Czechoslovak Mathematical Journal

Štefan Schwarz

О топологических полугруппах с односторонними единицами

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 2, 153–163

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100138`

ЧЕХОСЛОВАЦКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
Математический институт Чехословацкой Академии наук
Т. 5 (80) ПРАГА 30. VI. 1955 г. • No 2

О ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛУГРУППАХ С ОДНОСТОРОННИМИ ЕДИНИЦАМИ

ШТЕФАН ШВАРЦ (Štefan Schwarz), Братислава.

(Поступило в редакцию 23/VIII 1954 г.)

Пусть в полугруппе S существует единственный максимальный левый (двусторонний) идеал L^* (соотв. M^*). Целью настоящей статьи является, в основном, изучение структуры множеств $S — L^*$, $S — M^*$ за предположения, что S хаусдорфова бикомпактная полугруппа.

Полугруппой называется непустое множество элементов S, между которыми определено ассоциативное умножение. Если S является одновременно топологическим пространством и операция умножения непрерывна в S, то S называется топологической полугруппой. Под топологическим пространством мы будем в настоящей работе разуметь хаусдорфово бикомпактное пространство.

Целью работы является доказательство нескольких теорем о максимальных идеалах в таких полугруппах (см. в особенности теоремы 4 и 5). Работа представляет в некотором смысле дополнение работ автора [1], [2], хотя от них и не зависит. Предположения топологического характера существенны для возможности получения приведенных ниже результатов.

В заключение мы даем на примере отрицательный ответ на одну проблему, поставленную А. Д. Уоллесом [6].

I.

Лемма 1. *Пусть A — левый идеал топологической полугруппы S. Тогда и $\overline{A}$ будет левым идеалом полугруппы S.*

Доказательство. Если A — произвольное подмножество из S и $a \in S$, то, ввиду непрерывности умножения, будет $a \,.\, \overline{A} \subseteqq \overline{aA}$. В частности, если

A — левый идеал и $a \in S$ — произвольный элемент $\in S$, то $a\bar{A} \subseteq \overline{aA} \subset \bar{A}$, т. е. $\bar{A}$ является левым идеалом из S.

Аналогичное утверждение справедливо относительно правых и двусторонних идеалов.

Максимальным левым идеалом полугруппы S называем такой левый идеал $L \neq S$, для которого не существует левый идеал $L_1 \neq L$, $L_1 \neq S$, выполняющий условие $L \subset L_1 \subset S$. Аналогично определим максимальный правый и двусторонний идеал.

Вообще существует несколько (и бесконечное количество) максимальных левых (правых, двусторонних) идеалов. Важен случай, когда существует только *один* максимальный левый (правый, двусторонний) идеал, содержащий все другие идеалы того же рода.

Введем определение:

Определение. *Мы говорим, что в полугруппе S имеется максимальный левый идеал L^*, если существует такой левый идеал $L^* \neq S$, что в L^* содержится каждый левый идеал $L \neq S$.*[1])

Аналогично определим максимальный правый идеал R^* и максимальный двусторонний идеал M^*.

Если существует, например, L^*, то невозможно покрыть S левыми собственными идеалами из S.

Полугруппу S называем *слева простой*, если она не содержит левого идеала $\neq S$. Иначе говоря, это полугруппа, в которой уравнение $xa = b$ имеет решение $x \in S$ для каждой пары $a, b \in S$. Если такая полугруппа содержит более одного элемента, то она не может содержать нулевого элемента и для каждого $a \in S$ имеет место $Sa = S$.

Аналогично определяется *справа простая* полугруппа. Полугруппа, простая слева и справа, является группой.

Следующие леммы дают примеры полугрупп, в которых существуют максимальные идеалы L^*, R^* и соотв. M^*.

---

[1]) Из требования существования единственного максимального идеала L еще не следует, что каждый левый идеал из S содержится в L. Действительно, может случиться, что существует такой левый идеал l из S, который нельзя погрузить ни в какой максимальный левый идеал. (Простой пример такой полугруппы приведен в работе [5], стр. 26.) В такой полугруппе будет, конечно, $L + l = S$.

Примечание при корректуре (13/V 1955 г.). Можно показать (см. Р. И. Кох-А. Д. Уодлес, Duke Journal 21, December 1954, 681—685), что в *бикомпактной* полугруппе каждый идеал $\neq S$ содержится в некотором максимальном идеале из S. Поэтому для *бикомпактных* полугрупп требование существования идеала L^* эквивалентно требованию существования единственного максимального левого идеала.

Лемма 2. *Пусть S содержит хоть один левый идеал $\neq S$. Пусть S содержит правую единицу e_r. Тогда существует L^*.*

Лемма 3. *Пусть S содержит хоть один двусторонний идеал $\neq S$. Пусть S содержит правую единицу e_r. Тогда существует M^* и L^*, и $M^* \subseteqq L^*$.*

Аналогичный вид имеют двойственные утверждения. В частности имеем:

Лемму 4. *Пусть S содержит хоть один двусторонний идеал $\neq S$. Пусть S содержит двустороннюю единицу. Тогда существуют идеалы M^*, L^*, R^*, и $M^* \subseteqq L^* \cap R^*$.*

Доказательства лемм 2, 3, 4 легко получить, используя лемму Цорна. Подробный ход доказательства см. в работе [2], стр. 379—380.

Позже увидим, что и наоборот, существование L^* „почти" эквивалентно существованию хоть одной правой единицы в S (см. ниже теорему 6).

Теорема 1. *Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Пусть в S существует L^*. Тогда существует и M^*, и $L^* = M^*$.*

Замечание. Для случая периодических полугрупп (специально, конечных полугрупп) эта теорема была доказана в работе [1].

Доказательство. Достаточно доказать, что L^* является и правым идеалом из S. Пусть t — произвольный элемент $\in S$. Тогда L^*t есть левый идеал из S. Следовательно, будет или $L^*t \subseteqq L^*$ или $L^*t = S$. Наша теорема будет доказана, если покажем, что вторая альтернатива невозможна.

a) Пусть $t \in S$ и пусть $L^*t = S$. Тогда тем более будет $St = S$. Следовательно, $S = St = St^2 = \ldots$, и для любого натурального $n \geqq 1$ будет $St^n = S$.

Известно, (см. [3], лемма 3), что полугруппа $T = \overline{\{t, t^2, t^3, \ldots\}}$ содержит один и только один идемпотент $e \in T$. Мы утверждаем, что для этого идемпотента e имеет место $Se = S$.

Доказательство проведем от противного. Если бы было $Se \neq S$, то существовал бы элемент $u \in S$ такой, что для любого $x_\lambda \in S$ было бы $x_\lambda e \neq u$. Следовательно, для каждого x_λ существуют окрестности $U(x_\lambda e)$ и $U_\lambda(u)$ такие, что $U(x_\lambda e) \cap U_\lambda(u) = \emptyset$. Ввиду непрерывности умножения, можно далее для каждого $x_\lambda \in S$ найти окрестности $V(x_\lambda)$, $V_\lambda(e)$ такие, что $V(x_\lambda) \,.\, V_\lambda(e) \subseteqq U(x_\lambda e)$. Итак, для каждого $x_\lambda \in S$ существуют окрестности $V(x_\lambda)$ и $V_\lambda(e)$ такие, что

$$u \operatorname{non} \in V(x_{\lambda_i}) \,.\, V_\lambda(e) \,. \tag{1}$$

Рассмотрим сумму $\sum_{x_\lambda \in S} V(x_\lambda)$. Она покрывает всю бикомпактную полугруппу S. Следовательно, существует такое конечное покрытие, что

$$S = V(x_{\lambda_1}) + V(x_{\lambda_2}) + \ldots + V(x_{\lambda_n}) \,.$$

Для каждой окрестности $V(x_{\lambda_i})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ подберем окрестность $V_{\lambda_i}(e)$ такую, чтобы было выполнено (1). Подберем далее такую окрестность $V(e)$ элемента e, чтобы было

$$V(e) \subseteqq V_{\lambda_1}(e) \cap V_{\lambda_2}(e) \cap \cdots \cap V_{\lambda_n}(e) .$$

Тогда для $i = 1, 2, \ldots, n$ имеет место

$$u \text{ non} \in V(x_{\lambda_i}) \,.\, V(e) ,$$

то есть

$$u \text{ non} \in S \,.\, V(e) .$$

Так как $e \in \overline{\{t, t^2, t^3, \ldots\}}$, то в окрестности $V(e)$ элемента e существует хоть один элемент $t^m \in V(e)$. Значит, было бы u non $\in St^m$, что противоречит соотношению $S = St^m$. Этим доказано равенство $Se = S$.

б) Из соотношения $Se = S$ вытекает, что e служит правой единицей для любого элемента $a \in S$.[2]) В частности будет также $L^*e = L^*$.

в) Чтобы теперь доказать, что не может быть $L^*t = S$, будем рассуждать таким образом: если бы для какого-либо t имело место $L^*t = S$, то было бы и $L^*te = Se = S$. Из леммы 6, работы [3], следует, что замкнутая полугруппа $T = \overline{\{t, t^2, t^3, \ldots\}}$ содержит единственную максимальную подгруппу G_e, для которой имеет место $G_e = T \,.\, e$. Следовательно, элемент $g = t \,.\, e$ является элементом из G_e. Обозначим символом g_1 тот элемент $\in G_e$, для которого $g \,.\, g_1 = e$. Тогда получим последовательно

$$\begin{aligned} L^*g &= S , \\ L^*gg_1 &= Sg_1 , \\ L^*e &= Sg_1 , \\ L^* &= Sg_1 . \end{aligned}$$

Левый идеал Sg_1 содержит также элемент $gg_1 = e$. Поэтому он содержит и $S \,.\, e$, т. е. S. Отсюда $L^* = S$, что противоречит предположению $L^* \neq S$ и доказательство теоремы 1 закончено.

Аналогично доказывается

Теорема 2. *Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Пусть существует R^*. Тогда существует и M^*, и $R^* = M^*$.*

Теорема 3. *Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Пусть в S существуют R^* и L^*. Тогда существует и M^*, и $R^* = L^* = M^*$.*

Замечание. Заметим, что если, обратно, в полугруппе существует M^* то не должны еще существовать ни L^*, ни R^*.

---

[2]) Действительно, каждый элемент $a \in S$ можно записать в виде $a = ue$, где $u \in S$. Поэтому будет

$$a \,.\, e = (ue)\, e = ue^2 = ue = a .$$

II.

Пусть в полугруппе S существует L^*. Что можно сказать о множестве $Q = S - L^*$?

Пусть $a \in S - L^*$. Левый идеал (a, Sa) покрывает a, следовательно он равен S; то есть

$$L^* \subset (a, Sa) = S .$$

Далее, очевидно,[3]) будет

$$L^* \subseteqq Sa \subseteqq (a, Sa) = S .$$

А. Пусть $S - L^*$ содержит *более одного элемента*. Тогда еще неможет быть $L^* = Sa$. Но так как Sa есть левый идеал, то обязательно $Sa = S$.

Б. Пусть S связно. Тогда мы покажем, что это соотношение имеет место и в случае, когда $S - L^*$ содержит всего один элемент. Имеем $S = (a, Sa)$. Идеал Sa замкнут (будучи непрерывным образом S). Если бы было a non $\in Sa$, то S было бы суммой двух дизъюнктных замкнутых множеств и, следовательно, не было бы связным. Поэтому $a \in Sa$, т. е. $S = Sa$.

Пусть в дальнейшем настанет любой из случаев **А** или **Б**.

Если $a \in Q$, то $Sa = S$; если $a \in L^*$, то $Sa \subseteqq SL^* \subseteqq L^*$. Следовательно, Q есть множество тех и только тех элементов $a \in S$, для которых $Sa = S$.

Если $a \in Q$, $b \in Q$, т. е. $Sa = S$, $Sb = S$, то $Sab = Sb = S$, т. е. $ab \in Q$. Следовательно, *Q есть полугруппа.*

По теореме 1 L^* есть двусторонний идеал из S. Для любого $a \in Q$ будет

$$Sa = S ,$$
$$(Q + L^*)\, a = Q + L^* ,$$
$$Qa + L^*a = Q + L^* .$$

Так как $L^*a \subseteqq L^*$, то будет $Q \subseteqq Qa$, т. е. $Q \subseteqq Q^2$. Так как Q — полугруппа, то будет $Q^2 \subseteqq Q$. Значит, $Q \subseteqq Qa \subseteqq Q^2 \subseteqq Q$, т. е. $Q = Qa$. Полугруппа Q такова, что в ней уравнение $xa = b$ имеет решение для любой пары $a, b \in Q$, т. е $Q = S - L^*$ является слева простой полугруппой.

Лемма 5. *Пусть $P \subseteqq S$ — некоторая слева простая полугруппа. Тогда и $\overline{P}$ будет слева простой полугруппой.*

Доказательство. Прежде всего $\overline{P}$ есть полугруппа (подробности см. напр. в [3], лемма 1). Для доказательства нашей леммы достаточно показать, что уравнение $x\alpha = \beta$ имеет решение $x \in \overline{P}$ для каждой пары $\alpha, \beta \in \overline{P}$.

В противном случае существовала бы хоть одна пара α, β такая, что для любого $x_\lambda \in \overline{P}$ было бы $x_\lambda \alpha \neq \beta$. Следовательно, для любого $x_\lambda \in S$ существуют окрестности $U(x_\lambda)$, $U_\lambda(\alpha)$, $U_\lambda(\beta)$ такие, что

$$U(x_\lambda) \,.\, U_\lambda(\alpha) \cap U_\lambda(\beta) = \emptyset .$$

[3]) Это следует из чисто теоретико-множественных рассуждений, так как $L^* \subseteqq S - a \subseteqq (a, Sa) - a = Sa$.

Рассмотрим сумму $\sum_{x_\lambda \in \overline{P}} U(x_\lambda)$. Эта сумма открытых множеств покрывает замкнутое (а значит и бикомпактное) подмножество $\overline{P}$ из S. Возьмем такое конечное покрытие, чтобы

$$\overline{P} \subseteqq U(x_{\lambda_1}) + U(x_{\lambda_2}) + \ldots + U(x_{\lambda_n}) = P_1 .$$

Для каждого λ_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) найдем окрестности $U_{\lambda_i}(\alpha)$, $U_{\lambda_i}(\beta)$ так, чтобы было

$$U(x_{\lambda_i}) \, . \, U_{\lambda_i}(\alpha) \cap U_{\lambda_i}(\beta) = \emptyset .$$

Возьмем далее такие окрестности $U(\alpha)$, $U(\beta)$ элементов α, β, чтобы имело место

$$U(\alpha) \subseteqq U_{\lambda_1}(\alpha) \cap \ldots \cap U_{\lambda_n}(\alpha) ,$$
$$U(\beta) \subseteqq U_{\lambda_1}(\beta) \cap \ldots \cap U_{\lambda_n}(\beta) .$$

Тогда для $i = 1, 2, \ldots, n$ будет

$$U(x_{\lambda_i}) \, . \, U(\alpha) \cap U(\beta) = \emptyset ,$$

т. е.

$$P_1 \, . \, U(\alpha) \cap U(\beta) = \emptyset .$$

Так как $\alpha \in \overline{P}$, $\beta \in \overline{P}$, то существуют элементы $a \in P$, $b \in P$, для которых имеет место $a \in U(\alpha)$, $b \in U(\beta)$. Далее имеем $P \subseteqq P_1$. Тогда было бы тем более $P \, . \, a \cap \{b\} = \emptyset$. Последнее уравнение противоречит тому обстоятельству, что для любого $a \in P$ $Pa = P$. Этим лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Пусть L^* существует. Пусть а) или $S - L^*$ содержит более одного элемента или б) пусть S связно. Тогда $S - L^*$ есть слева простая замкнутая полугруппа.*

Доказательство. Положим $S = L^* + Q$, $L^* \cap Q = \emptyset$. По доказанному выше мы знаем, что $Q = S - L^*$ является слева простой полугруппой. Если бы Q не было замкнутым, то было бы $\overline{Q} \supset Q$, $\overline{Q} \neq Q$ и можно было бы написать $\overline{Q} = Q + Q_1$, $Q_1 \neq \emptyset$, где $Q_1 \subseteqq L^*$. Покажем, что это невозможно. Пусть $q \in Q_1$. Так как $\overline{Q}$ — слева простая полугруппа, то было бы обязательно

$$\overline{Q}q = \overline{Q} ,$$
$$(Q + Q_1) \, q = Q + Q_1 .$$

С другой стороны, конечно,

$$(Q + Q_1) \, q \subseteqq (Q + Q_1) \, L^* \subseteqq L^* .$$

Итак, было бы $Q + Q_1 \subseteqq L^*$, $Q \subseteqq L^*$, что противоречит соотношению $Q \cap L^* = \emptyset$.

Замечание 1. Если, следовательно, в S существует какое-либо из множеств L^*, R^*, M^* (и $S - L^*$, соотв. $S - R^*$, соотв. $S - M^*$ выполняет условие A или S связно), то L^*, соотв. R^*, соотв. M^* является всегда открытым идеалом.

Замечание 2. Пусть выполнены условия теоремы 4, причем S — связно. Тогда L^* не может быть левым главным идеалом. Если бы L^* был главным идеалом, то существовал бы элемент $b \in S$ такой, что $L^* = (b, Sb)$. Множество Sb, соотв. (b, Sb), замкнуто. Если $b \in Sb$, то $S = Sb + Q$. Если же b non $\in Sb$, то $S = b + Sb + Q$. Итак, S является суммой двух или трех замкнутых дизъюнктных множеств, следовательно, S несвязно.

По теореме 4 Q есть замкнутая частичная полугруппа из S. Следовательно, Q есть бикомпактная полугруппа в относительной топологии. Поэтому (см. теорему 1 работы [3]) Q содержит хоть один идемпотент. Известно,[4]) что слева простая полугруппа, имеющая хоть один идемпотент, является теоретико-множественной суммой дизъюнктных алгебраически[5]) изоморфных групп $Q = \sum\limits_{\alpha} G_\alpha$.

Докажем, что группы G_α изоморфны и как топологические группы. Если e_α — идемпотент из G_α, то известно,[4]) что $G_\alpha = e_\alpha Q$,[6]) следовательно, $Q = \sum\limits_{\alpha} e_\alpha Q$.

Притом отображение

$$x \in G_\alpha \to e_\beta x \in G_\beta \tag{2}$$

является изоморфным отображением (алгебраической)[5]) группы G_α на группу G_β, и

$$y \in G_\beta \to e_\alpha y \in G_\alpha \tag{3}$$

является обратным отображением группы G_β на группу G_α.

По предположению умножение в S непрерывно. Следовательно, отображение (2) является непрерывным отображением топологического пространства G_α на топологическое пространство G_β, и обратное отображение (3) — непрерывным отображением G_β на G_α. Поэтому топологические пространства G_α, G_β гомеоморфны и группы G_α и G_β изоморфны и как топологические группы.

Покажем далее, что каждая из групп G_α является максимальной группой полугруппы S. (Понятием ,,максимальной" группы в S мы пользуемся

---

[4]) Доказательства следующих утверждений по существу тождественны с доказательствами теорем 3,2—3,7 работы [4], поэтому мы их пропускаем.

[5]) Мы пишем именно ,,алгебраически", так как в работе [4] не исследовались топологические полугруппы. Точно так же и во всех остальных цитированных там работах исследовались только абстрактные полугруппы.

[6]) Из этого выражения ясно (ввиду непрерывности умножения), что каждая из групп G_α замкнута в Q. Сейчас мы покажем, что каждая G_α замкнута и в S.

в смысле определения 4 работы [3].) Доказательство проведем от противного. Пусть существует группа G в S такая, что $G \supset G_\alpha$, $G \neq G_\alpha$, Тогда было бы или $G \cap L^* \neq \emptyset$ или $G \cap G_\beta \neq \emptyset$ для некоторого $\alpha \neq \beta$. Первая возможность исключается, так как если какой-либо элемент группы G попадает в идеал L^*, то и вся группа G попадает в L^*. В чатсности было бы $G_\alpha \subseteqq L^*$, что противоречит предположению. Пусть, во-вторых, $\Delta = G \cap G_\beta \neq \emptyset$ и пусть $d \in \Delta$. Тогда тем более будет $\overline{G} \cap \overline{G}_\beta \neq \emptyset$. Множества $\overline{G}$ и $\overline{G}_\beta$ суть группы (см. напр. [3], теорема 6). Множество $\overline{\{d, d^2, d^3, \ldots\}}$, содержащее единственный идемпотент e, попадает как в группу $\overline{G}$, так и в группу $\overline{G}_\beta$. Если единичными элементами групп G_α, G_β являются e_α, e_β, то обязательно будет $e = e_\alpha$, $e = e_\beta$, т. е. $e_\alpha = e_\beta$, что противоречит предположению.

Из теоремы 6 работы [3] известно, что каждая максимальная группа полугруппы S замкнута в S. Следовательно, справедлива

Теорема 5. *При условиях теоремы 4 замкнутая полугруппа $S - L^*$ является теоретико-множественной суммой замкнутых изоморфных топологических групп, так что можно писать*:

$$S = L^* + \sum_\alpha G_\alpha\,, \quad L^* \cap G_\alpha = \emptyset\,, \quad G_\alpha \cap G_\beta = \emptyset\,, \quad G_\alpha \cong G_\beta\,.$$

III.

Пусть в полугруппе S существует L^*. Пусть $S - L^*$ или содержит более одного элемента, или пусть S связно. Запишем $S = L^* + Q$. Пусть e — произвольный идемпотент $\in Q$. Так как для каждого $a \in Q$ $Sa = S$, то будет и $Se = S$. Отсюда следует, что каждый идемпотент $e \in Q$ является правой единицей $\in S$. Итак, единичные элементы групп G_α из теоремы 5 представляют собой совокупность всех правых единиц из S.

На основании этого можно лемму 2 обратить следующим образом:

Теорема 6. *Пусть в хаусдорфовой бикомпактной полугруппе S существует L^* и пусть $S - L^*$ имеет более одного элемента. Тогда в S существует хоть одна правая единица.*

Для связных полугрупп справедлива более сильная

Теорема 7. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы в связной хаусдорфовой бикомпактной полугруппе S существовал максимальный идеал L^*, следующее:*

а) *S содержит хоть одну правую единицу.*

б) *S не является слева простой полугруппой.*

Замечание. Из теоремы 1 следует: если выполнены условия а) и б), то существует и M^*. Условия а) и б) являются, однако, только достаточными условиями существования M^*.

Теорема 8. *Пусть S — хаусдорфова бикомпактная полугруппа. Пусть существует L^* и R^*. Пусть $S - L^*$ и $S - R^*$ содержат более одного элемента. Тогда*

а) *в S существует единичный элемент,*

б) $L^* = R^* = M^*$,

в) $S = L^* + G$, $L^* \cap G = \emptyset$, *где G — замкнутая группа с единичным элементом e.*

Доказательство. а) Ввиду теоремы 6 и двойственной ей теоремы, S содержит хотя бы одну левую и хотя бы одну правую единицу. Следовательно, она содержит точно одну двустороннюю единицу.

б) Следует из теоремы 1, так как по этой теореме $L^* = M^*$ и $R^* = M^*$.

в) В силу теоремы 4 имеем $S = L^* + Q$, $L^* \cap Q = \emptyset$, и Q является слева простой замкнутой полугруппой. По теореме ей двойственной Q будет также справа простой замкнутой полугруппой. Итак, Q — замкнутая группа.

Замечание. Теорема справедлива и в том случае, если вместо предположения относительно $S - L^*$ и $S - R^*$ мы предположим, что S связно.

Теорема 9. *Пусть S — связная хаусдорфова бикомпактная полугруппа, содержащая хотя бы одну правую единицу. Пусть S не является слева простой полугруппой. Тогда всякая максимальная группа, принадлежащая к какой-либо правой единице, лежит на границе максимального идеала L^*.*

Доказательство. Прежде всего L^* плотно в S. Действительно, рассмотрим $\bar{L}^*$. По лемме 1 $\bar{L}^*$ есть левый идеал, значит, или $\bar{L}^* = L^*$ или $\bar{L}^* = S$. Если бы было $\bar{L}^* = L^*$, то $S = L^* + Q$ было бы суммой двух замкнутых непустых множеств из S, следовательно S не было бы связным. Поэтому $\bar{L}^* = S$.

Пусть $Q = S - L^*$. Для границы идеала L^* имеет место

$$h(L^*) = \bar{L}^* \cap \overline{S - L^*} = S \cap \bar{Q} = S \cap Q = Q\,.$$

Так как по теореме 5 и замечанию перед теоремой 6 каждая максимальная группа, принадлежащая к какой-либо правой единице $\in S$, лежит в Q, теорема доказана.

А. Д. Уоллес [6] поставил следующий вопрос: Пусть S — хаусдорфова бикомпактная связная полугруппа. Если S содержит только *одну* левую единицу e, будет ли эта последняя в тоже время правой (значит и двусторонней) единицей из S?

Следующий пример покажет, что на этот вопрос нужно ответить *отрицательно*.

Пусть элементами S являются упорядоченные пары вещественных чисел (a, b) такие, что $0 \leqq a \leqq 1$, $0 \leqq a \leqq b \leqq 1$. Если рассматривать S как множество точек в плоскости, то S представляет собой внутренность и границу треугольника с вершинами $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 1)$. Пусть топологией в S является обычная топология в плоскости (т. е. топология, индуцированная этой топологией на S). Тогда S есть связное хаусдорфово бикомпактное пространство.

Определим в S умножение следующим образом:

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, d) .$$

Умножение, очевидно, ассоциативно и умножение не выводит нас за пределы S. Следовательно, S есть (некоммутативная) полугруппа.

Идемпотентом является каждый элемент вида $(0, b)$, где $0 \leqq b \leqq 1$, и кроме того элемент $e = (1, 1)$.

Имеем

$$(1, 1) \odot (c, d) = (c, d) ,$$
$$(c, d) \odot (1, 1) = (c, 1) .$$

Следовательно, e является левой единицей, но не является правой единицей. Никакой другой левой единицы не существует, так как для идемпотента вида $(0, b)$ имеет место $(0, b) \odot (c, d) = (0, d)$.

Итак, наша полугруппа содержит только *одну* левую единицу, которая не является, однако, правой единицей.

В нашей полугруппе существует идеал $R^* = M^*$; он представляет собой открытое множество $R^* = S - \{e\}$. Это множество является (случайно) и максимальным левым идеалом из S. Но это не будет L^*. Если бы это было так, то каждый левый идеал должен был бы лежать в $S - \{e\}$, что не соответствует действительности, ибо напр. левый идеал $l = \{(c, 1)\}$, где c пробегает замкнутый интервал $\langle 0, 1\rangle$, не лежит в $S - \{e\}$. Идеалы R^* и l покрывают все S. Итак, в нашей полугруппе не существует L^*.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Шварц Шт.:* О максимальных идеалах в теории полугрупп, I, Чехословацкий математический журнал, т. *3* (78), 1953, 139—153.

[2] *Шварц Шт.:* Максимальные идеалы в теории полугрупп, II, ЧМЖ, т. *3* (78), 1953, 365—383.

[3] *Шварц Шт.:* К теории хаусдорфовых бикомпактных полугрупп, ЧМЖ, т. *5* (80), 1955, 1—23.

[4] *Шварц Шт.:* Структура простых полугрупп без нуля, ЧМЖ, т. *1* (76), 1951, 51—65.

[5] *Schwarz Št.:* Maximálne ideály a štruktúra pologrúp, Mat. fyz. časopis SAV, *3*, 1953, 17—39.

[6] *Wallace A. D.*, Indecomposable semigroups, Mathematical Journal of Okayama Univ., Vol *3*, 1953, 1—3.

Summary

TOPOLOGICAL SEMIGROUPS WITH ONE-SIDED UNITS

ŠTEFAN SCHWARZ, Bratislava.

(Received August 23, 1954.)

Let S be a semigroup. We say that S contains the maximal left ideal L^* if there exists such a left ideal L^* of S that every left ideal $\neq S$ is contained in L^*.

Analogously we define the maximal right ideal R^* and the maximal two-sided ideal M^*.

In general such maximal ideals need not exist. But if for instance S contains at least one right unit and at least one left ideal $\neq S$ then L^* exists. Analogous existence theorems were proved in the paper [2].

I quote some of the results proved in the above paper.

1. Let S be a Hausdorff bicompact semigroup. In this case if L^* exists then there exists also M^* and we have $L^* = M^*$.

2. Let S be a Hausdorff bicompact semigroup. Suppose that L^* exists. Suppose further that either a) $S - L^*$ has more than one element, or b) S is connected. Then $S - L^*$ is a left simple closed semigroup. Moreover $S - L^*$ itself is a sum of disjoint isomorphic closed topological groups.

3. The necessary and sufficient condition that a connected Hausdorff bicompact semigroup S contains L^* is: a) S has at least one right unit element, b) S is not left simple.

4. Let S be a connected Hausdorff bicompact semigroup, having at least one right unit. Suppose that S is not left simple. Then every maximal group belonging to any right unit lies in the boundary of the maximal left ideal L^*.

A. D. Wallace [6] raised the following question. Let S be a connected Hausdorff bicompact semigroup. Suppose that S has a *unique* left unit e. Is e also a right unit of S? An example constructed above shows that the answer to this question is negative.