Czechoslovak Mathematical Journal

Otomar Hájek

Функциональные уравнения тригонометрических функций

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 3, 432–434

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100157

Чехословацкий математический журнал, т. 5 (80) 1955

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

ОТОМАР ХАЕК (Otomar Hájek), Прага.
(Поступило в редакцию 12/I 1955 г.)

Короткое содержание статьи *Funkcionální rovnice trigonometrických funkcí*, опубликованной в журнале Časopis pro pěstování matematiky, *80*, 1955.

Рассматриваются только функции голоморфные в окрестности начала. Решение уравнения

$$F(x + y) = aG(x)\,H(y) \tag{1}$$

тривиально: если $aG(0)\,H(0) \neq 0$, то $G(x) = \text{konst.}\,F(x), H(x) = \text{konst.}\,F(x)$, $F(x + y) = kF(x)\,F(y)$, итак $G(x) = \alpha e^{\beta x}$, $H(x) = \gamma e^{\beta x}$, $F(x) = a\alpha\gamma e^{\beta x}$; если $aG(0)\,H(0) = 0$, то $F = 0$ и — в случае $a \neq 0$ — одна из функций G, H равна нулю.

I.

Если

$$F(x + y) = aF(x)\,G(y) + bF(y)\,G(x)\,, \tag{2}$$

то функции

$$f(x) = e^{cx}F(x)\,,\quad g(x) = e^{cx}G(x)\,, \tag{3}$$

также удовлетворяют уравнению (2).

В случае $a \neq b$ из симметрии уравнения (2) следует $F(x)\,G(y) = F(y)\,G(x)$, и (2) сводится к виду (1). Итак, достаточно рассматривать случай $a = b \neq 0$, который (пишем aG вместо G) сводится к виду

$$F(x + y) = F(x)\,G(y) + F(y)\,G(x)\,. \tag{4}$$

Если $F(0) \neq 0$, то $G(x) = \text{konst.}\,F(x)$, и мы опять имеем вид (1). Итак, пусть $F(0) = 0$. Имеем $F(x) = \sum a_n x^n$, $G(x) = \sum b_m x^m$, откуда $\binom{n+m}{n} a_{n+m} = a_n b_m + a_m b_n$. Полагая $m = n$, $2n$, $3n$, ..., видим, что из $a_n = 0$ следует $a_{2n} = a_{3n} = \ldots = 0$. Исключая тривиальный случай $F = 0$, видим, что

$a_1 \neq 0$. Пользуясь подстановкой (2), можем предполагать, что $F''(0) = 0$, значит, $a_{2n} = 0$. Из (4) следует постепенно:

$$G(0) = 1, \; G(x) = \left(\frac{F(x+y) - F(x)}{y} - F(x)\,\frac{G(y) - 1}{y}\right) : \frac{F(y)}{y},$$

$$G(x) = a_1^{-1}(F'(x) - F(x)\,.\,G'(0))\,, \quad G'(0) = a_1^{-1}(F''(0) - F'(0)\,G'(0)) = \\ = -G'(0), G'(0) = 0, G(x) = a_1^{-1}F'(x)\,,$$

$$F(x+y) = a_1^{-1}(F(x)\,F'(y) + F(y)\,F'(x))\,.$$

Отсюда сравнением сомножителей мы легко получаем окончательный результат: Уравнение (2) имеет, кроме тривиального решения $F = 0$, $G =$ произвольная функция, только следующие решения: В случае $a + b \neq 0$: $F(x) = \alpha e^{\beta x}$, $G(x) = \dfrac{1}{a+b}\,e^{\beta x}$, и в случае $a = b \neq 0$ существуют еще решения $F(x) = \alpha e^{\beta x} \sin \gamma x$, $G(x) = \dfrac{1}{a}\,e^{\beta x} \cos \gamma x$ и $F(x) = \alpha x e^{\beta x}$, $G(x) = \dfrac{1}{a}\,e^{\beta x}$.

II.

Если $ab = 0$, то уравнение

$$F(x+y) = aF(x)\,F(y) + bG(x)\,G(y) \tag{5}$$

сводится к виду (1). Итак, пусть $ab \neq 0$. Умножив F, G на подходящие числа, можем ограничиться уравнением

$$F(x+y) = F(x)\,F(y) - G(x)\,G(y)\,. \tag{6}$$

Тривиальные решения: I. $F = \text{konst}$. II. $G = 0$ (вид (1)); III. $F(0) \neq 1$ (в самом деле,

$$F(x)\,(F(0) - 1) = G(x)\,G(0)\,; \tag{7}$$

если $G(0) \neq 0$, то получаем вид (1), если $G(0) = 0$, то $F = 0$). Исключая эти случаи, имеем $F(0) = 1$, $G(0) = 0$ (см. (7)) и можем (см. (4)) предполагать, что $F'(0) = 0$. Имеем

$$\frac{F(x+y) - F(x)}{y} = F(x)\;\frac{F(y) - 1}{y} - G(x)\,\frac{G(y)}{y}, \quad F'(x) = -G(x)\,G'(0)\,;$$

следовательно $G'(0) \neq 0$; $F'(x) = \dfrac{1}{s}\,G(x)\,, \quad s = -(G'(0))^{-1}\,.$

Дифференцируя (6), получаем

$$G(x+y) = G(x)\,F(y) - sG'(x)\,G(y)\,, \tag{8}$$

и из симметрии следует

$$G(x)\,(F(y) + sG'(y)) = G(y)\,(F(x) + sG'(x))\,.$$

Если $F + sG' = 0$, то (8) имеет вид (2). В противном случае $G(x) = \text{konst.}\,(F(x) + sG'(x))$, $sF'(x) = \text{konst}\,.\,(F(x) + s^2F''(x))$. Интегрируя это уравнение, получим окончательный результат:

Все решения уравнения (5), кроме тривиального решения $F = G = 0$, имеют следующий вид:

В случае $ab \neq 0 : F(x) = \frac{1}{a(\beta - \alpha)} (\beta e^{(\alpha+\gamma)x} - \alpha e^{(\beta+\gamma)x})$,

$$G(x) = i \sqrt{\frac{\alpha\beta}{ab}} \frac{1}{\beta - a} (e^{(\alpha+\gamma)x} - e^{(\beta+\gamma)x}) , \quad (\alpha \neq \beta) ;$$

$$F(x) = \frac{1}{a} (1 - \alpha x)\, e^{\beta x}, G(x) = \frac{i\alpha}{\sqrt{ab}} x e^{\beta x}; F(x) = \text{konst.}, G = \sqrt{\frac{F}{b} (1 - aF)} .$$

В случае $a = 0 \neq b : F(x) = b\alpha^2 e^{\beta x}$, $G(x) = \alpha e^{\beta x}$.

В случае $a \neq 0 = b : F(x) = \frac{1}{a} e^{\beta x}$, G — произвольно.

В случае $a = 0 = b$: $F = 0$, G — произвольно.

Résumé

SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

OTOMAR HÁJEK, Praha.

(Reçu le 12 janvier 1955.)

L'auteur cherche les solutions, holomorphes au voisinage de l'origine, des équations (2), (5). Toutes les solutions de (2) sont données par les formules suivantes: 1) $F = 0$, G arbitraire. 2) Pour $a + b \neq 0 : F(x) = \alpha\, e^{\beta x}$, $G(x) = \frac{1}{a + b} e^{\beta x}$. 3) Pour $a = b \neq 0$ on a, en outre, les solutions suivantes:

$$F(x) = \alpha\, e^{\beta x} \sin \gamma x, \quad G(x) = \frac{1}{a} e^{\beta x} \cos \gamma x \quad \text{et} \quad F(x) = \alpha x\, e^{\beta x}, \quad G(x) = \frac{1}{a} e^{\beta x}.$$

Les solutions de (5) (outre la solution banale $F = 0 = G$) sont données á la fin du texte russe (в случае = dans le cas). Une exposition plus détaillée a paru en tchéque dans Časopis pro pěstování matematiky, *80*, 1955, fasc. 4, sous le titre *Funkcionálni rovnice trigonometrických funkcí*.