC, Praha.

(Reçu le 12 juillet 1955.)

Dans ce Mémoire je résous le problème de la déformation projective du second ordre des congruences de droites plongées dans l'espace projectif à n ($\geqq 4$) dimensions. La résolution du problème pour $n \geqq 5$ est très facile: la déformation projective est équivalente à la déformation ponctuelle, introduite par M. E. ČECH. Dans S_4 j'ai trouvé le degré de généralité des congruences qui sont en déformation projective avec une congruence donnée et j'ai décomposé cette déformation en trois correspondances simples.

J'adresse à M. le professeur E. Čech mes affectueux remercîments pour ses conceils et pour l'intérêt avec lequel il a suivi mon travail.

1. Dans un espace projectif à un nombre quelconque n de dimensions ($n \geqq 3$) considérons une congruence de droites L possédant deux surfaces focales. A_1, A_2 étant les foyers de L, il est possible de choisir le repère mobile de sorte que

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \omega_{12}A_2 + \omega_1 A_3 , \\ dA_2 &= \omega_{21}A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2 A_4 , \\ dA_i &= \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{ij}A_j \ (i = 3, \ldots, n + 1) \end{aligned} \tag{1}$$

où j'ai posé

$$\omega_{13} = \omega_1, \ \omega_{24} = \omega_2 . \tag{2}$$

La congruence considérée est donc donnée par les équations

$$\begin{aligned} &\omega_{14} = 0, \ \omega_{23} = 0, \\ &\omega_{1i} = 0, \ \omega_{2i} = 0 \ (i = 5, \ldots, n + 1) . \end{aligned} \tag{3}$$

La différentiation extérieure conduit aux équations

$$\begin{aligned} [\omega_2\omega_{12}] - [\omega_1\omega_{34}] &= 0 , \\ [\omega_1\omega_{3i}] &= 0 , \\ [\omega_1\omega_{21}] - [\omega_2\omega_{43}] &= 0 , \\ [\omega_2\omega_{4i}] &= 0 . \end{aligned} \tag{4}$$

D'après le lemme de E. CARTAN (4) permet de poser

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= a_1\omega_2 - a_0\omega_1, \ \omega_{21} = b_1\omega_1 - b_0\omega_2 \, , \\ \omega_{34} &= a_0\omega_2 + a_2\omega_1, \ \omega_{43} = b_0\omega_1 + b_2\omega_2 \, . \end{aligned} \tag{5}$$

Par différentiation extérieure des relations $(5_{1,2})$ on déduit

$$\begin{aligned} [(a_1\omega_2 - a_0\omega_1)(\omega_{22} - \omega_{11})] + [\omega_1\omega_{32}] &= [\mathrm{d}a_1\,\omega_2] - [\mathrm{d}a_0\,\omega_1] + \\ &+ a_1[\omega_2(\omega_{44} - \omega_{22})] - a_0[\omega_1(\omega_{33} - \omega_{11})] \\ [(b_1\omega_1 - b_0\omega_2)(\omega_{11} - \omega_{22})] + [\omega_2\omega_{41}] &= [\mathrm{d}b_1\,\omega_1] - [\mathrm{d}b_0\,\omega_2] + \\ &+ b_1[\omega_1(\omega_{33} - \omega_{11})] - b_0[\omega_2(\omega_{44} - \omega_{22})] \end{aligned}$$

et particulièrement

$$\begin{aligned} \delta a_0 &= a_0(e_{33} - e_{22}) + e_{32} \, , \\ \delta b_0 &= b_0(e_{44} - e_{11}) + e_{41} \end{aligned} \tag{6}$$

de sorte qu'on peut poser

$$a_0 = b_0 = 0 \, . \tag{7}$$

En résume, on a d' (4), (5) et (7)

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= a_1\omega_2, \quad \omega_{21} = b_1\omega_1 \, , \\ \omega_{34} &= a_2\omega_1, \quad \omega_{43} = b_2\omega_2 \, , \\ \omega_{3i} &= a_{i-2}\omega_1, \ \omega_{4i} = b_{i-2}\omega_2 \, , \end{aligned} \tag{8}$$

où $i = 5, \ldots, n+1$.

En différentiant extérieurement les équations du système (8), on en déduit les conditions d'integrabilité

$$\begin{gathered} [\omega_{32}\omega_1] + [(\mathrm{d}a_1 + a_1\,\overline{2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}})\,\omega_2] = 0 \, , \\ [(\mathrm{d}a_2 + a_2\overline{\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33}} + \sum_{i=5}^{n+1} a_{i-2}\omega_{i4})\,\omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] = 0 \, , \\ [(\mathrm{d}a_{i-2} + a_{i-2}\overline{\omega_{11} + \omega_{ii} - 2\omega_{33}} + \sum_{\substack{j=5 \\ j\neq i}}^{n+1} a_{j-2}\omega_{ji})\,\omega_1] - a_2b_{i-2}[\omega_1\omega_2] = 0 \, , \\ [(\mathrm{d}b_1 + b_1\,\overline{2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33}})\,\omega_1] + [\omega_{41}\omega_2] = 0 \, , \\ -[\omega_{41}\omega_1] + [(\mathrm{d}b_2 + b_2\,\overline{\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44}} + \sum_{i=5}^{n+1} b_{i-2}\omega_{i3})\,\omega_2] = 0 \, , \\ [(\mathrm{d}b_{i-2} + b_{i-2}\,\overline{\omega_{22} + \omega_{ii} - 2\omega_{44}} + \sum_{\substack{j=5 \\ j\neq i}}^{n+1} b_{j-2}\omega_{ji})\,\omega_2] + b_2a_{i-2}[\omega_1\omega_2] = 0 \, . \end{gathered} \tag{9}$$

En particulier on a

$$\begin{aligned} \delta a_1 &= a_1(e_{11} + e_{44} - 2e_{22}) \, , \\ \delta a_2 &= a_2(2e_{33} - e_{11} - e_{44}) - \sum_{i=5}^{n+1} a_{i-2}e_{i4} \, , \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\delta a_{i-2} &= a_{i-2}(2e_{33} - e_{11} - e_{ii}) - \sum_{\substack{j=5\\ j\neq i}}^{n+1} a_{j-2}e_{ji} , \\
\delta b_1 &= b_1(e_{22} + e_{33} - 2e_{11}) , \\
\delta b_2 &= b_2(2e_{44} - e_{22} - e_{33}) - \sum_{i=5}^{n+1} b_{i-2}e_{i3} , \\
\delta b_{i-2} &= b_{i-2}(2e_{44} - e_{22} - e_{ii}) - \sum_{\substack{j=5\\ j\neq i}}^{n+1} b_{j-2}e_{ji} .
\end{aligned} \tag{10}
$$

D'après (8) les équations (1) donnent

$$
\begin{aligned}
dA_1 &= \omega_{11}A_1 + a_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3 , \\
dA_2 &= b_1\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 \qquad\qquad + \quad \omega_2A_4 , \\
dA_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + a_2\omega_1A_4 + \Big(\sum_{i=5}^{n+1} a_{i-2}A_i\Big)\,\omega_1 , \\
dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + b_2\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4 + \Big(\sum_{i=5}^{n+1} b_{i-2}A_i\Big)\,\omega_2 , \\
dA_k &= \sum_{j=1}^{n+1} \omega_{kj}A_j \quad (k = 5, \ldots, n+1) .
\end{aligned} \tag{11}
$$

Je peux choisir le repère mobile de manière que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=5}^{n+1} a_{i-2}A_i &= a_3A_5 , \\
\sum_{i=5}^{n+1} b_{i-2}A_i &= b_3A_5 + b_4A_6 ,
\end{aligned} \tag{12}
$$

ce qui devient alors

$$
a_4 = a_5 = \ldots = a_{n+1} = 0 , \quad b_5 = \ldots = b_{n+1} = 0 . \tag{13}
$$

De l'équation (10) on déduit

$$
\begin{aligned}
\delta a_1 &= a_1(e_{11} + e_{44} - 2e_{22}) , \\
\delta a_2 &= a_2(2e_{33} - e_{11} - e_{44}) - a_3e_{54} , \\
\delta a_3 &= a_3(2e_{33} - e_{11} - e_{55}) , \\
\delta b_1 &= b_1(e_{22} + e_{33} - 2e_{11}) , \\
\delta b_2 &= b_2(2e_{44} - e_{22} - e_{33}) - b_3e_{53} - b_4e_{63} , \\
\delta b_3 &= b_3(2e_{44} - e_{22} - e_{55}) - b_4e_{65} , \\
\delta b_4 &= b_4(2e_{44} - e_{22} - e_{66}) - b_3e_{56} ,
\end{aligned} \tag{14}
$$

et

$$
a_3e_{5i} = 0 \ (i = 6, \ldots, n+1) , \quad b_3e_{5i} + b_4e_{6i} = 0 \ (i = 7, \ldots, n+1) . \tag{15}
$$

2. Dans S'_n soit donnée une autre congruence L' par les équations analogues à (11):

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}B_1 &= (\omega_{11} + \tau_{11})\, B_1 + \bar{a}_1\omega_2 B_2 + \omega_1 B_3\,,\\
\mathrm{d}B_2 &= \bar{b}_1\omega_1 B_1 + (\omega_{22} + \tau_{22})\, B_2 \qquad\qquad + \omega_2 B_4\,,\\
\mathrm{d}B_3 &= (\omega_{31} + \tau_{31})\, B_1 + (\omega_{32} + \tau_{32})\, B_2 + (\omega_{33} + \tau_{33})\, B_3 + \bar{a}_2\omega_1 B_4 +\\
&\quad + \bar{a}_3\omega_1 B_5\,, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (16)\\
\mathrm{d}B_4 &= (\omega_{41} + \tau_{41})\, B_1 + (\omega_{42} + \tau_{42})\, B_2 + \bar{b}_2\omega_2 B_3 + (\omega_{44} + \tau_{44})\, B_4 +\\
&\quad + \bar{b}_3\omega_2 B_5 + \bar{b}_4\omega_2 B_6\,,\\
\mathrm{d}B_k &= \sum_{j=1}^{n+1} (\omega_{kj} + \tau_{kj})\, B_j \qquad (k = 5, \ldots, n+1)
\end{aligned}
$$

de manière que nous avons une *correspondance développable* entre L et L' (c'est-à-dire qu'à chaque développable de L correspond une développable de L'). Je vais chercher *les conditions pour que les deux congruences* (11) *et* (16) *soient en déformation projective du second ordre.* On a

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}[A_1A_2] &= (\omega_{11} + \omega_{22})[A_1A_2] + \omega_2[A_1A_4] - \omega_1[A_2A_3]\,, \qquad (17)\\
\mathrm{d}[A_1A_4] &= \omega_{42}[A_1A_2] + b_2\omega_2[A_1A_3] + (\omega_{11} + \omega_{44})[A_1A_4] +\\
&\quad + b_3\omega_2[A_1A_5] + b_4\omega_2[A_1A_6] + a_1\omega_2[A_2A_4] + \omega_1[A_3A_4]\,,\\
\mathrm{d}[A_2A_3] &= -\,\omega_{31}[A_1A_2] + b_1\omega_1[A_1A_3] + (\omega_{22} + \omega_{33})[A_2A_3] +\\
&\qquad + a_2\omega_1[A_2A_4] + a_3\omega_1[A_2A_5] - \omega_2[A_3A_4]\,,\\
\mathrm{d}^2[A_1A_2] &= (\ldots)[A_1A_2] + (b_2\omega_2^2 - b_1\omega_1^2)[A_1A_3] +\\
&\quad + (\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2\,.\,\overline{2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{44}})[A_1A_4] + b_3\omega_2^2[A_1A_5] +\\
&\quad + b_4\omega_2^2[A_1A_6] - (\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1\,\overline{2\omega_{22} + \omega_{11} + \omega_{33}})[A_2A_3] +\\
&\quad + (a_1\omega_2^2 - a_2\omega_1^2)[A_2A_4] - a_3\omega_1^2[A_2A_5] + 2\omega_1\omega_2[A_3A_4]\,. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Si le deux congruences sont en déformation projective du second ordre, il existe une homographie $\mathbf{K}$

$$\mathbf{K}A_i = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_{ij} B_j \quad (i = 1, \ldots, n+1) \tag{19}$$

et une forme de Pfaff ϑ de façon qu'on a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}[A_1A_2] &= [B_1B_2]\,,\\
\mathbf{K}\,\mathrm{d}[A_1A_2] &= \mathrm{d}[B_1B_2] + \vartheta[B_1B_2]\,, \qquad (20)\\
\mathbf{K}\,\mathrm{d}^2[A_1A_2] &= \mathrm{d}^2[B_1B_2] + 2\vartheta\,\mathrm{d}[B_1B_2] + (\ldots)[B_1B_2]\,.
\end{aligned}
$$

Il est bien connu (et on le déduit de $(20_{1,2})$) que l'homographie réalisant la déformation projective du second ordre porte les foyers et les plans focaux de L dans les foyers et les plans focaux correspondants de L', car les foyers et les plans focaux sont des élements du première ordre. Donc on a d'après (20_1)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}A_1 &= \varrho B_1\,,\\
\mathbf{K}A_2 &= \qquad\qquad \varrho^{-1}B_2\,, \qquad (\varrho \neq 0) \qquad (21)\\
\mathbf{K}A_3 &= \alpha_{31}B_1 + \alpha_{32}B_2 + \alpha_{33}B_3\,,\\
\mathbf{K}A_4 &= \alpha_{41}B_1 + \alpha_{42}B_2 \qquad\qquad + \alpha_{44}B_4
\end{aligned}
$$

et

$$\mathbf{K}\, \mathrm{d}[A_1A_2] = (\omega_{11} + \omega_{22} + \alpha_{42}\varrho\omega_2 + \alpha_{31}\varrho^{-1}\omega_1)[B_1B_2] + \alpha_{44}\varrho\omega_2[B_1B_4] - - \alpha_{33}\varrho^{-1}\omega_1[B_2B_3]\,.$$

De (20_2) il résulte

$$\alpha_{42}\varrho\omega_2 + \alpha_{31}\varrho^{-1}\omega_1 = \tau_{11} + \tau_{22} + \vartheta\,, \quad \alpha_{44}\varrho = 1\,, \quad \alpha_{33}\varrho^{-1} = 1$$

ou bien

$$\vartheta = \alpha_{31}\varrho^{-1}\omega_1 + \alpha_{42}\varrho\omega_2 - \tau_{11} - \tau_{22} \tag{22}$$

et

$$\alpha_{33} = \varrho,\ \alpha_{44} = \varrho^{-1}\,. \tag{23}$$

Après celà on a

$$\mathbf{K}[A_1A_2] = [B_1B_2]\,,$$
$$\mathbf{K}[A_1A_3] = \varrho\alpha_{32}[B_1B_2] + \varrho^2[B_1B_3]\,,$$
$$\mathbf{K}[A_1A_4] = \varrho\alpha_{42}[B_1B_2] + [B_1B_4]\,,$$
$$\mathbf{K}[A_1A_5] = \varrho\alpha_{52}[B_1B_2] + \varrho\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_{5i}[B_1B_i]\,,$$
$$\mathbf{K}[A_1A_6] = \varrho\alpha_{62}[B_1B_2] + \varrho\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_{6i}[B_1B_i]\,,$$
$$\mathbf{K}[A_2A_3] = -\varrho^{-1}\alpha_{31}[B_1B_2] + [B_2B_3]\,,$$
$$\mathbf{K}[A_2A_4] = -\varrho^{-1}\alpha_{41}[B_1B_2] + \varrho^{-2}[B_2B_4]\,,$$
$$\mathbf{K}[A_2A_5] = -\varrho^{-1}\alpha_{51}[B_1B_2] + \varrho^{-1}\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_{5i}[B_2B_i]\,,$$
$$\mathbf{K}[A_3A_4] = (\alpha_{31}\alpha_{42} - \alpha_{32}\alpha_{41})[B_1B_2] - \varrho\alpha_{41}[B_1B_3] + \varrho^{-1}\alpha_{31}[B_1B_4] - \varrho\alpha_{42}[B_2B_3] + + \varrho^{-1}\alpha_{32}[B_2B_4] + [B_3B_4]\,.$$

Par substition dans (20_3) on en déduit

$$(b_2\omega_2^2 - b_1\omega_1^2)\,\varrho^2[B_1B_3] + (\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2\,\overline{2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{44}})[B_1B_4] + + b_3\varrho\omega_2^2\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_{5i}[B_1B_i] + b_4\varrho\omega_2^2\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_{6i}[B_1B_i] - - (\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1\,\overline{2\omega_{22} + \omega_{11} + \omega_{33}})[B_2B_3] + (a_1\omega_2^2 - a_2\omega_1^2)\,\varrho^{-2}[B_2B_4] - - a_3\varrho^{-1}\omega_1^2\sum_{i=3}^{n+1}\alpha_{5i}[B_2B_i] + 2\varrho^{-1}\alpha_{31}\omega_1\omega_2[B_1B_4] - 2\varrho\alpha_{41}\omega_1\omega_2[B_1B_3] - - 2\varrho\alpha_{42}\omega_1\omega_2[B_2B_3] + 2\varrho^{-1}\alpha_{32}\omega_1\omega_2[B_2B_4] + 2\omega_1\omega_2[B_3B_4] = = (\bar{b}_2\omega_2^2 - \bar{b}_1\omega_1^2)[B_1B_3] + (\mathrm{d}\omega_2 + \omega_2\,\overline{2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{44} + 2\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{44}})\,. .\,[B_1B_4] + \bar{b}_3\omega_2^2[B_1B_5] + \bar{b}_4\omega_2^2[B_1B_6] - - (\mathrm{d}\omega_1 + \omega_1\,\overline{2\omega_{22} + \omega_{11} + \omega_{33} + 2\tau_{22} + \tau_{11} + \tau_{33}})\,[B_2B_3] + + (\bar{a}_1\omega_2^2 - \bar{a}_2\omega_1^2)[B_2B_4] - \bar{a}_3\omega_1^2[B_2B_5] + 2\omega_1\omega_2[B_3B_4] + + 2(\alpha_{31}\varrho^{-1}\omega_1 + \alpha_{42}\varrho\omega_2 - \tau_{11} - \tau_{22})\{\omega_2[B_1B_4] - \omega_1[B_2B_3]\} + (\ldots)[B_1B_2]\,.$$

La comparaison des coefficients nous donne

$$(b_2\omega_2^2 - b_1\omega_1^2)\,\varrho^2 + b_3\varrho\alpha_{53}\omega_2^2 + b_4\varrho\alpha_{63}\omega_2^2 - 2\varrho\alpha_{41}\omega_1\omega_2 = \bar{b}_2\omega_2^2 - \bar{b}_1\omega_1^2\,,$$
$$b_3\varrho\alpha_{54}\omega_2^2 + b_4\varrho\alpha_{64}\alpha_2^2 + 2\varrho^{-1}\alpha_{31}\omega_1\omega_2 = \omega_2(2\tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{44}) +$$
$$+ 2\omega_2(\alpha_{31}\varrho^{-1}\omega_1 + \alpha_{42}\varrho\omega_2 - \tau_{11} - \tau_{22})\,,$$
$$b_3\varrho\alpha_{55}\omega_2^2 + b_4\varrho\alpha_{65}\omega_2^2 = \bar{b}_3\omega_2^2\,,$$
$$b_3\varrho\alpha_{56}\omega_2^2 + b_4\varrho\alpha_{66}\omega_2^2 = \bar{b}_4\omega_2^2\,,$$
$$a_3\varrho^{-1}\alpha_{53}\omega_1^2 + 2\varrho\alpha_{42}\omega_1\omega_2 = \omega_1(2\tau_{22} + \tau_{11} + \tau_{33}) + 2\omega_1(\alpha_{31}\varrho^{-1}\omega_1 + \alpha_{42}\varrho\omega_2 -$$
$$- \tau_{11} - \tau_{22})\,,$$
$$(a_1\omega_2^2 - a_2\omega_1^2)\,\varrho^{-2} - a_3\varrho^{-1}\alpha_{54}\omega_1^2 + 2\varrho^{-1}\alpha_{32}\omega_1\omega_2 = a_1\omega_2^2 - \bar{a}_2\omega_1^2\,,$$
$$a_3\varrho^{-1}\alpha_{55}\omega_1^2 = \bar{a}_3\omega_1^2\,,$$
$$b_3\varrho\alpha_{5i}\omega_2^2 + b_4\varrho\alpha_{6i}\omega_2^2 = 0 \quad (i = 7, \ldots, n+1)\,,$$
$$a_3\varrho^{-1}\alpha_{5i}\omega_1^2 = 0 \quad (i = 6, \ldots, n+1)\,.$$

Par comparaison ultérieure des coefficients de ω_1^2, $\omega_1\omega_2$, ω_2^2 il résulte

$$b_1\varrho^2 = \bar{b}_1\,, \tag{24}$$
$$b_2\varrho^2 + b_3\varrho\alpha_{53} + b_4\varrho\alpha_{63} = \bar{b}_2\,, \tag{25}$$
$$\alpha_{41} = 0\,, \tag{26}$$
$$\varrho(b_3\alpha_{54} + b_4\alpha_{64} - 2\alpha_{42})\,\omega_2 = \tau_{44} - \tau_{22}\,, \tag{27}$$
$$(b_3\alpha_{55} + b_4\alpha_{65})\,\varrho = \bar{b}_3\,, \tag{28}$$
$$(b_3\alpha_{56} + b_4\alpha_{66})\,\varrho = \bar{b}_4\,, \tag{29}$$
$$\varrho^{-1}(a_3\alpha_{53} - 2\alpha_{31})\,\omega_1 = \tau_{33} - \tau_{11}\,, \tag{30}$$
$$\alpha_{32} = 0\,, \tag{31}$$
$$a_2\varrho^{-2} + a_3\varrho^{-1}\alpha_{54} = \bar{a}_2\,, \tag{32}$$
$$a_1\varrho^{-2} = \bar{a}_1\,, \tag{33}$$
$$a_3\varrho^{-1}\alpha_{55} = \bar{a}_3\,, \tag{34}$$
$$\varrho(b_3\alpha_{5i} + b_4\alpha_{6i}) = 0 \quad (i = 7, \ldots, n+1)\,, \tag{35}$$
$$\varrho^{-1}a_3\alpha_{56} = 0\,, \tag{36}$$
$$\varrho^{-1}a_3\alpha_{5i} = 0 \quad (i = 7, \ldots, n+1)\,. \tag{37}$$

Condition nécessaire et suffisante pour l'existence de la déformation projective du second ordre entre les congruences (11) et (16) est l'existence de tels α_{ij} ($\alpha_{11} = \alpha_{22}^{-1} = \varrho \neq 0$) qu'on ait (24)—(37).

La correspondance entre les deux congruences est donnée par les équations

$$\tau_{13} = 0,\ \tau_{24} = 0\,. \tag{38}$$

Par différentiation extérieure

$$[\omega_1(\tau_{33} - \tau_{11})] = [\omega_2(\tau_{44} - \tau_{22})] = 0\,, \tag{39}$$

on a donc

$$\tau_{33} - \tau_{11} = s_1\omega_1 \,, \quad \tau_{44} - \tau_{22} = s_2\omega_2 \,. \tag{40}$$

On voit facilement qu'il est possible de choisir $\alpha_{41}, \alpha_{42}, \alpha_{31}, \alpha_{32}, \alpha_{5i}, \alpha_{6i}$ ($i = 7, \ldots, n+1$) de manière que (26), (27), (30), (31), (35), (37) sont satisfaites. Il ne reste que de déterminer $\varrho, \alpha_{53}, \alpha_{54}, \alpha_{55}, \alpha_{56}, \alpha_{63}, \alpha_{65}, \alpha_{66}$ de manière que l'on ait (24), (25), (33), (32), (28), (34), (29), (36).

3. Je vais étudier *la déformation projective du second ordre des congruences de droites plongées dans* S_n, $n \geqq 5$, qui ne sont pas plongées dans S_4 et dont les deux surfaces focales possèdent précisement un réseau conjugué. Dans ce cas on a

$$a_1 b_1 \neq 0 \,. \tag{41}$$

On a aussi

$$a_3 \neq 0 \,, \tag{42}$$

puisque dans le cas $a_3 = 0$ l'espace osculateur de la surface (A_1) serait $[A_1A_2A_3A_4]$, donc à trois dimensions. D'après (14_2) il est possible de choisir

$$a_2 = 0 \,. \tag{43}$$

De (42) et (15_1) il résulte $e_{56} = 0$ de sorte que b_4 est un invariant rélatif. Dans le cas $b_4 = 0$ la congruence L serait plongée dans $S_4^* \subset S_n$. Pour le voir, observons que l'expression b_3 serait un invariant rélatif, mais on aurait $b_3 \neq 0$ vu que l'espace osculateur de la surface (A_2) devait être à quatre dimensions. De $(9_{3,6})$ il résulterait ensuite

$$a_3[\omega_{5i}\omega_1] = b_3[\omega_{5i}\omega_2] = 0$$

pour $i = 6, \ldots, n+1$, ou

$$\omega_{5i} = 0 \quad (i = 6, \ldots, n+1)$$

et

$$\mathrm{d}[A_1A_2A_3A_4A_5] = (\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} + \omega_{55})[A_1A_2A_3A_4A_5] \,.$$

On a donc

$$b_4 \neq 0 \tag{44}$$

et d'après (14) il est possible de choisir

$$b_2 = b_3 = 0 \,. \tag{45}$$

Les conditions pour la déformation projective sont ensuite

$$b_1\varrho^2 = \bar{b}_1 \,, \tag{24}$$
$$b_4\varrho\alpha_{63} = 0 \,, \tag{46}$$
$$a_1\varrho^{-2} = \bar{a}_1 \,, \tag{33}$$
$$a_3\varrho^{-1}\alpha_{54} = 0 \,, \tag{47}$$
$$b_4\varrho\alpha_{65} = 0 \,, \tag{48}$$
$$a_3\varrho^{-1}\alpha_{55} = \bar{a}_3 \,, \tag{34}$$
$$b_4\varrho\alpha_{66} = \bar{b}_4 \,, \tag{29}$$
$$a_3\varrho^{-1}\alpha_{56} = 0 \,. \tag{36}$$

Je détermine $\alpha_{54}, \alpha_{55}, \alpha_{56}, \alpha_{63}, \alpha_{65}, \alpha_{66}$ de (47), (34), (36), (46), (48), (29); condition nécessaire et suffisante pour la déformation projective est donc l'existence de tel ϱ que

$$b_1\varrho^2 = \bar{b}_1 \,, \tag{24}$$
$$a_1\varrho^{-2} = \bar{a}_1 \,. \tag{33}$$

En éliminant ϱ on déduit

$$a_1b_1 = \bar{a}_1\bar{b}_1 \,. \tag{49}$$

Puisque *la forme ponctuelle* (de Laplace-Darboux; voir E. ČECH, *Déformation ponctuelle des congruence de droites,* ce Journal *5* (80), 1955) de la congruence (11) est

$$\varphi = a_1b_1\omega_1\omega_2 \,, \tag{50}$$

il résulte que *le problème de la déformation projective du second ordre des congruences de droites plongées dans un S_n, $n \geqq 5$, est équivalent au problème de leur déformation ponctuelle,* introduite par M. E. Čech.

L'éxistence de ϱ qui simultanement satisfait (24) et (33), peut être interpretée géometriquement de manière suivante:

La congruence L peut être orientée en déclarant une surface focale pour la première surface focale. La correspondance entre L et L' étant développable, l'orientation se transporte de manière évidente à L'. Je dis que la correspondance développable entre deux congruences L et L' (droite $\Leftrightarrow$ droite) est étendue à une *correspondance ponctuelle* entre L et L', si l'on a choisi pour chaque couple de droites correspondantes une homographie entre elles transportant le premier (second) foyer de L au premier (second) foyer de L'.

Je dis que deux congruences en correspondance développable sont en *démidéformation projective de 1. sorte* s'il est possible d'étendre cette correspondance à une correspondance ponctuelle de manière que pour chaque couple des droites correspondantes il existe une homographie tangente de la correspondance entre les premières surfaces focales (cette correspondance étant engendrée de manière évidente par la correspondance entre les congruences) qui coïncide avec la correspondance ponctuelle sur les droites de la congruence. La correspondance ponctuelle entre les congruences (justement introduite) est aussi appelée la demidéformation ponctuelle.

Soient (11) et (16) les deux congruences, l'extension de la correspondance entre elles en une correspondance ponctuelle soit

$$A_1 + tA_2 \rightarrow B_1 + t\varrho^{-2}B_2 \,. \tag{51}$$

Si (51) est une demidéformation ponctuelle de 1. sorte, il existe une homographie pour laquelle on a

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1A_1 &= B_1 \,, \\ \mathbf{K}_1A_2 &= \qquad \varrho^{-2}B_2 \,, \qquad\qquad (52) \\ \mathbf{K}_1A_3 &= p_{31}B_1 \qquad + p_{33}B_3 \,, \\ \mathbf{K}_1\,\mathrm{d}A_1 &= \mathrm{d}B_1 + (\ldots)\,B_1 \,. \qquad\qquad (53) \end{aligned}$$

Après la substitution dans (53) il résulte

$$a_1\omega_2\varrho^{-2}B_2 + p_{33}\omega_1B_3 = \bar{a}_1\omega_2B_2 + \omega_1B_2 + (\ldots)\,B_1\,,$$

il suffit donc choisir $p_{33} = 1$, mais on doit avoir

$$a_1\varrho^{-2} = \bar{a}_1\,. \tag{33}$$

De même on voit que l'extension

$$A_1 + tA_2 \to \varrho^2B_1 + tB_2 \tag{54}$$

(géométriquement identique avec (51)) est une demidéformation de 2. sorte si et seulement si l'on a (24).

Chaque couple de deux congruences en correspondance développable $\boldsymbol{T}$ est en demidéformation ponctuelle de 1re et de 2onde sorte. Les deux congruences sont en déformation ponctuelle si et seulement s'il existe une extension ponctuelle de la correspondance $\boldsymbol{T}$ qui est simultanément une demidéformation ponctuelle de 1re et de 2onde sorte.

4. Cette partie est consacrée à l'étude de *la déformation projective des congruences de droites dans* S_4. Je m'occuperai seulement des congruences possédant deux surfaces focales avec un seul réseau conjugué. Dans ce cas les équations fondamentales (11) et (14) sont

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}A_1 &= \omega_{11}A_1 + a_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3\,,\\
\mathrm{d}A_2 &= b_1\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 \qquad\qquad + \omega_2A_4\,,\\
\mathrm{d}A_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + a_2\omega_1A_4 + a_3\omega_1A_5\,,\\
\mathrm{d}A_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + b_2\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4 + b_3\omega_2A_5\,,\\
\mathrm{d}A_5 &= \omega_{51}A_1 + \omega_{52}A_2 + \omega_{53}A_3 + \omega_{54}A_4 + \omega_{55}A_5\,.
\end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned}
\delta a_1 &= a_1(e_{11} + e_{44} - 2e_{22})\,,\\
\delta a_2 &= a_2(2e_{33} - e_{11} - e_{44}) - a_3e_{54}\,,\\
\delta a_3 &= a_3(2e_{33} - e_{11} - e_{55})\,,\\
\delta b_1 &= b_1(e_{22} + e_{33} - 2e_{11})\,,\\
\delta b_2 &= b_2(2e_{44} - e_{22} - e_{33}) - b_3e_{53}\,,\\
\delta b_3 &= b_3(2e_{44} - e_{22} - e_{55})\,.
\end{aligned} \tag{56}$$

On a $a_1b_1 \neq 0$, mais $a_3b_3 \neq 0$ aussi, parceque l'espace osculateur de la surface (A_1) resp. (A_2) doit être à quatre dimensions. De $(56_{2,5})$ il résulte qu'il est possible de choisir

$$a_2 = b_2 = 0\,. \tag{57}$$

En vertu de (24), (25), (33), (32), (28), (34), (29), (36) on a ensuite

$$b_1\varrho^2 = \bar{b}_1\,, \tag{24}$$

$$b_3\varrho\alpha_{53} = 0\,, \tag{58}$$

$$a_1\varrho^{-2} = \bar{a}_1\,, \tag{33}$$

$$a_3\varrho^{-1}\alpha_{54} = 0\,, \tag{32}$$

$$b_3\varrho\alpha_{55} = \bar{b}_3\,, \tag{59}$$

$$a_3\varrho^{-1}\alpha_{55} = \bar{a}_3 \,, \tag{34}$$
$$b_3\varrho\alpha_{56} = 0 \,, \tag{60}$$
$$a_3\varrho^{-1}\alpha_{56} = 0 \,. \tag{36}$$

Par le choix

$$\alpha_{53} = \alpha_{54} = \alpha_{56} = 0$$

on satisfait les équations (58), (32), (60) et (36). Pour qu'on pourait déterminer α_{55} de (59) et (34) on doit avoir

$$\frac{b_3}{a_3}\varrho^2 = \frac{\overline{b_3}}{\bar{a}_3} \,. \tag{61}$$

Condition nécessaire et suffisante pour la déformation projective des congruences L et L' dans S_4 est l'existence de tel ϱ qui satisfait simultanement (24), (33), (61). En éliminant ϱ de (24) et (33) on obtient de nouveau que *les congruences en déformation projective sont en déformation ponctuelle*, mais (61) dit que l'implication inverse n'est nullement rempli.

Je vais chercher l'interprétation géométrique de la correspondance ponctuelle (51), ϱ étant déterminé par (61). L'espace tangent à la congruence (55) le long de la droite $[A_1A_2]$ est évidentement $E_5 = [A_1A_2A_3A_4]$, c'est donc un hyperplan dans S_4. Les espaces tangents à la congruence (55) engendrent donc dans l'espace corrélatif à S_4 une surface L^*. On a

$$\mathrm{d}E_5 = (\ldots)[A_1A_2A_3A_4] + a_3\omega_1[A_1A_2A_5A_4] + b_3\omega_2[A_1A_2A_3A_5] \,. \tag{62}$$

Je dis que la correspondance ponctuelle (51) est une *déformation bitangente* des congruences L et L', si pour chaque couple des droites correspondantes il existe une homographie entre les espaces S_4 et S_4' qui est tangente à la correspondance entre les congruences L et L' et simultanément à la correspondance entre les surfaces L^* et L'^* et qui se réduit à (51) sur les deux droites correspondantes. Je trouverai la condition pour que (51) soit une déformation bitangente. L'homographie tangente la plus générale à la correspondance $L \to L'$ est d'après (23)

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}A_1 &= \varrho B_1 \,, \\
\mathbf{K}A_2 &= \qquad \varrho^{-1}B_2 \,, \\
\mathbf{K}A_3 &= \beta_{31}B_1 + \beta_{32}B_2 + \varrho B_3 \,, \\
\mathbf{K}A_4 &= \beta_{41}B_1 + \beta_{42}B_2 \qquad\quad + \varrho^{-1}B_4 \,, \\
\mathbf{K}A_5 &= \beta_{51}B_1 + \beta_{52}B_2 + \beta_{53}B_3 + \beta_{54}B_4 + \beta_{55}B_5
\end{aligned} \tag{63}$$

qui donne précisement (51) sur $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}[A_1A_2A_3A_4] &= [B_1B_2B_3B_4] \,, \\
\mathbf{K}\,\mathrm{d}[A_1A_2A_3A_4] &= (\ldots)[B_1B_2B_3B_4] + a_3\varrho^{-1}\beta_{55}\omega_1[B_1B_2B_5B_4] + \\
&\quad + b_3\varrho\beta_{55}\omega_2[B_1B_2B_3B_5] \,.
\end{aligned} \tag{64}$$

De

$$\mathbf{K}\,\mathrm{d}[A_1A_2A_3A_4] = \mathrm{d}[B_1B_2B_3B_4] + (\ldots)[B_1B_2B_3B_4] \tag{65}$$

il résulte

$$a_3 \varrho^{-1} \beta_{55} = \bar{a}_3, \; b_3 \varrho \beta_{55} = \bar{b}_3 \, , \tag{66}$$

par l'élimination de β_{55} il résulte (61). Dans S_4 on a donc la situation suivante:

La correspondance entre chaque couple de deux congruences peut être etendue (en général par manières différents) en chacune des deux demidéformations ponctuelles et dans la déformation bitangente. La correspondance est une déformation projective si et seulement s'il en existe une extension ponctuelle qui est simultanement une demidéformation de 1^re^ et de 2^onde^ sorte et une déformation bitangente.

5. En terminant je résoudrai les questions d'éxistence de la déformation projective des congruences de droites dans S_4.

D'après ($56_{1,3,4,6}$) on voit, vu l'indépendance des formes $e_{11} + e_{44} - 2e_{22}$, $e_{11} + e_{55} - 2e_{33}$, $e_{22} + e_{33} - 2e_{11}$, $e_{22} + e_{55} - 2e_{44}$ et $a_1 b_1 a_3 b_3 \neq 0$ que l'on peut poser

$$a_1 = b_1 = a_3 = b_3 = 1 \tag{67}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} e_{11} + e_{44} - 2e_{22} = e_{11} + e_{55} - 2e_{33} = e_{22} + e_{33} - 2e_{11} = \\ = e_{22} + e_{55} - 2e_{44} = 0 \, . \end{aligned} \tag{68}$$

D'après (40) on a

$$t_{33} - t_{11} = t_{44} - t_{22} = 0 \, . \tag{69}$$

Pour la congruence L' on a d'après (68) et (69)

$$\begin{aligned} \delta\bar{a}_1 &= \bar{a}_1(t_{11} + t_{44} - 2t_{22}) = \bar{a}_1(t_{11} - t_{22}) \, , \\ \delta\bar{a}_3 &= \bar{a}_3(2t_{33} - t_{11} - t_{55}) = \bar{a}_3(t_{11} - t_{55}) \, , \\ \delta\bar{b}_1 &= \bar{b}_1(t_{22} + t_{33} - 2t_{11}) = \bar{b}_1(t_{22} - t_{11}) \, , \\ \delta\bar{b}_3 &= \bar{b}_3(2t_{44} - t_{22} - t_{55}) = \bar{b}_3(t_{22} - t_{55}) \, . \end{aligned} \tag{70}$$

On peut poser

$$\bar{a}_3 = \bar{b}_3 = 1 \, , \tag{71}$$

ce qui donne

$$t_{11} - t_{55} = t_{22} - t_{55} = 0 \tag{72}$$

et

$$\delta\bar{a}_1 = \delta\bar{b}_1 = 0 \, . \tag{73}$$

Si les deux congruences L et L' sont en déformation projective, il résulte de (24), (33) et (61)

$$\varrho^2 = \bar{b}_1, \; \varrho^{-2} = a_1, \; \varrho^2 = 1$$

ou

$$a_1 = \bar{b}_1 = 1 \, . \tag{74}$$

Soit donnée la congruence L, dont la repère mobile est complétement spécialisé: pour chaque i, j on a

$$[\omega_{ij} \omega_1 \omega_2] = 0 \, . \tag{75}$$

Les congruences L' qui sont en déformation projective avec L, sont données par le système

$$\begin{gathered} \tau_{13} = \tau_{24} = 0 , \\ \tau_{14} = \tau_{15} = \tau_{23} = \tau_{25} = 0 , \\ \tau_{12} = \tau_{21} = \tau_{34} = \tau_{43} = \tau_{35} = \tau_{45} = 0 . \end{gathered} \tag{76}$$

Le système (76) devient fermé par adjonction des équations

$$\begin{aligned} [\omega_1(\tau_{33} - \tau_{11})] &= 0 , \\ [\omega_2(\tau_{44} - \tau_{22})] &= 0 , \\ [\omega_1\tau_{32}] + [\omega_2(\tau_{22} - \tau_{11})] &= 0 , \\ [\omega_1(\tau_{11} - \tau_{22})] + [\omega_2\tau_{41}] &= 0 , \\ [\omega_1\tau_{54}] - [\omega_2\tau_{32}] &= 0 , \\ [\omega_1\tau_{41}] - [\omega_2\tau_{53}] &= 0 , \\ [\omega_1(\tau_{55} - \tau_{33})] &= 0 , \\ [\omega_2(\tau_{55} - \tau_{44})] &= 0 . \end{aligned} \tag{77}$$

Les formes $\tau_{33} - \tau_{11}, \tau_{44} - \tau_{22}, \tau_{55} - \tau_{33}, \tau_{55} - \tau_{44}, \tau_{32}, \tau_{41}, \tau_{53}, \tau_{54}$ sont linéairement indépendantes et on a

$$\tau_{11} - \tau_{22} = -(\tau_{33} - \tau_{11}) - (\tau_{55} - \tau_{33}) + (\tau_{55} - \tau_{44}) + (\tau_{44} - \tau_{22}) .$$

Le déterminant de la matrice polaire des équations (77) est égal à $-\omega_1^4\omega_2^4$.

Le système (76) + (77) est donc en involution et dans S_4 *les congruences qui sont en déformation projective du second ordre avec une congruence donnée dépendent de huit fonctions d'une variable.* Les caractéristiques sont les développables.

Резюме

ПРОЕКТИВНЫЕ ИЗГИБАНИЯ КОНГРУЭНЦИЙ ПРЯМЫХ В S_n

АЛОИС ШВЕЦ (Alois Švec), Прага.

(Поступило в редакцию 12/VII 1955 г.)

Академик Э. Чех разработал теорию проективного изгибания 2-го порядка непараболических конгруэнций в S_3, которую он читал в семинаре по дифференциальной геометрии в уч. г. 1954-55 в Праге. Из своей работы он пока опубдиковал статью *О точечных изгибаниях конгруэнций прямых* (Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80), 1955, стр. 234 до 273), дальнейшие его статьи будут опубликованы в Rendiconti Torino и в настоящем журнале.

В духе работ академика Чеха я изучил проективные изгибания 2-го порядка непараболических конгруэнций прямых в S_n, $n \geqq 4$;

при этом я ограничился общим случаем, когда существуют фокальные поверхности с единственной сопряженной сетью. При этом я определяю проективное изгибание конгруэнции прямых при помощи линейных координат в S_n так же, как и в случае $n = 3$. Из дальнейшего станет ясным, что в S_n, $n \geqq 5$, для того, чтобы две конгруэнции находились в соответствии проективного изгибания 2-го порядка, необходимо и достаточно, чтобы они были в соответствии точечного изгибания.

В S_4 положение несколько иное. Две конгруэнции в проективном изгибании должны находиться в соответствии точечного изгибания, однако, обратное утверждение не имеет места. Пусть даны две конгруэнции L и $\bar{L}$, которые находятся в соответствии точечного изгибания. Тогда между каждыми двумя взаимно соответствующими прямыми $p \in L$ и $\bar{p} \in \bar{L}$ существует проективное соответствие π, переводящее фокусы обеих конгруэнций друг в друга таким образом, что совокупность этих проективных соответствий π образуют как раз указанное точечное изгибание. Касательные пространства конгруэнции L вдоль ее прямых образуют в пространстве S_4^*, двойственном к пространству S_4, поверхность L^*. Для каждой пары соответствующих прямых конгруэнций L, $\bar{L}$ (даже если эти последние не находятся в соответствии точечного изгибания) существуют коллинеации пространства S_4 на $\bar{S}_4$, которые являются касательными к соответствию между конгруэнциями L и $\bar{L}$ и к соответствию между двойственными поверхностями L и $\bar{L}^*$. Все эти коллинеации образуют между p и $\bar{p}$ одну и ту же коллинеацию π^*. Две конгруэнции в точечном изгибании находятся в соответствии проективного изгибании 2-го порядка тогда и только тогда, если $\pi = \pi^*$ для каждой пары взаимно соответствующих прямых.

Вопрос о существовании проективных изгибаний конгруэнций в S_4 разрешается следующей теоремой:

Конгруэнцию L можно произвольно выбрать, конгруэнции $\bar{L}$, которые с ней находятся в проективном изгибании 2-го порядка, зависят от восьми функций одной переменной.