Václav Vilhelm

Двойственное себе ядро условий Биркгофа в структурах с конечными цепями

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 4, 439–450

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100160

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Математический институт Чехословацкой Академии наук

Т. 5 (80) ПРАГА 30. XI. 1955 г. • № 4

ДВОЙСТВЕННОЕ СЕБЕ ЯДРО УСЛОВИЙ БИРКГОФА В СТРУКТУРАХ С КОНЕЧНЫМИ ЦЕПЯМИ

ВАЦЛАВ ВИЛЬГЕЛЬМ (Václav Vilhelm), Прага.

(Поступило в редакцию 4/I 1955 г.)

В настоящей работе анализируются условия Биркгофа в структурах с конечными цепями. Показано, что напр. нижнее условие Биркгофа равносильно двум простым условиям 1., 2., которые требуют, чтобы структура не содержала некоторых весьма простых подструктур. При этом условие 1. двойственно себе самому, так что оно является общим для обоих условий Биркгофа. Во второй части работы доказано, что это условие 1. в то же время тесно связано с теоремой Жордана-Гельдера с подобием простых квоциентов в структурах с конечными цепями.

1. Основные определения и обозначения

В работе мы будем придерживаться обозначений, введенных в статье [2].[1]) А именно, множетсво элементов x структуры S, для которых $a \geqq x \geqq b$, где $a, b \in S$, $a \geqq b$, мы будем называть *квоциентом* и обозначать через a/b. Если a/b содержит точно два элемента, мы назовем a/b *простым квоциентом*.

Пусть R_b^a — цепь в структуре S между элементами $a, b \in S$, $a \geqq b$. Мы говорим, что R_b^a имеет длину n (n — целое неотрицательное число), соотв. ∞, если множество R_b^a содержит $n + 1$ элементов, соотв. если R_b^a есть бесконечное множество. *Длиной структуры* S мы назовем супремум длин всех ее цепей R_b^a, где $a, b \in S$, $a \geqq b$.

Если $c, d \in R_b^a$, $c \geqq d$, то множество $\underset{x \in S}{E} [x \in R_b^a, d \leqq x \leqq c]$ есть цепь, которую мы обозначим через R_d^c.

В дальнейшем нам будут полезны следующие два определения.

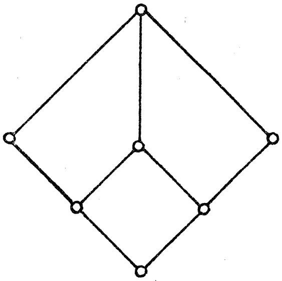
[1]) См. [2] в списке литературы в конце статьи.

Определение 1.1. (О. Орэ, [3].) *Мы говорим, что структура S есть циклическая структура, если она является объединением (в смысле теории множеств) двух своих цепей R_b^a, S_b^a, имеющих только два общих элемента $a, b \in S$.*[2])

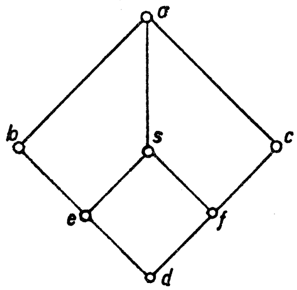
Определение 1.2. *Подструктуру $\overline{S}$ структуры S мы назовем насыщенной, если каждая цепь R_b^a, насыщенная*[3]) *в $\overline{S}$, насыщена и в S.*

2. Строение условий Биркгофа

В настоящей главе мы обратимся к исследованию условий Биркгофа для простых квоциентов в структурах с конечными цепями (см. [2], определение 3,2). Основную роль здесь играет следующая теорема.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Теорема 2.1. *Пусть S — структура с конечными цепями, не удовлетворяющая нижнему условию Биркгофа. Тогда S содержит насыщенную циклическую подструктуру длины $\geqq 3$ или насыщенную подструктуру S_1, содержащую 7 элементов, с диаграммой на фиг.* 1.

Доказательство. Пусть в структуре S не существует насыщенной циклической подструктуры длины $\geqq 3$. Тогда нужно доказать, что в S существует насыщенная подструктура S_1. Предположим пока, что каждый квоциент в S имеет конечную длину. (В следствии за теоремой 2.3 выяснится, что это предположение справедливо.) Тогда, так как S не удовлетворяет нижнему условию Биркгофа, в ней существует квоциент a/d наименьшей длины δ, также не удовлетворяющий этому условию. Очевидно, будет $\delta \geqq 3$, δ — натуральное число. Нетрудно видеть, что тогда в квоциенте a/d существуют элементы b, c так, что

$$a/b \underset{d}{\sim} c/d \quad (\text{т. е.} \quad a = b \vee c\,, \quad d = b \wedge c)\,, \tag{1}$$

---

[2]) Итак, если $c \in R_b^a$, $d \in S_b^a$, $b < c < a$, $b < d < a$, то $c \vee d = a$, $c \wedge d = b$.

[3]) Цепь R_b^a насыщена в S, если для любой цепи U_b^a в S для которой $R_b^a \subseteq U_b^a$, имеет место $R_b^a = U_b^a$. Другие авторы называют такие цепи максимальными или связными.

где a/b, a/c — простые квоциенты в S, но c/d или b/d не является простым квоциентом в S.

Пусть R_d^b, соотв. R_d^c, — какая-либо насыщенная цепь между b, d, соотв. c, d, длины δ_1, соотв. δ_2. Очевидно, $\delta_1 + \delta_2 \geqq 3$. Если бы $\delta_1 = 1$ или $\delta_2 = 1$, то цепи ${}^1R_d^a = \{a\} + R_d^b$, ${}^2R_d^a = \{a\} + R_d^c$ образовали бы в S насыщенную циклическую подструктуру длины $\geqq 3$, что противоречит предположению. Значит, $\delta_1 > 1$, $\delta_2 > 1$. Аналогично, если бы объединение $\bar{e} \vee \bar{f}$ любых двух элементов $\bar{e} \in R_d^b$, $\bar{f} \in R_d^c$, отличных от d, было равно a, то ${}^1R_d^a$, ${}^2R_d^a$ образовали бы в S насыщенную циклическую подструктуру длины $\geqq 3$, что невозможно.

Итак, в S существуют элементы $e \in R_d^b$, $f \in R_d^c$, где $d < e < b$, $d < f < c$, такие, что $e < e \vee f = s < a$ (фиг. 2). Так как длина квоциентов a/e, a/f, s/d меньше δ, то они удовлетворяют нижнему условию Биркгофа, а значит и нижнему условию простых квоциентов ([2], теорема 3,3).

Положим

$$t_1 = b \wedge s\,, \quad t_2 = c \wedge s\,.$$

Имеем $e \leqq t_1$, $f \leqq t_2$. Легко видеть, что

$$a/b \underset{d}{\sim} s/t_1\,, \quad a/c \underset{d}{\sim} s/t_2\,, \tag{2}$$

так что s/t_1, соотв. s/t_2 есть простой квоциент в квоциенте a/e, соотв. a/f, следовательно, и в S. Далее имеем $s \geqq t_1 \vee t_2 \geqq e \vee f = s$. Отсюда $t_1 \vee t_2 = s$ и $t_1 \wedge t_2 = d$, так как

$$d = b \wedge c \geqq t_1 \wedge t_2 \geqq d\,;$$

поэтому

$$s/t_1 \underset{d}{\sim} t_2/d\,, \tag{3}$$

так что t_1/d, t_2/d — простые квоциенты в квоциенте s/d, следовательно, и в S. Отсюда следует, что

$$t_1 = e\,, \quad t_2 = f\,. \tag{4}$$

Теперь мы будем различать два случая.

а) a/s — простой квоциент в S.

Согласно (2) и (4), имеем

$$a/b \underset{d}{\sim} s/e\,, \quad a/c \underset{d}{\sim} s/f\,, \tag{5}$$

так что b/e, соотв. c/f является простым квоциентом в a/e, соотв. в a/f, а значит и в S. Из предыдущего ясно, что s/e, s/f, e/d, f/d будут также простыми квоциентами в S. Из (2), (3), (4), (5) следует, что элементы a, b, c, d, e, f, s образуют в S насыщенную подструктуру S_1, с диаграммой на фиг. 1.

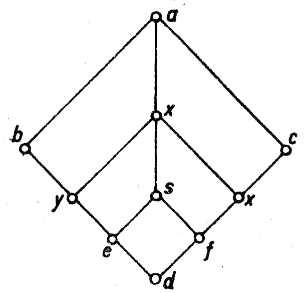
б) a/s не является простым квоциентом в S. Тогда существует элемент $x \in S$ так, что $s < x < a$ (см. фиг. 3), причем x/s — простой квоциент. Так как в квоциенте a/e, согласно (2) и (4), имеет место $a/b \underset{d}{\sim} s/e$ и a/b — простой квоциент, то согласно [2], теорема 3,3 и теорема 3,2, получим $x/y \underset{d}{\sim} s/e$, где $y = b \wedge x$ и x/y — простой квоциент в a/e, а значит и в S. Если положить $z = x \wedge c$, то получим аналогично $x/z \underset{d}{\sim} s/f$ и, в частности,

$$d < f < z . \tag{6}$$

Теперь элемент $y \vee z$ лежит в простом квоциенте x/y в S, так что будет или $y \vee z = y$ или $y \vee z = x$. Однако, первый случай не может наступить, так как из него следует $z \leqq y$, откуда, согласно (6), получаем

$$d = b \wedge c \geqq y \wedge z = z > d$$

что невозможно. Следовательно, $y \vee z = x$. Наконец, из соотношения $d = b \wedge c \geqq y \wedge z \geqq d$ следует $y \wedge z = d$.



Фиг. 3.

Поэтому $x/y \underset{d}{\sim} z/d$, причем x/y есть простой квоциент в S, а z/d таковым не является, ибо справедливо (6). Итак, квоциент x/d длины меньшей δ не выполняет нижнего условия простых квоциентов, а тем более нижнего условия Биркгофа (см. [2], теорема 3,3), что противоречит предположению, так что случай б) не наступит. Это доказывает (в предположении конечной длины каждого квоциента в S) нашу теорему.

Из теоремы 2.1 вытекает следствие:

Теорема 2.2. *Пусть S — структура с конечными цепями. S удовлетворяет нижнему условию Биркгофа тогда и только тогда, если она не содержит ни насыщенной циклической подструктуры длины $\geqq 3$, ни насыщенной подструктуры с диаграммой на фиг.* 1.

Доказательство. Теорема является непосредственным следствием теоремы 2.1 и того обстоятельства, что структура S, содержащая насыщенную циклическую подструктуру длины $\geqq 3$ или насыщенную подструктуру S_1, не может, очевидно, удовлетворять нижнему условию Биркгофа.

Замечание. Итак, по теореме 2.2 нижнее условие Биркгофа в структурах с конечными цепями равносильно следующим двум требованиям:

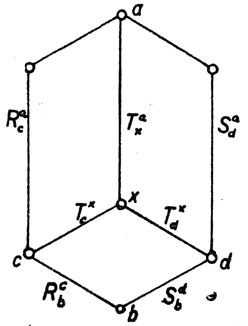
1. *в S не сущестсует насыщенной циклической подструктуры длины $\geqq 3$,*
2. *в S не существует насыщенной подструктуры с диаграммой на фиг.* 1.

Обратим внимание на то, что требование 1. двойственно самому себе и содержится в нижнем и верхнем условии Биркгофа. Ввиду этого представляется целесообразным исследовать это требование более подробно. Хорошо известно, что в структуре S с конечными цепями, выполняющей нижнее или верхнее условие Биркгофа, каждые две насыщенные цепи R_b^a, S_b^a, где $a, b \in S$, $a \geqq b$, имеют одинаковую длину. Судя по нашему результату, можно думать, что это обстоятельство связано только с условием 1. Действительно, следующая теорема подтверждает это предположение.

Теорема 2.3. *Пусть S — произвольная структура. Для того, чтобы любые две насыщенные цепи R_b^a, S_b^a в S, где a, $b \in S$, $a \geqq b$, имели одинаковую длину, необходимо и достаточно, чтобы:*

длины производящих цепей ${}^1T_d^c$, ${}^2T_d^c$ каждой насыщенной циклической подструктуры $S' = {}^1T_d^c + {}^2T_d^c$ в S были одинаковы.

Замечание. Эта теорема является непосредственным следствием теоремы Орэ (см. [3], теорема 7). Тем не менее мы дадим для удобства читателей краткое ее доказательство.



Фиг. 4.

Доказательство. Условие теоремы является, очевидно, необходимым. Докажем его достаточность. Выберем в S два элемента $a, b, a \geqq b$ и две насыщенные цепи между ними R_b^a, S_b^a. Если обе цепи имеют длину ∞, то нечего доказывать. Поэтому достаточно предположить, что, напр., цепь R_b^a имеет конечную длину d. Если $d = 1$, то ясно, что и S_b^a имеет длину 1. Пусть n — натуральное число, $n > 1$. Предположим, что любые две насыщенные цепи $R_{\bar{b}}^{\bar{a}}$, $S_{\bar{b}}^{\bar{a}}$ между $\bar{a}, \bar{b}, \bar{a} \geqq \bar{b}$, из которых хоть одна конечной длины $< n$, имеют одинаковую длину, и возьмем насыщенные цепи R_b^a, S_b^a, где R_b^a имеет длину $d = n$. Очевидно, можно предположить, что R_b^a, S_b^a не образуют циклической подструктуры, так что существуют элементы $c \in R_b^a$, $a > c > b$, $d \in S_b^a$, $a > d > b$ так, что

$$x = c \vee d < a \quad \text{или} \quad y = c \wedge d > b\,. \tag{7}$$

Предположим, что наступит первый случай $c \vee d < a$ (см. фиг. 4). Пусть T_x^a, соотв. T_c^x, соотв. T_d^x — насыщенная цепь между a, x, соотв. x, c, соотв. x, d длины d_1, соотв. d_2, соотв. d_3. Так как $c > b$ и цепь R_b^a имеет конечную длину n, то цепь R_c^a[4]) имеет длину $i < n$, так что по предположению индукции имеет место

$$i = d_1 + d_2\,. \tag{8}$$

Так как $a > x$, то будет $d_1 > 0$ и, следовательно, $i > d_2$. Поэтому длина цепи $T_c^x + R_b^c$ будет равна $d_2 + (n - i) < n$, так что по предположению индукции каждая насыщенная цепь U_b^x имеет конечную длину $d_2 + (n - i)$. Пусть теперь m — длина цепи S_b^a, j_1 — длина цепи S_d^a и j_2 — длина цепи S_b^d, так что

$$m = j_1 + j_2\,. \tag{9}$$

[4]) Обозначения согласно главе 1.

Согласно предыдущему, цепи $T_c^x + R_b^c$, $T_d^x + S_b^d$ обе одинаковой длины и поэтому

$$d_2 + (n - i) = d_3 + j_2 \,. \tag{10}$$

Так как $d > b$, то будет

$$j_2 > 0 \,. \tag{11}$$

Из (8) и (10) следует

$$i + d_2 + (n - i) = d_1 + d_2 + d_3 + j_2$$

откуда, ввиду (11), получаем

$$n = d_1 + d_3 + j_2 > d_1 + d_3 \,. \tag{12}$$

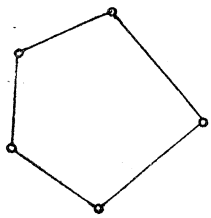
Итак, по предположению индукции цепи $T_x^a + T_d^x$ и S_d^a обе одинаковой длины, так что

$$d_1 + d_3 = j_1 \,. \tag{13}$$

Из (8), (9), (10) и (13) следует

$$n = i + (n - i) = d_1 + d_2 + (n - i) = d_1 + d_3 + j_2 = j_1 + j_2 = m \,.$$

Случай $c \wedge d > b$ исследуется двойственным образом. Этим теорема доказана.



Фиг. 5.

Следствие. *Пусть в структуре S с конечными цепями не существует насыщенной подструктуры длины $\geqq 3$. Тогда каждый квоциент в S имеет конечную длину. Этим одновременно завершается и доказательство теоремы* 2.1.

Из теоремы 2.2 и двойственной ей теоремы следует

Теорема 2.4. *Пусть S — структура с конечными цепями. Пусть S выполняет верхнее и не выполняет нижнее условие Биркгофа. Тогда S содержит насыщенную подструктуру S_1 с диаграммой на фиг.* 1.

Условие 1. из замечания за теоремой 2.2 нетрудно привести к виду, характеризующему модулярные (дедекиндовы) структуры. Об этом говорит следующая

Теорема 2.5. *Структура S является модулярной тогда и только тогда, если она не содержит циклическую подструктуру длины $\geqq$ 3.*

Доказательство. Структура S является, согласно [1] (гл. V, § 2, теорема 2), модулярной тогда и только тогда, если она не содержит подструктуры S_0, изображенной на диаграмме фиг. 5. Ясно, что S содержит S_0 тогда и только тогда, если она содержит циклическую подструктуру длины $\geqq$ 3.

Не представляет труда усилить условие 1. из замечания за теоремой 2.2 так, чтобы получить из него новый вид нижнего (соогв. верхнего) условия Биркгофа в структурах с конечными цепями. С этой целью введем следующие обозначения. Пусть R^a_b, S^a_b — две насыщенные цепи в структуре S. Мы скажем, что R^a_b, S^a_b образуют σ — (соотв. π —) пару, если для любых двух элементов c, d, где $c \in R^a_b$, $d \in S^a_b$, $b < c < a$, $b < d < a$, имеет место $c \vee d = a$ (соотв. $c \wedge d = b$). Тогда справедлива

Теорема 2.6. *Структура S с конечными цепями удовлетворяет нижнему (соотв. верхнему) условию Биркгофа тогда и только тогда, если в S не существует π- (соотв. σ-) пары насыщенных цепей, из которых хоть одна имеет длину $\geqq 3$.*

Доказательство. 1. Пусть в S существует π-пара насыщенных цепей, из которых хоть одна имеет длину $\geqq 3$. Пусть это будут цепи

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_n = b\ ,$$

$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_m = b\ , \quad m \geqq 3\ .$$

Тогда

$$a/a_1 \underset{d}{\sim} b_1/b\ ,$$

так что S не выполняет нижнего условия Биркгофа.

2. Пусть в S не существует такой π-пары. Тогда в S, очевидно, не существует ни насыщенной циклической подструктуры длины $\geqq 3$, ни насыщенной подструктуры S_1 из теоремы 2.2. Следовательно, в силу этой теоремы в S выполнено нижнее условие Биркгофа.

3. Теорема Жордана-Гельдера

Известно ([2], теорема 4,4), что в структуре с конечными цепями имеет место теорема Жордана-Гельдера с нижним простым подобием квоциентов тогда и только тогда, если эта структура выполняет нижнее условие Биркгофа. Зададимся теперь вопросом, каким более слабым условием нужно заменить нижнее условие Биркгофа, если мы хотим, чтобы в структуре с конечными цепями имела место теорема Жордана-Гельдера только с подобием простых квоциентов. Путь к решению этого вопроса нам указывает теорема 2.2 и теорема ей двойственная. Искомое условие, очевидно, двойственно себе и содержится в нижнем и верхнем условиях Биркгофа. Поэтому можно ожидать, что оно будет в тесной связи с требованием 1. из замечания за теоремой 2.2. Прежде всего, однако, точно поясним, что мы понимаем под теоремой Жордана-Гельдера с подобием простых квоциентов.

Определение 3.1. Пусть

$$a = a_0 > a_1 > \ldots > a_n = b\ , \tag{14}$$

$$a = b_0 > b_1 > \ldots > b_m = b \tag{15}$$

две насыщенные цепи в структуре S.

Мы скажем, что для цепей (14), (15) справедлива *теорема Жордана-Гельдера с подобием простых квоциентов*, если $n = m$ и если существует перестановка φ чисел $0, 1, \ldots, (n-1)$ такая, что простой квоциент a_k/a_{k+1} подобен[5]) простому квоциенту $b_{\varphi(k)}/b_{\varphi(k)+1}$:

$$a_k/a_{k+1} \sim b_{\varphi(k)}/b_{\varphi(k)+1}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1)\,. \tag{16}$$

В структуре S теорема Жордана-Гельдера с подобием простых квоциентов справедлива в том случае, если она справедлива для любых двух насыщенных цепей между одной и той же парой элементов.

Теорема 3.1. *Пусть S — структура с конечными цепями. В S справедлива теорема Жордана-Гельдера с подобием простых квоциентов тогда и только тогда, если эта теорема справедлива для любых двух насыщенных цепей $\bar{R}_b^a$, $\bar{S}_b^a$ в S, которые образуют в S циклическую подструктуру длины $\geqq 3$.*

Доказательство. Условие теоремы, очевидно, необходимо. Предположим, что для любых двух насыщенных цепей между одними и теми же двумя элементами, образующих в S циклическую подструктуру длины $\geqq 3$, справедлива теорема Жордана-Гельдера. Тогда по теореме 2.3 всякие две насыщенные цепи в S между двумя элементами $\bar{a}, \bar{b} \in S$, $\bar{a} \geqq \bar{b}$ имеют одинаковую длину. Пусть в S даны насыщенные цепи (14), (15), так что $m = n$. Остается доказать существование перестановки φ чисел $0, 1, \ldots, \ldots, (n-1)$ такой, что $a_i/a_{i+1} \sim b_{\varphi(i)}/b_{\varphi(i)+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Это утверждение очевидно для $n = 1$. Далее воспользуемся индукцией. Предположим, что утверждение доказано для каждой пары насыщенных цепей между двумя произвольными элементами $\bar{a}, \bar{b} \in S$, $\bar{a} > \bar{b}$, длины которых меньше n, и возьмем цепи (14) и (15). Если (14) и (15) образуют в S насыщенную циклическую подструктуру, то наше утверждение, очевидно, справедливо. Поэтому предположим, что (14), (15) не образуют насыщенной циклической подструктуры. Тогда в цепи (14) существует элемент a_i $(1 \leqq i \leqq n-1)$, и в цепи (15) — элемент b_j $(1 \leqq j \leqq n-1)$ так, что

$$\text{а) } a_i \vee b_j < a \quad \text{или} \quad \text{б) } a_i \wedge b_j > b\,. \tag{17}$$

Предположим прежде всего, что наступит случай (17а); тогда $x = a_i \vee b_j < a$ (см. фиг. 4, где мы положили $c = a_i$, $d = b_j$).

Возьмем между a, x, соотв. x, a_i, соотв. x, b_j насыщенную цепь T_x^a, соотв. $T_{a_i}^x$, соотв. $T_{b_j}^x$ и обозначим для краткости цепи (14) и (15) соответственно через R_b^a и S_b^a. Наконец, при обозначениях главы 1 введем цепи $R_{a_i}^a$, $R_b^{a_i}$, $S_{b_j}^a$, $S_b^{b_j}$. Из (17а) и из того факта, что $0 < i, j < n$, следует, что цепи $R_{a_i}^a$,

[5]) Определение подобия (или проективности) см. [2], определение 2.3 или [1], гл. V, § 5.

$T^x_{a_i} + R^{a_i}_b$, $S^a_{b_j}$ имеют длину $< n$. По предположению индукции, для пары цепей $R^a_{a_i}$, $T^a_x + T^x_{a_i}$ (соотв. $T^a_x + T^x_{b_j}$, $S^a_{b_j}$, соотв. $T^x_{a_i} + R^{a_i}_b$, $T^x_{b_j} + S^{b_j}_b$) существует простое отображение f_1 (соотв. f_2, соотв. f_3) множества всех простых квоциентов первой цепи на множество простых квоциентов второй цепи такое, что соответствующие друг другу таким образом простые квоциенты подобны.

Определим теперь отображение f множества простых квоциентов цепи R^a_b в множество простых квоциентов цепи S^a_b так:

Возьмем квоциент a_k/a_{k+1}. Пусть прежде всего $k < i$, так что a_k/a_{k+1} является простым квоциентом в $R^a_{a_i}$. Если $f_1(a_k/a_{k+1})$ — простой квоциент в цепи T^a_x, то положим $f(a_k/a_{k+1}) = f_2[f_1(a_k/a_{k+1})]$. Если $f_1(a_k/a_{k+1})$ — простой квоциент в $T^x_{a_i}$, то положим $f(a_k/a_{k+1}) = f_3[f_1(a_k/a_{k+1})]$, поскольку $f_3[f_1(a_k/a_{k+1})]$ — простой квоциент в $S^{b_j}_b$. В противном случае он лежит в цепи $T^x_{b_j}$ и тогда мы определим $f(a_k/a_{k+1}) = f_2[f_3[f_1(a_k/a_{k+1})]]$. Пусть, далее, будет $k \geqq i$; тогда a_k/a_{k+1} лежит в $R^{a_i}_b$. В таком случае $f(a_k/a_{k+1}) = f_3(a_k/a_{k+1})$, если $f_3(a_k/a_{k+1})$ лежит в $S^{b_j}_b$; если же $f_3(a_k/a_{k+1})$ лежит в цепи $T^x_{b_j}$, то положим $f(a_k/a_{k+1}) = f_2[f_3(a_k/a_{k+1})]$.

Ввиду транзитивности отношения подобия будет, очевидно,

$$a_k/a_{k+1} \sim f(a_k/a_{k+1}) \quad \text{для любого} \quad 0 \leqq k < n\,. \tag{18}$$

Доказательство, что f есть простое отображение множества простых квоциентов цепи R^a_b на множество простых квоциентов цепи S^a_b, не представляет трудностей.

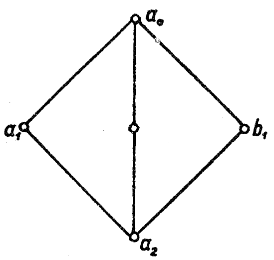
Итак, если положить $f(a_k/a_{k+1}) = b_{\varphi(k)}/b_{\varphi(k)+1}$, то φ будет перестановкой чисел $0, 1, \ldots, n-1$, а именно, согласно (18), такой, что имеет место (16). Этим доказано наше утверждение для случая (17а); случай (17б) является двойственным случаю (17а), так что нет необходимости его исследовать.

Замечание 1. Относительно теоремы Жордана-Гельдера с нижним простым подобием простых квоциентов в структурах с конечными цепями известно, что перестановка φ однозначно определяется цепями (14), (15) ([2], теорема 4,6). Если заменить требование нижнего простого подобия только подобием, то таких перестановок может быть уже больше, как показывает структура с диаграммой на фиг. 6. Здесь для цепей $a_0 > a_1 > a_2$, $a_0 > b_1 > a_2$ имеются две такие перестановки.

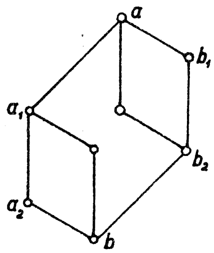
Замечание 2. Условие теоремы 3.1 не является пустым, как показывает структура с диаграммой на фиг. 7; в этой структуре справедлива теорема Жордана-Гельдера, и насыщенные цепи $a > a_1 > a_2 > b$, $a > b_1 > b_2 > b$ образуют циклическую подструктуру длины 3.

Введем теперь понятие *π-подобия простых квоциентов*. Пусть a/b, c/d — два подобных простых квоциента в структуре S. Тогда существует конечная последовательность $a/b = a_0/b_0$, $a_1/b_1, \ldots, a_r/b_r = c/d$ квоциентов в S так, что соседние квоциенты прямо подобны. Если квоциенты a_i/b_i ($i = 0, 1, \ldots, r-1$) можно выбрать так, чтобы a_i/b_i, a_i/a_{i+1} (соотв. a_{i+1}/a_i, если $a_i < a_{i+1}$), b_i/b_{i+1} (соотв. b_{i+1}/b_i, если $b_i < b_{i+1}$) были простыми квоциентами в S, то мы скажем, что a/b, c/d являются π-подобными.

Далее мы будем говорить, что в структуре S справедлива *теорема Жордана-Гельдера с π-подобием простых квоциентов*, если для любых двух насыщенных цепей R_b^a, S_b^a в S существует простое отображение простых квоциентов первой цепи на простые квоциенты второй цепи так, что соответствующие друг другу простые квоциенты являются π-подобными и промежуточные члены в этом π-подобии лежат в a/b.



Фиг. 6.



Фиг. 7.

Нетрудно обнаружить (из [2], теорема 4,4 и 3,2), что в теореме Жордана-Гельдера с нижним простым подобием простых квоциентов соответствующие друг другу простые квоциенты насыщенных цепей R_b^a, S_b^a π-подобны и промежуточные члены в этом подобии лежат в a/b. Это не имеет, однако, места в теореме Жордана-Гельдера с подобием простых квоциентов, как показывает диаграмма структуры на фиг. 7. Рассмотрим более подробно, в чем заключается это различие. Перед этим докажем, однако, одну вспомогательную теорему.

Лемма 3.2. *Пусть S — структура с конечными цепями. Пусть для любых двух насыщенных цепей R_b^a, S_b^a в S, образующих циклическую подструктуру длины $\geqq 3$, существует конечная последовательность насыщенных цепей $R_b^a = {}^0R_b^a, {}^1R_b^a, \ldots, {}^kR_b^a = S_b^a$ так, что никакие две соседние цепи не образуют циклическую подструктуру. Тогда любые две насыщенные цепи с одним и тем же наибольшим и наименьшим элементом имеют одинаковую длину.*

Доказательство по существу ничем не отличается от доказательства теоремы 2.3, так что его можно не приводить.

Теорема 3.3. *Пусть S — структура с конечными цепями. В S справедлива теорема Жордана-Гельдера с π-подобием простых квоциентов тогда и толь-*

ко тогда, если для любых двух насыщенных цепей R_b^a, S_b^a в S, образующих циклическую подструктуру длины $\geqq 3$, существует конечная последовательность насыщенных цепей $R_b^a = {}^0R_b^a$, ${}^1R_b^a$, … ${}^kR_b^a = S_b^a$ так, что никакие две соседние цепи не образуют циклическую подструктуру.

Доказательство. 1. Пусть в S справедлива теорема Жордана-Гельдера с π-подобием простых квоциентов и пусть в S даны две насыщенные цепи R_b^a, S_b^a, образующие циклическую подструктуру длины $\geqq 3$. Возьмем в R_b^a простой квоциент c/d. Он будет по предположению π-подобным некоторому простому квоциенту e/f из S_b^a. Пусть соответствующие промежуточные члены в этом π-подобии имеют вид $c/d = c_0/d_0$, $c_1/d_1, \ldots, c_k/d_k = e/f$, причем c_i/d_i лежит в a/b для $i = 0, 1, \ldots, k$. Пусть для любого $i = 0, 1, \ldots, k$ цепь ${}^iR_b^a$ будет насыщенной цепью между a, b, содержащей простой квоциент c_i/d_i и ${}^0R_b^a = R_b^a$, ${}^kR_b^a = S_b^a$. Тогда, как нетрудно убедиться, цепи ${}^jR_b^a$, ${}^{j+1}R_b^a$ $(j = 0, 1, \ldots, k - 1)$ не образуют циклической подструктуры.

2. Пусть условие теоремы выполнено. Тогда по лемме 3.2 любые две насыщенные цепи в S с одним и тем же наибольшим и наименьшим элементом имеют одинаковую длину. Остальную часть утверждения теоремы можно доказать по методу индукции в полной аналогии с доказательством теоремы 3.1.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Garrett Birkhoff*: Lattice Theory (цитировано по русскому переводу: Теория структур, Москва 1952).

[2] *Vladimír Kořínek*: Lattices in which the theorem of Jordan-Hölder is generally true. Bull. int. de l'Académie tchèque des Sciences *50* (1949), No 23, 1—18.

[3] *Oystein Ore*: Chains in partially ordered sets. Bull. Am. Math. Soc. *49* (1943), No 8, 558—566.

Summary

THE SELFDUAL KERNEL OF BIRKHOFF'S CONDITIONS IN LATTICES WITH FINITE CHAINS

VÁCLAV VILHELM, Praha.

Author investigates Birkhoff's conditions in lattices with finite chains and shows that for instance lower Birkhoff's condition is equivalent to two simple conditions, one of which is selfdual and is closely connected with the theorem of Jordan-Hölder with the similarity of corresponding quotients.

A lattice L_0 is called *cyclic* (see O. Ore [3]) if it is the sum (in sense of the theory of sets) of two chains R_b^a, S_b^a of L, which have only the elements a, b

common. A sublattice $\bar{L}$ of a lattice L is *saturated* (in L) if any saturated chain R_b^a in $\bar{L}$ is saturated in L too. (A chain R_b^a is called *saturated* (maximal) in L if for any chain U_b^a in L following implication holds: $R_b^a \subseteqq U_b^a \Rightarrow R_b^a = U_b^a$.)

Main results of the paper are formed by the following theorems.

Theorem 1. *Let L be a lattice with finite chains. L satisfies lower Birkhoff's condition if and only if it contains neither a saturated cyclic sublattice of the length $\geqq 3$ nor the saturated sublattice L_1 with the graph on fig. 1.*

Theorem 2. *Let L be a lattice with finite chains. In L the theorem of Jordan-Hölder with similarity of quotients holds if and only if this theorem is true for any two saturated chains which forms a cyclic sublattice of the length $\geqq 3$.*

(We say that in a lattice L the theorem of Jordan-Hölder with similarity of quotients holds if for any two saturated chains R_b^a, S_b^a in L a one-to-one mapping of the prime quotients of the first chain into the prime quotients of the second chain exists so that the corresponding prime quotients are similar to each other.)

The last part of the paper deals with the theorem of Jordan-Hölder in certain modified sense which permits replacing of the theorem 2 by a theorem more effective.