

Jaroslav Kurzweil

Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 3, 435–(438)

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100158>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1955

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ОБ ОБРАЩЕНИИ ВТОРОЙ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА
ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

ЯРОСЛАВ КУРЦВЕЙЛЬ (Jaroslav Kurzweil), Прага.

(Поступило в редакцию 12/VI 1955 г.)

В настоящей заметке дается краткое изложение работы, которая я
будет опубликована позднее.

Предположим, что G — открытое множество $0 \in G \subset E_n$, обозначим через F дополнение множества G и положим

$$\omega(x) = \max \left(\varrho(x, 0), \frac{1}{\varrho(x, F)} - \alpha \right),$$

где α — постоянное, $\alpha > \frac{2}{\varrho(0, F)}$, ($\omega(x) = \varrho(x, 0)$, если $G = E_n$).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

Мы предполагаем, что функции $f_i(x_1, \dots, x_n, t)$ определены и непрерывны для $(x_1, \dots, x_n) = x \in G$, $t \geq 0$.

Предположим, что существуют функции $V(x, t)$, $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ такие, что выполняются следующие условия:

(I) Функция $V(x, t) = V(x_1, \dots, x_n, t)$ определена и непрерывна для $x \in G$, $t \geq 0$, причем частные производные $\frac{\partial V}{\partial x_i}$, $\frac{\partial V}{\partial t}$ также непрерывны.

(II) Функции $U_1(x)$, $U_2(x)$, $U_3(x)$ непрерывны в G , $U_1(0) = U_2(0) = U_3(0) = 0$, $U_1(x) > 0$, $U_2(x) > 0$, $U_3(x) > 0$ если $x \neq 0$, $U_2(x) \rightarrow \infty$ для $\omega(x) \rightarrow \infty$.

(III) $U_2(x) \leq V(x, t) \leq U_1(x)$, $x \in G$, $t \geq 0$.

(IV) $\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -U_3(x)$, $x \in G$, $t \geq 0$.

Нетрудно доказать, что при этих условиях существуют функции $\varphi(t)$, $A(\eta)$, выполняющие следующие условия:

(V) Функция $\varphi(t)$ определена и непрерывна для $-\infty < t < +\infty$, убывает и

$$\begin{aligned}\varphi(t) &\rightarrow 0 && \text{если } t \rightarrow \infty, \\ \varphi(t) &\rightarrow \infty && \text{если } t \rightarrow -\infty.\end{aligned}$$

(VI) Функция $\Lambda(\eta)$ определена и непрерывна для $\eta > 0$, убывает и

$$\begin{aligned}\Lambda(\eta) &\rightarrow \infty && \text{если } \eta \rightarrow 0, \\ \Lambda(\eta) &\rightarrow -\infty && \text{если } \eta \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

(VII) Если $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ является решением системы (1), определенным для $0 \leq t_0 \leq t \leq t_1 \leq \infty$, то существует решение $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ системы (1), определенное для $t \geq t_0$ и удовлетворяющее условиям

$$\begin{aligned}x(t) &= y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1, \\ \omega(x(t)) &\leq \varphi(t - t_0 - \Lambda(\omega(y(0)))).\end{aligned}$$

Это есть очевидное обобщение второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения. Главным результатом настоящей работы является следующая теорема:

Теорема. Пусть существуют функции $\varphi(t)$, $\Lambda(\eta)$, удовлетворяющие условиям (V), (VI), (VII). Тогда существует функция $V(x, t)$, удовлетворяющая условиям (I), (II), (III), (IV). Функция $V(x, t)$ обладает непрерывными производными любого порядка относительно переменных x_1, \dots, x_n, t .

Для доказательства этой теоремы можно ограничиться предположением о непрерывности функций $f_i(x_1, \dots, x_n, t)$ и нет необходимости предполагать, что интеграл системы (1) однозначно определяется начальными значениями. Эта теорема является обобщением результатов, полученных Малкиным, Барбашиним и Красовским, Зубовым.

Summary

ON THE REVERSIBILITY OF THE SECOND THEOREM OF LYAPUNOV CONCERNING THE STABILITY OF MOTION

JAROSLAV KURZWEIL, Praha.

(Received June 12, 1955.)

This is a brief account of a paper to be published later.

Let us suppose that G is an open set $0 \in G \subset E_n$, let us denote by F the complement of the set G and let us put

$$\omega(x) = \max \left(\varrho(x, 0), \frac{1}{\varrho(x, F)} - \alpha \right),$$

where α is a constant,

$$\alpha > \frac{2}{\varrho(0, F)},$$

$$(\omega(x) = \varrho(x, 0) \text{ if } G = E_n).$$

Let us consider the system of differential equations

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n, t) \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

We suppose that the function $f_i(x_1, \dots, x_n, t)$ are defined and continuous for $(x_1, \dots, x_n) = x \in G, t \geq 0$.

Let us suppose that there are functions $V(x, t), U_1(x), U_2(x), U_3(x)$ such that the following conditions are fulfilled:

(I) The function $V(x, t) = V(x_1, \dots, x_n, t)$ is defined and continuous for $x \in G, t \geq 0$, the partial derivatives $\frac{\partial V}{\partial x_i}, \frac{\partial V}{\partial t}$ being continuous.

(II) The functions $U_1(x), U_2(x), U_3(x)$ are continuous in G , $U_1(0) = U_2(0) = U_3(0) = 0$, $U_1(x) > 0$, $U_2(x) > 0$, $U_3(x) > 0$ if $x \neq 0$, $U_2(x) \rightarrow \infty$ for $\omega(x) \rightarrow \infty$.

(III) $U_2(x) \leq V(x, t) \leq U_1(x), x \in G, t \geq 0$.

$$(IV) \frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i + \frac{\partial V}{\partial t} \leq -U_3(x), x \in G, t \geq 0.$$

It is easy to prove that under these conditions there exist functions $\varphi(t)$, $A(\eta)$ fulfilling the following conditions:

(V) The function $\varphi(t)$ is defined and continuous for $-\infty < t < \infty$, decreasing and

$$\varphi(t) \rightarrow 0 \quad \text{if } t \rightarrow \infty,$$

$$\varphi(t) \rightarrow \infty \quad \text{if } t \rightarrow -\infty.$$

(VI) The function $A(\eta)$ is defined and continuous for $\eta > 0$, decreasing and

$$A(\eta) \rightarrow \infty \quad \text{if } \eta \rightarrow 0,$$

$$A(\eta) \rightarrow -\infty \quad \text{if } \eta \rightarrow \infty.$$

(VII) If $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))$ is a solution of the system (1) defined for $0 \leq t_0 \leq t \leq t_2 \leq \infty$, then there is a solution $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ of the system (1) defined for $t \geq t_0$ and satisfying the conditions

$$x(t) = y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

$$\omega(x(t)) \leq \varphi(t - t_0 - A(\omega(y(0)))).$$

This is an obvious generalisation of the Lyapunov's second theorem on the stability of motion. The main result of the present paper is the following theorem:

Theorem. Let us suppose that are functions $\varphi(t), A(\eta)$, which fulfil the conditions (V), (VI), (VII). Then there exists a function $V(x, t)$ fulfilling the conditions (I), (II), (III), (IV). The function $V(x, t)$ has continuous derivatives of all orders with respect to the variables x_1, \dots, x_n, t .

In order to prove this theorem we may suppose only that the functions $f_i(x_2, \dots, x_n, t)$ are continuous and we need not suppose that the integral of the system (1) is uniquely defined by the initial values. This theorem is a generalisation of results due to MALKIN, BARBAŠIN and KRAZOVSKIJ, ZUBOV.

Redakce: Matematický ústav Československé akademie věd Praha II, Žitná 25, tel. 241193. —
Administrace: Nakladatelství Československé akademie věd, Praha II, Vodičkova 40, telefon
2462-41. — Vychází čtvrtletně. — Roční předplatné Kčs 48,—, cena jednotlivého sešitu
Kčs 12,—. Účet Státní banky československé č. 38-161-0087, číslo směrovací 0152-1. Novinové
výplatné povoleno Okrskovým poštovním úřadem Praha 022: j. zn. 309-38-Re-52. — Dohlédací
poštovní úřad Praha 022. — Tisknou a expedují Pražské tiskárny n. p., provozovna 05
(Prometheus), Praha VIII, Tř. Rudé armády 171. — Vyšlo 30. IX. 1955. D - 00583