Czechoslovak Mathematical Journal

Marko Švec

Sur les dispersions des intégrales de l'équation $y^{(4)} + Q(x)y = 0$

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 5 (1955), No. 1, 29–60

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100130

SUR LES DISPERSIONS DES INTÉGRALES DE L'ÉQUATION $y^{(4)} + Q(x)\,y = 0$

MARKO ŠVEC, Bratíslava.

(Reçu le 24 mai 1954.)

Dans ce mémoire, nous nous occupons des propriétés des intégrales de l'équation (A). Désignons par M_{ik}, $i < k$; $i, k = 0, 1, 2, 3$, l'ensemble des intégrales de l'équation (A) dont la i-ième et la k-ième derivée s'annulent en un point donné x_1. Alors, l'ensemble M_{ik}, si nous y ajoutons encore l'integrale $y \equiv 0$, forme un sous-système linéaire du système linéaire des intégrales de l'équation (A). Les éléments (les intégrales) de M_{ik} vérifient l'équation différentielle du second ordre (5) et, réciproquement, chaque intégrale de cette équation (5) appartient à M_{ik}. Nous démontrons ensuite le théorème de la séparation des racines des intégrales de M_{ik}. Les deux propriétés citées nous permettent d'introduire dans l'ensemble M_{ik} la notion de la dispersion et d'appliquer immédiatement la théorie des dispersions due à O. Borůvka [2].

1. Quelques propriétés des intégrales de l'équation $y^{(4)} + Q(x)\,y = 0$

Considérons l'équation différentielle linéaire homogène du quatrième ordre

$$y^{(4)} + Q(x)\,y = 0\,, \tag{A}$$

et supposons la fonction $Q(x)$ définie, positive et continue dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et les intégrales de l'équation (A) oscillatoires. Par intégrale de l'équation (A) nous entendons une intégrale non identiquement nulle, qui est définie dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$.

Sous les conditions citées, on a démontré ([1], th. 2′) que l'équation (A) jouit de la propriété suivante (E): *Toute intégrale de l'équation* (A) *a, au plus en un nombre* $x \in (-\infty, \infty)$, *deux des quantités* y, y', y'', y''' *nulles.*

Définition 1.1. Soit x_1 un nombre arbitraire de l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Nous désignons par M_{ik} l'ensemble des intégrales de l'équation (A) qui remplissent les conditions

$$y^{(i)}(x_1) = y^{(k)}(x_1) = 0, \quad i < k, \quad i, k = 0, 1, 2, 3\,. \tag{1}$$

Il s'agit donc des ensembles M_{01}, M_{02}, M_{03}, M_{12}, M_{13}, M_{23}. Nous allons démontrer quelques propriétés des intégrales de l'ensemble M_{ik}.

Théorème 1.1. *Soit y_1, y_2, y_3, y_4 un système fondamental d'intégrales de l'équation* (A) *et soit W son Wronskien. Soient $u(x)$, $v(x)$ deux intégrales arbitraires de M_{ik}. On a*

a) $u' \,.\, v - u \,.\, v' = c \,.\, A_{ik}^{(01)}(x) = c \,.\, A_{ik}(x)$,

b) $u'' \,.\, v - u \,.\, v'' = c \,.\, A_{ik}'(x)$,

c) $u'' .\, v' - u' .\, v'' = c \,.\, A_{ik}^{(12)}(x) = \frac{1}{2}c \,.\, [A_{ik}''(x) - (-1)^k \,.\, C_{ik}]$,

d) $u''' \,.\, v - u \,.\, v''' = c \,.\, A_{ik}^{(03)}(x) = \frac{1}{2}c \,.\, [A_{ik}''(x) + (-1)^k C_{ik}]$,

e) $u''' .\, v' - u' .\, v''' = c \,.\, A_{ik}^{(13)}(x) = \frac{1}{2}c \,.\, A_{ik}'''(x)$,

f) $u''' .\, v'' - u'' .\, v''' = c \,.\, A_{ik}^{(23)}(x) = c \,.\, [\frac{1}{2}A_{ik}''''(x) - Q(x) \,.\, A_{ik}(x)]$,

g) $u^{(n)}v^{(m)} - u^{(m)}v^{(n)} = c \,.\, A_{ik}^{(mn)}(x)$, $i < k$, $m < n$, $i, k, m, n = 0, 1, 2, 3$; *on a* $A_{ik}^{(mn)}(x) \neq 0$ *pour tout* $x \neq x_1$.

$$A_{ik}^{(mn)}(x) = \begin{vmatrix} y^{(i)}(x_1) \\ y^{(k)}(x_1) \\ y^{(m)}(x) \\ y^{(n)}(x) \end{vmatrix},^{1)} \quad C_{ik} = \begin{cases} W, \ si \ i + k = 3, \\ 0, \ si \ i + k \neq 3\,. \end{cases}$$

La constante c est égale à 0 *si et seulement si $u(x)$ et $v(x)$ sont linéairement dépendants.*

Démonstration. Avant tout, l'égalité $u^{(n)}v^{(m)} - u^{(m)}v^{(n)} = c \,.\, A_{ik}^{(mn)}$ a été démontrée pour $i = 0$, $k = 1$, $m = 0$, $n = 1$ dans [1], (la formule (35)). En se servant de la même méthode on démontre facilement l'égalité en question dans les cas cités. L'affirmation que $A_{ik}^{(mn)}(x) \neq 0$ pour tout $x \neq x_1$ résulte de la propriété (E).

La dérivée de a) donne b). La troisième dérivée de a) donne e). La dérivée de e) en appliquant a) donne f). La dérivée du premier membre de c) comme aussi de d) donnent le premier membre de e), d'où il vient

$$[A_{ik}^{(12)}]' = [A_{ik}^{(03)}]' = A_{ik}^{(13)} = \tfrac{1}{2}A_{ik}'''\,.$$

En utilisant les propriétés des fonctions $A_{ik}^{(12)}$, $A_{ik}^{(03)}$, A_{ik}'' dans x_1, on a

$$2\,A_{ik}^{(12)}(x) = A_{ik}''(x) - (-1)^k C_{ik}, \quad 2A_{ik}^{(03)}(x) = A_{ik}''(x) + (-1)^k C_{ik}\,,$$

où

$$C_{ik} = \begin{cases} W, \text{ si } i + k = 3\,, \\ 0, \ \text{ si } i + k \neq 3\,. \end{cases}$$

---

1) Le symbole signifie le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1^{(i)}(x_1), & y_2^{(i)}(x_1), & y_3^{(i)}(x_1), & y_4^{(i)}(x_1) \\ y_1^{(k)}(x_1), & y_2^{(k)}(x_1), & y_3^{(k)}(x_1), & y_4^{(k)}(x_1) \\ y_1^{(m)}(x), & y_2^{(m)}(x), & y_3^{(m)}(x), & y_4^{(m)}(x) \\ y_1^{(n)}(x), & y_2^{(n)}(x), & y_3^{(n)}(x), & y_4^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

Ainsi les affirmations c) et d) sont démontrées. L'affirmation concernant la constante c est évidente.

Théorème 1.2. *La fonction $A_{ik}(x)$ verifie l'équation*

$$A_{ik} \,.\, A_{ik}'''' - A_{ik}' \,.\, A_{ik}''' + \tfrac{1}{2} A_{ik}''^2 - 2Q \,.\, A_{ik}^2 = \tfrac{1}{2} C_{ik}^2 \,, \tag{2}$$

où C_{ik} est la constante du théorème précédent.

On démontre ce théorème en posant au lieu de A_{ik} et de ses dérivées les expressions du théorème précédent.

Remarque. Si la dérivée $Q'(x)$ existe, l'équation (2) prend la forme

$$A_{ik}''''' = 2Q' \,.\, A_{ik} + 4Q \,.\, A_{ik}' \,. \tag{2'}$$

Théorème 1.3. *Soit u, v un couple d'intégrales linéairement indépendantes de M_{ik}. Toute intégrale $y(x)$ de M_{ik} peut alors être présentée comme une combinaison linéaire de u et v.*

Démonstration. Soit $y(x) \in M_{ik}$ donnée par des valeurs initiales $y^{(i)}(x_1) = y^{(k)}(x_1) = 0$, $y^{(m)}(x_1) = \alpha$, $y^{(n)}(x_1) = \beta$, ou α, β sont deux constantes réelles, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, et i, k, m, n est une certaine permutation d'élements 0, 1, 2, 3. Soit u, v un couple d'intégrales linéairement indépendantes de M_{ik}. On peut toujours déterminer deux constantes c_1 et c_2 de telle façon que l'intégrale $y = c_1 u + c_2 v$ satisfasse aux conditions initiales données. En effet, u et v étant éléments de M_{ik}, on a $y^{(i)}(x_1) = y^{(k)}(x_1) = 0$. Il faut encore montrer que le système

$$\begin{aligned} y^{(m)}(x_1) &= c_1 u^{(m)}(x_1) + c_2 v^{(m)}(x_1) = \alpha \,, \\ y^{(n)}(x_1) &= c_1 u^{(n)}(x_1) + c_2 v^{(n)}(x_1) = \beta \end{aligned} \tag{3}$$

a toujours une seule solution non identiquement nulle. Il suffit de montrer que $u^{(n)}(x_1) \,.\, v^{(m)}(x_1) - u^{(m)}(x_1) \,.\, v^{(n)}(x_1) \neq 0$. Mais d'après le théorème 1,1 g, le premier membre est égale à $c \,.\, A_{ik}^{(mn)}(x_1)$. A cause de l'indépendance linéaire de u et v, on a $c \neq 0$. Parce que i, k, m, n forment une permutation d'éléments 0, 1, 2, 3, vu la définition de $A_{ik}^{(mn)}$, on a $|A_{ik}^{(mn)}(x_1)| = |W(x_1)| \neq 0$. Ainsi le théorème est démontré.

Théorème 1.4. *Soit $\xi \neq x_1$ un nombre arbitraire de l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Il existe un ensemble d'intégrales de M_{ik} qui ont le nombre ξ pour une racine. Elles sont linéairement dépendantes; donc elles ont toutes leurs racines communes. Celles des intégrales de M_{ik} dont la m-ième dérivée, $0 \leq m \leq 3$, $i \neq m \neq k$, s'annule au point x_1 sont aussi linéairement dépendantes.*

Démonstration. Soit (y_1, y_2, y_3, y_4) un système fondamental de l'équation (A) et soit $\xi \in (-\infty, \infty)$, $\xi \neq x_1$. Alors $y(x) = \begin{vmatrix} y^{(i)}(x_1) \\ y^{(k)}(x_1) \\ y(\xi) \\ y(x) \end{vmatrix}$ est une intégrale non identiquement nulle de M_{ik}. En effet, serait-il $y(x) \equiv 0$, on aurait

$$\begin{vmatrix} y^{(i)}(x_1) \\ y^{(k)}(x_1) \\ y(\xi) \\ y'(\xi) \end{vmatrix} = 0,$$ c'est qui contredirait la propriété(E).

Soient maintenant u_1 et u_2 deux intégrales de M_{ik} linéairement indépendantes ayant le nombre ξ pour une racine. L'intégrale

$$u(x) = u_1(x) - \frac{u_1'(\xi)}{u_2'(\xi)}\, u_2(x) \tag{4}$$

a des propriétés suivantes: 1° elle n'est pas identiquement nulle, car d'après l'hypothèse, u_1 et u_2 sont linéairement indépendantes, 2° $u(x) \in M_{ik}$, ce qui est évident, 3° $u(\xi) = 0$, 4° $u'(\xi) = 0$, or c'est en contradiction avec la propriété (E) ce qui démontre la première partie du théorème.

Soit maintenant v_1, v_2 un couple d'intégrales linéairement indépendantes de M_{ik} dont la i-ième, k-ième et aussi m-ième derivée, $m \neq i, k, 0 \leq m \leq 3$, s'annulle en x_1. Alors, d'après le théorème 1.3 toute intégrale de M_{ik} peut être écrite comme une combinaison linéaire de v_1 et v_2. Mais cela signifie, que la i-ième, la k-ième et la m-ième dérivée de toute intégrale de M_{ik} s'annullent en x_1, ce qui est évidemment faux et ainsi la seconde partie du théorème se trouve démontrée.

Dirigeons maintenant notre attention sur les ensembles M_{ik}. À cet effet, envisageons les intégrales de (A) Y_{012}, Y_{123}, Y_{023}, Y_{013} où les indices signifient les ordres des dérivées de l'intégrale qui s'annullent en x_1. Elles forment un système fondamental de (A). En effet, leur Wronskien en x_1 est différent de zéro. Si nous formons toutes les combinaisons linéaires toujours de deux intégrales du système en question, nous obtenons justement les ensembles M_{ik}. Il est évident de quel couple il faut former par exemple l'ensemble M_{13}. C'est le couple d'intégrales dont le groupe d'indices contient 1 et 3; alors ce sont Y_{123} et Y_{013}. Si nous ajoutons à chaque ensemble M_{ik} l'intégrale identiquement nulle, chaque ensemble M_{ik} forme alors un sous-système linéaire du système linéaire d'intégrales de l'équation (A).

Théorème 1.5. *Les intégrales de M_{ik} vérifient l'équation différentielle du seconde ordre*

$$A_{ik}\, y'' - A_{ik}'\, y' + \tfrac{1}{2}[A_{ik}'' - (-1)^k C_{ik}] \cdot y = 0 \tag{5}$$

et réciproquement, chaque intégrale de l'équation (5) *est aussi l'intégrale de l'équation* (A) *et appartient à M_{ik}. C_{ik} est la constante du théorème* 1.1.

Démonstration. Soit u, v un couple d'intégrales linéairement idépendantes de M_{ik}. D'après le théorème 1.3 chaque intégrale y de M_{ik} peut être écrite sous la forme $y = c_1 u + c_2 v$, c_1 et c_2 étant constants. En éliminant c_1 et c_2 de y, y', y'' et en appliquant le théorème 1.1, on obtient l'équation (5).

Soit maintenant y une intégrale arbitraire de l'équation (5). Nous allons démontrer qu'elle est aussi l'intégrale de (A) et qu'elle appartient à M_{ik}. Tout d'abord, on voit immédiatement de la structure de la fonction A_{ik} que A_{ik} possède les dérivées jusqu'au quatrième ordre. Alors le membre gauche de (5) est deux fois différentiable. La première dérivée donne

$$A_{ik}y''' - \tfrac{1}{2}[A''_{ik} + (-1)^k C_{ik}]\, y' + \tfrac{1}{2}A'''_{ik} y = 0\,, \tag{6}$$

la deuxième

$$A_{ik}y'''' + A'_{ik}y''' - \tfrac{1}{2}[A''_{ik} + (-1)^k C_{ik}]\, y'' + \tfrac{1}{2}A''''_{ik} y = 0\,. \tag{7}$$

Multiplions (7) par A_{ik} et remplaçons $A_{ik}y''$ par l'expression de (5) et $A_{ik}y'''$ par celle de (6). Nous avons alors

$$A^2_{ik}y'''' + [\tfrac{1}{2}A_{ik}A''''_{ik} - \tfrac{1}{2}A'_{ik}A'''_{ik} + \tfrac{1}{4}(A''^2_{ik} - C^2_{ik})]y = 0\,,$$

ou, en appliquant (2),

$$A^2_{ik}y'''' + A^2_{ik}Qy = 0\,,$$

d'où, parce que $A_{ik} \neq 0$, pour $x \neq x_1$, il résulte $y^{(4)} + Q(x)\, y = 0$. Donc $y(x)$ satisfait à l'équation (A).

Soit maintenant u, v un couple d'intégrales linéairement indépendantes de M_{ik}. D'après ce que nous venons de démontrer, u et v vérifient l'équation (5) et à cause de leur indépendance linéaire, nous puvons les considérer comme un système fondamental de l'équation (5) dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$ comme aussi dans l'intervalle (x_1, ∞). Soit $y(x)$ une intégrale arbitraire de (5). Nous pouvons l'écrire sous la forme $y = c_1u + c_2v$, où c_1 et c_2 sont des constantes. Parce que $u, v \in M_{ik}$, il est $y^{(i)}(x_1) = y^{(k)}(x_1) = 0$, alors $y(x) \in M_{ik}$.

Le point x_1 est un point de discontinuité de l'équation (5) (sauf si $ik = 23$). Nous allons démontrer que ce point est un point régulier au sens dû à Bôcher [3, p. 280], et que les intégrales de (5) sont définies aussi dans x_1. Tout d'abord, les coefficients de l'équation (5) après la division par A_{ik} peuvent être écrits sous la forme

$$-\frac{A'_{ik}}{A_{ik}} = \frac{\mu_{ik}}{(x - x_1)} + p_{ik}(x), \quad \frac{A''_{ik} - (-1)^k C_{ik}}{2A_{ik}} = \frac{\nu_{ik}}{(x - x_1)^2} + q_{ik}(x)\,,$$

où

$$\mu_{ik} = -\lim_{x\to x_1} (x - x_1)\frac{A'_{ik}}{A_{ik}}, \quad \nu_{ik} = \lim\, (x - x)^2\,.\, \frac{A''_{ik} - (-1)^k C_{ik}}{2A_{ik}}$$

et $p_{ik}(x)$ et $q_{ik}(x)$ sont des fonctions. On démontre aisément que $|p_{ik}(x)|$ et $|(x - x_1)|\,.\,|q_{ik}(x)|$ sont intégrables sur chaque intervalle fini contenant x_1. Les valeurs de μ_{ik} et ν_{ik} et celles des racines α_{ik}, β_{ik} de l'équation fondamentale déterminante relative au point x_1, $\varrho(\varrho - 1) + \mu_{ik}\varrho + \nu_{ik} = 0$, sont

ik	μ_{ik}	ν_{ik}	α_{ik}	β_{ik}
01	—4	6	3	2
02	—3	3	3	1
03	—2	2	2	1
12	—2	0	3	0
13	—1	0	2	0
23	0	0	0	0.

Le système fondamental d'intégrales de (5) est

$$y_1 = (x - x_1)^{\alpha_{ik}} \cdot \varphi_{ik}(x), \qquad y_2 = (x - x_1)^{\beta_{ik}} \cdot \psi_{ik}(x)\,,$$

où $\varphi_{ik}(x_1) \neq 0$, $\psi_{ik}(x_1) \neq 0$ (voir [3], th. VI.).

Théorème 1.6. *L'équation* (5) *ne dépend pas du choix du système fondamental de l'équation* (A), *c.-à-d. les fonctions*

$$\frac{A'_{ik}}{A_{ik}}, \quad \frac{A''_{ik} - (-1)^k C_{ik}}{2A_{ik}} = \frac{A^{(12)}_{ik}}{A_{ik}}$$

restent invariables lorsqu'on change le système fondamental de l'équation (A).

Démonstration. Soit $(y) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ un système fondamental de l'équation (A) et A_{ik} la fonction relative à lui, $(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ un autre système fondamental de (A), $\tilde{A}_{ik}$ la fonction lui appartenante. Les systèmes (y) et (u) sont liés par la relation $(u) = C(y)$, où C signifie une matrice carrée régulière réelle et $|C|$ son déterminant. Par suite on a

$$\tilde{A}_{ik} = |C|A_{ik}, \quad \tilde{A}'_{ik} = |C|A'_{ik}, \quad \tilde{A}^{(12)}_{ik} = |C|A^{(12)}_{ik}\,,$$

d'où résulte notre théorème.

Nous aurons besoin, plus tard, des propriétés et des valeurs de A_{ik} et de ses dérivées en x_1. Voici la table de ces valeurs:

ik	A_{ik}	A'_{ik}	A''_{ik}	A'''_{ik}	A''''_{ik}	$A^{(12)}_{ik}$
01	0	0	0	0	$2W$	0
02	0	0	0	$-2W$	0	0
03	0	0	W	0	0	W
12	0	0	W	0	0	0
13	0	$-W$	0	0	0	0
23	W	0	0	0	0	0

De la propriété (E), il s'ensuit que les A_{ik} sont, pour $x \neq x_1$, différentes de zéro. La même affirmation est vraie aussi pour les fonctions $A^{(mn)}_{ik}$, $i < k$, $m < n$, $i, k, m, n = 0, 1, 2, 3$. D'après ce que nous avons dit, on vérifie facilement que A_{02}, et aussi A_{13}, ont, dans les intervalles $(-\infty, x_1)$ et (x_1, ∞), les signes constants, mais inverses. Toutes les autres A_{ik} ont dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$ le signe constant et le même. Par un choix convenable du système fondamental (y) de l'équation (A), en choisissant par exemple un système tel que $W > 0$, on peut parvenir à ce que A_{02} et A_{13} soient positives dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$ et négatives dans (x_1, ∞) et que toutes les autres A_{ik} soient non négatives (positives sauf en x_1, où elles sont nulles excepté A_{23} qui est constamment positive) dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Supposons, dans ce qui suit, qu'il en est ainsi.

Posons maintenant

$$y = \sqrt{|A_{ik}|} \cdot z \,. \tag{S}$$

La substitution (S) transforme l'équation (5) en

$$z'' + \frac{4A_{ik}A''_{ik} - 3A'^2_{ik} - 2(-1)^k C_{ik}A_{ik}}{4A^2_{ik}} = 0 \tag{B}$$

pour tout $x \neq x_1$.

Faisons attention aux propriétés des fonctions $Q_{ik} = \dfrac{4A_{ik}A''_{ik} - 3A'^2_{ik} - 2(-1)^k C_{ik}A_{ik}}{4A^2_{ik}}$. Nous voyons qu'elles sont continues dans tout $x \neq x_1$. Comme $A_{23}(x) > 0$ pour tout x, $Q_{23}/(x)$ est continue aussi en x_1. Alors dans le cas $ik = 23$, les intégrales de l'équation (B) sont définies et continues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$. Dans les autres cas, l'application de la règle de l'Hospital nous donne

$$\lim_{x\to x_1} Q_{02} = \lim_{x\to x_1} Q_{12} = \lim_{x\to x_1} Q_{13} = -\infty,\ \lim_{x\to x_1} Q_{03} = \lim_{x\to x_1} Q_{01} = 0 \tag{8}$$

et

$$\lim_{x\to x_1} (x - x_1)^2 Q_{02} = \lim_{x\to x_1} (x - x_1)^2 Q_{13} = -\tfrac{3}{4},\ \lim_{x\to x_1} (x - x_1)^2 Q_{12} = -2 \,. \tag{8'}$$

Il en résulte, d'après [**3**, Th. I], que, dans les cas où $ik = 01$ et 03, il existe une et une seule intégrale de l'équation (B) qui avec sa première dérivée tend vers des valeurs données d'avance, quand $x \to x_1$. Lorsque $ik = 02$, 12, ou 13, il est valable le

Théorème 1.7. *Soit $z(x)$ une intégrale de l'équation*

$$z'' + Q_{ik}(x) \cdot z = 0, \quad ik = 02, 12, 13 \,. \tag{9}$$

Alors on a

$$\lim_{x\to x_1} z(x) = \lim_{x\to x_1} z'(x) = 0 \tag{9_1}$$

ou bien

$$|\lim_{x\to x_1} z(x)| = |\lim_{x\to x_1} z'(x)| = \infty \,. \tag{9_2}$$

Démonstration. On peut écrire la fonction Q_{ik} sous la forme

$$Q_{ik} = \frac{\nu_{ik}}{(x - x_1)^2} + q_{ik}(x), \quad ik = 02, 12, 13,$$

où $\nu_{02} = \nu_{13} = -\frac{3}{4}$, $\nu_{12} = -2$. On démontre facilement que la fonction $|(x - x_1)| \cdot |q_{ik}(x)|$ a une limite finie pour $x \to x_1$, elle est donc intégrable dans chaque intervalle fini contenant x_1. Alors x_1 est un point régulier de l'équation (9) (**3**, p. 279). Lorsque $ik = 02, 13$, l'équation fondamentale déterminante relative au point x_1 est $\varrho(\varrho - 1) - \frac{3}{4} = 0$. Elle a deux racines réelles $\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$. L'intégrale générale est alors de la forme

$$z = c_1(x - x_1)^{\frac{3}{2}}\varphi_{ik}(x) + c_2(x - x_1)^{-\frac{1}{2}}\psi_{ik}(x), \qquad ik = 02,13 \,. \tag{9_3}$$

En cas de $ik = 12$, l'équation fondamentale déterminante relative à x_1 est $\varrho(\varrho - 1) - 2 = 0$ et ses racines $= 2, -1$. Par suite, l'intégrale générale est

$$z = c_1(x - x_1)^2\varphi_{12}(x) + c_2(x - x_1)^{-1}\psi_{12}(x) \,. \tag{9_4}$$

Dans (9_3) et (9_4) c_1 et c_2 sont des constantes, $\varphi_{ik}(x)$ et $\psi_{ik}(x)$ des fonctions continues dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et différentes de zéro en x_1. D'après (9_3) et (9_4), il est évident que, si $c_2 = 0$, (9_1) est valable, si $c_2 \neq 0$, c'est (9_2) qui est valable.

Désignons l'ensemble d'intégrales de l'équation (B) par M'_{ik}. Entre les intégrales de M_{ik} et celles de M'_{ik} il existe la correspondance biunivoque (S). $\acute{A}_{ik}$ étant finie et continue il s'ensuit de (S) que les racines de l'intégrale $z(x) \in M'_{ik}$ sont en même temps des racines de l'intégrale $y(x) \in M'_{ik}$ qui correspond à $z(x)$ par la relation (S). L'intégrale $y(x)$ peut avoir une racine, c.-à-d. x_1 au plus. (D) *Convenons de ne tenir x_1 pour une racine de l'intégrale $y(x) \in M_{ik}$ que s'il est une racine de l'intégrale $z(x) \in M'_{ik}$ correspondante à $y(x)$, ou, ce qui est équivalent, s'il est une racine de $y(x)$ et si son ordre de multiplicité surpasse celui des autres intégrales de M_{ik} linéairement indépendantes de $y(x)$.*

Théorème 1.8. *Pour les intégrales de M_{ik} est valable le théorème de la séparation des racines à savoir pour M_{02} et M_{13} dans les intervalles $(-\infty, x_1)$, (x_1, ∞), pour les autres M_{ik} dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$.*

Démonstration. Ce théorème résulte du fait que les $\acute{A}_{ik}$, $ik = 01, 03, 12, 23$, ont le signe constant dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, tandis que A_{02} et A_{13} ont le signe constant dans l'intervalle $(-\infty, x_1)$ et dans (x_1, ∞). En effet, soient y_1, y_2 deux intégrales de M_{ik} linéairement indépendantes et soient $\xi_1 < \xi_2$ deux racines consecutives de y_1, d'ailleurs quelconques, dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$, si $ik = 01, 03, 12, 23$; au contraire soit $\xi_1 < \xi_2 < x_1$, ou $x_1 < \xi_1 < \xi_2$, si $ik = 02, 13$. En supposant que y_2 n'a aucune racine entre ξ_1 et ξ_2, l'équation

$$0 = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\frac{y_1}{y_2}\right)' \mathrm{d}x = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{c \,.\, A_{ik}(x)}{y_2^2}\, \mathrm{d}x \neq 0$$

donne une contradiction qui démontre le théorème.

En conséquence du théorème 1.8 nous partageons les M_{ik} dans deux groupes. Au premier groupe, que nous désignerons par $\overline{M}_{ik}$, appartiendront les ensembles M_{01}, M_{03}, M_{12}, M_{23}, alors ceux pour lesquels le théorème de la séparation des racines est valable dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$, tandisque M_{02} et M_{13}, pour lesquels le théorème cité n'est valable que dans les intervalles $(-\infty, x_1)$ et (x_1, ∞), feront partie de l'autre group qui sera désigné par $\overline{\overline{M}}_{ik}$. Le sens des symboles $\overline{M}'_{ik}$ et $\overline{\overline{M}}'_{ik}$ ne demande pas d'explication.

En utilisant le théorème 1.1 et les propriétés de $A_{ik}^{(mn)}$, on démontre d'une manière analogue à celle du théorème 1.8 le théorème de la séparation des racines des dérivées du p-ième ordre des intégrales de M_{ik}, ainsi que des dérivées du p-ième et du r-ième ordre des intégrales de M_{ik}, $p, r = 0, 1, 2, 3$. Mais il faut d'abord convenir que l'on ne doit compter x_1 pour une racine de la dérivée du p-ième ordre de l'intégrale $y(x)$ de M_{ik} (si x_1 est une racine) qu'en cas où sa multiplicité surpasse la multiplicité de la racine x_1 des dérivées du p-ième ordre des autres intégrales de M_{ik} linéairement indépendantes de $y(x)$.

2. Les relations bilinéaires entre les intégrales de l'ensemble M_{ik}.

Théorème 2.1. *Soit u_1, u_2 un couple d'intégrales linéairement indépendantes de M_{ik} et ξ, η deux nombres arbitraires. Pour que les nombres ξ, η soient une solution de l'équation*

$$u_1^{(m)}(\xi) \cdot u_2^{(n)}(\eta) - u_1^{(n)}(\eta) \cdot u_2^{(m)}(\xi) = 0, \qquad m, n = 0, 1, 2, 3 \qquad (\mathrm{a}_1)$$

il faut et il suffit qu'il existe une intégrale de M_{ik}, dont la derivée du m-ième ordre s'annule en ξ et la dérivée du n-ième ordre en η.

Démonstration. Prenons l'intégrale $y(x) = c_1u_1 + c_2u_2$ de M_{ik}, u_1, u_2 étant un couple d'intégrales linéairement indépendantes de M_{ik}. Celui-ci satisfait aux conditions

$$\begin{aligned} y^{(m)}(\xi) &= c_1u_1^{(m)}(\xi) + c_2u_2^{(m)}(\xi) = 0\,, \\ y^{(n)}(\eta) &= c_1u_1^{(n)}(\eta) + c_2u_2^{(n)}(\eta) = 0 \end{aligned} \qquad (10)$$

et est non identiquement nul quand et seulement quand le déterminant du système (10) est nul, c.-à-d. quand ξ, η est une solution de l'équation (a_1).

Soient maintenant u_1, u_2 et U_1, U_2 deux couples ordonnés d'intégrales linéairement indépendantes de M_{ik}. Nous définissons la fonction

$$F(x, y) = U_1(x) \cdot u_2(y) - U_2(x) \cdot u_1(y)\,. \qquad (a_1')$$

On peut démontrer le

Théorème 2.2. *Soient ξ $(\neq x_1$, si $i = 0)$ et η $(\neq x_1$, si $i = 0{,}1)$ deux nombres de l'intervalle $(-\infty, \infty)$ qui satisfont à l'équation $F(\xi, \eta) = 0$. Il existe une seule* *fonction $\varphi(x)$ définie et continue dans un certain entourage du point (ξ, η), qui prenne en ξ la valeur $\varphi(\xi) = \eta$, satisfasse à l'équation $F(x, \varphi(x)) = 0$ et admette dans cet entourage une dérivée, donnée par la formule*

$$\varphi'(x) = -\frac{U_1'(x) \cdot u_2(\varphi(x)) - U_2'(x) \cdot u_1(\varphi(x))}{U_1(x) \cdot u_2'(\varphi(x)) - U_2(x) \cdot u_1'(\varphi(x))} . \tag{11}$$

D é m o n s t r a t i o n. La fonction $F(x, y)$ a les propriétés suivantes: 1° $F(\xi, \eta) = 0$, d'après la supposition; 2° Dans chaque point (x, y) il existent des dérivées continues

$$F_x'(x, y) = U_1'(x) \cdot u_2(y) - U_2'(x) \cdot u_1(y) .$$
$$F_y'(x, y) = U_1(x) \cdot u_2'(y) - U_2(x) \cdot u_1'(y) ,$$

ce qui est évident. 3° $F_y'(\xi, \eta) \neq 0$.

Nous démontrons cette dernière affirmation. Soit $F_y'(\xi, \eta) = 0$. Alors avec l'équation $F(\xi, \eta) = 0$ nous avons le système

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) &= U_1(\xi) \cdot u_2(\eta) - U_2(\xi) \cdot u_1(\eta) = 0 , \\ F_y'(\xi, \eta) &= U_1(\xi) \cdot u_2'(\eta) - U_2(\xi) \cdot u_1'(\eta) = 0 . \end{aligned} \tag{12}$$

Soit $\xi \neq x_1$. A cause de l'indépendance linéaire de U_1 et U_2 on a $U_1^2(\xi) + U_2^2(\xi) \neq 0$. Alors le système (12) a une solution non identiquement nulle. Le déterminant de ce système,

$$D = u_1'(\eta) \cdot u_2(\eta) - u_1(\eta) \cdot u_2'(\eta) = c \cdot A_{ik}(\eta), \text{doit être nul.} \tag{13}$$

c est $\neq 0$ à cause de l'indépendance linéaire de u_1 et u_2. Si maintenant $\eta \neq x_1$, on a $A_{ik}(\eta) \neq 0$ ce qui résulte de la propriété (E). Alors $D \neq 0$ forme une contradiction. Si $\eta = x_1$, d'après ce que nous avons supposé, $ik = 23$. Mais $A_{23}(x_1) = W \neq 0$ et nous avons de nouveau une contradiction.

Soit maintenant $\xi = x_1$, donc $i \neq 0$. Alors, à cause de l'indépendance linéaire $U_1^2(x_1) + U_2^2(x_1) \neq 0$, et le système (12) a une solution non identiquement nulle. Si $\eta \neq x_1$, on a $A_{ik}(\eta) \neq 0$ et puis aussi $D \neq 0$. Si $\eta = x_1$, on a $ik = 23$. Mais $A_{23}(x_1) \neq 0$, donc aussi $D \neq 0$. Les contradictions prouvent notre énoncé.

La fonction $F(x, y)$ possède donc des propriétés qui permettent d'appliquer le théorème classique sur les fonctions implicites à l'équation $F(x, y) = 0$ duquel théorème résulte le nôtre.

A l'aide des couples ordonnés U_1, U_2 et u_1, u_2 d'intégrales linéairement indépendantes de M_{ik} on peut former la fonction

$$F^{(mn)}(x, y) = U_1^{(m)} \cdot (x) \cdot u_2^{(n)}(y) - U_2^{(m)}(x) \cdot u_1^{(n)}(y), \quad m < n, \ m, n = 0, 1, 2, 3 \tag{a$_2$}$$

et en utilisant le théorème classique sur les fonctions amplicites, démontrer sous certaines conditions imposées sur ξ, η l'existence de la fonction $\varphi_{mn}(x)$ définie et continue dans un certain entourage de ξ, recomplissant l'équation

$F^{(mn)}(x, \varphi_{mn}(x)) = 0$ et $\varphi_{mn}(\xi) = \eta$ et admettant, dans l'entourage en question, une dérivée donnée par la formule

$$\varphi'_{mn}(x) = -\frac{F_x^{(m,n)}(x, \varphi_{mn}(x))}{F_y^{(m,n)}(x, \varphi_{mn}(x))} . \tag{11'}$$

3. La définition des dispersions centrales et ses propriétés.

Envisageons les ensembles M_{ik} et M'_{ik}. Leurs intégrales sont liées par la relation (S). Si $y(x) \in M_{ik}$ et $z(x) \in M'_{ik}$ sont deux intégrales se correspondant respectivement par la relation (S), elles ont toutes leurs racines communes (nous respectons la convention sur la racine x_1).

Definition 3.1. Soit x un nombre arbitraire et $y \in M_{ik}$ une intégrale s'annulant en x. Désignons par φ_ν la ν-ième racine de y qui suit (précède, si $\nu < 0$) à la racine x, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Nous appelons la fonction $\varphi_\nu(x)$ *dispersion centrale (c.) de la première espèce d'indice* ν, en particulier, la fonction $\varphi_1(x)$ sera la dispersion c. fondamentale. Les valeurs $\varphi_\nu(x)$, seront appelées *nombres associés* à x.

En vertu du théorème 1.4, la fonction $\varphi_\nu(x)$ ne dépend pas du choix de l'intégrale y.

On définit les dispersions c. des espèces supérieures de façon suivante:

Definition 3.1'. Soit x un nombre arbitraire, $y \in M_{ik}$ une intégrale, dont la m-ième dérivée s'annulle en x. Designons par $\varphi_\nu^{(mn)}$ la ν-ième racine de la n-ième dérivée de l'intégrale y qui suit (précède, si $\nu < 0$) à la racine x, $m, n = 0, 1, 2, 3$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Nous appelons la *fonction* $\varphi_\nu^{(mn)}(x)$ *dispersion c. de l'espèce* (m, n), *d'indice* ν.

La dispersion c. de la première espèce est alors la dispersion c. de l'espèce (0,0). Dans ce qui suit nous nous occupperons exclusivement des dispersions c. de la première espèce, d'indice $\nu \neq 0$. Si nous prenons dans la définition 3.1, au lieu de l'intégrale $y \in M_{ik}$, l'intégrale $z \in M'_{ik}$ qui correspond à y suivant la formule (S), nous avons la même définition et la même dispersion c. $\varphi_\nu(x)$. Quant aux propriétés de la dispersion c. $\varphi(x)$ il faut distinguer deux cas, suivant que $M_{ik} = \overline{M}_{ik}$ ou $M_{ik} = \overline{\overline{M}}_{ik}$.

I. $M_{ik} = \overline{M}_{ik}$. Dans ce cas le théorème de la séparation des racines des intégrales est valable dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$. A cause de cela, on voit immédiatement que les propriétés de la dispersion c. $\varphi(x)$ sont les mêmes que celles qu'introduit O. Borůvka [2, 6, 7, 8]:

1. *Les dispersions c. forment un groupe cyclique infini engendré par la dispersion c. fondamentale* φ_1. *L'unité est donnée par l'identité* $\varphi_0 = x$. *Les dispersions c* . φ_ν *d'indices pairs forment un sous-groupe du groupe en question.*

2. *La dispersion c. est une fonction croissante dans tout l'intervalle* $(-\infty, \infty)$.

L'ensemble de ses valeurs est l'intervalle $(-\infty, \infty)$. *Par suite, la dispersion c. est continue en tout nombre* $x \in (-\infty, \infty)$.

3. Pour les dérivées des dispersions c. nous démontrons quelques théorèmes analogues à ceux de O. Borůvka.

Théorème 3.1. *Soit* φ *la dispersion c. et* u_1, u_2 *un couple ordonné d'intégrales linéairement indépendantes de* $\overline{M}_{ik}$. *La dispersion c.* φ *possède une dérivée continue en tout nombre* $x \in (-\infty, \infty)$, *sauf au nombre* x *où* $\varphi(x) = x_1$, si $ik = 12$. *Cette dérivée est donnée par la formule*

$$\varphi'(x) = -\frac{u_1'(x) \,.\, u_2(\varphi) - u_2'(x) \,.\, u_1(\varphi)}{u_1(x) \,.\, u_2'(\varphi) - u_2(x) \,.\, u_1'(\varphi)} \tag{a}$$

pour tout $x \in (-\infty, \infty)$, *à l'exception de* x_1 *en cas de* $i = 0$, *et de tous les* x *pour lesquels* $\varphi(x) = x_1$ *en cas de* $i = 0,1$.

$$\varphi'(x) = \frac{A_{ik}(x)}{A_{ik}(\varphi)} \cdot \frac{u_1^2(\varphi)}{u_1^2(x)}, \tag{α}$$

si $u_1(x) \neq 0$, *pour tout* $x \in (-\infty, \infty)$, *sauf* x_1 *au cas où* $i = 0$ *et sauf ces* x *pour qui* $\varphi(x) = x_1$ *au cas où* $i = 0,1$.

$$\varphi'(x) = \frac{A_{ik}(\varphi)}{A_{ik}(x)} \cdot \frac{u_1'^2(x)}{u_1'^2(\varphi)}, \tag{β}$$

si $u_1(x) = 0$, *pour tout* $x \in (-\infty, \infty)$, *à l'exception de* x_1 *et des* x *pour lesquels* $\varphi(x) = x_1$ *en cas de* $i = 0,1$.

$$\varphi'(x_1) = \left\langle \begin{array}{ll} \dfrac{A_{ik}''(x_1)}{A_{ik}(\varphi(x_1))} \cdot \dfrac{u_1^2(\varphi(x_1))}{2u_1'^2(x_1)}, & \textit{si } ik = 03 \textit{ et } u_1'(x_1) \neq 0, \\ \dfrac{A_{ik}''''(x_1)}{A_{ik}(\varphi(x_1))} \cdot \dfrac{u_1^2(\varphi(x_1))}{6u_1''^2(x_1)}, & \textit{si } ik = 01 \textit{ et } u_1''(x_1) \neq 0; \end{array} \right. \tag{γ}$$

$$\varphi'(x) = \left\langle \begin{array}{ll} \dfrac{A_{ik}(x)}{A_{ik}''(x_1)} \cdot \dfrac{2u_1'^2(x_1)}{u_1^2(x)}, & \textit{si } ik = 03, \varphi(x) = x_1 \neq x \textit{ et } u_1(x) \neq 0, \\ \dfrac{A_{ik}(x)}{A_{ik}''''(x_1)} \cdot \dfrac{6u_1''^2(x_1)}{u_1^2(x)}, & \textit{si } ik = 01, \varphi(x) = x_1 \neq x \textit{ et } u_1(x) \neq 0; \end{array} \right. \tag{δ}$$

Si $ik = 12$, *on a*

$$\lim_{\substack{\varphi(x) \to x_1 \\ x \to\!\!\!\!|\,\, x_1}} \varphi'(x) = \infty\,. \tag{ε}$$

Démonstration. De la définition de $\varphi(x)$ et du théorème 2.1 il s'ensuit que $F(x, \varphi(x)) = u_1(x) \,.\, u_2(\varphi(x)) - u_1(\varphi(x)) \,.\, u_2(x) = 0$. En appliquant à cette fonction le théorème classique sur les fonctions implicites nous obtenons la formule (a). Ailleurs, la démonstration est analogue à celle du théorème 2.2.

Supposons que x vérifie les conditions citées sous (α). Alors, la dérivée $\varphi'(x)$ est donné par (a). Multiplions le numérateur et le dénominateur du second membre de la formule (a) par $u_1(x)$ en la modifiant ensuite à l'aide de la relation $F(x, \varphi) = 0$. Procédons de nouveau de façon analogue en multipliant cette fois-ci par $u_1(\varphi)$ et utilisons pour la modification de la formule de nouveau la relation $F(x, \varphi) = 0$ ainsi que le théorème 1.1. Nous obtenons ainsi la formule (α). En prenant la fonction u_2 au lieu de la fonction u_1 nous pouvons obtenir de la même manière la formule

$$\varphi'(x) = \frac{A_{ik}(x)}{A_{ik}(\varphi)} \cdot \frac{u_2^2(\varphi)}{u_2^2(x)}, \quad u_2(x) \neq 0 . \tag{α_1'}$$

Soit maintenant $u_1(x) = 0$, $u_1'(x) \neq 0$ et $x \neq x_1 \neq \varphi(x)$, si $i = 0,1$. De la définition de $\varphi(x)$ il résulte aussi $u_1(\varphi) = 0$, mais à cause de l'indépendence linéaire de u_1 et u_2 on a $u_2(x) \neq 0$ et aussi $u_2(\varphi) \neq 0$. Alors, d'après la formule (α_1') la dérivée $\varphi'(x)$ existe et est différente de zéro. L'aplication de la règle de l'Hospital à (α) nous donne

$$\varphi'(x) = \frac{A_{ik}(x)}{A_{ik}(\varphi)} \cdot \frac{u_1'^2(\varphi)}{u_1'^2(x)} \cdot \varphi'^2(x) ,$$

d'où résulte la formule (β).

Soit $ik = 03$. Pour tout $x \neq x_1$ et tel que $\varphi(x) \neq x_1$ la dérivée $\varphi'(x)$ est donnée par la formule (α) ou (α_1'). Supposons que $u_1'(x_1) \neq 0$ et que $\varphi(x_1) \neq x_1$, c.-à-d. $\varphi \neq \varphi_0$. Sous les conditions citées, la fonction $\varphi'(x)$ a une limite finie pour $x \to x_1$. En effet, en appliquant la règle de l'Hospital sur la formule (α) nous avons

$$\lim_{x \to x_1} \varphi'(x) = \frac{u_1^2(\varphi(x_1))}{A_{03}(\varphi(x_1))} \cdot \lim_{x \to x_1} \frac{A_{03}(x)}{u_1^2(x)} = \frac{u_1^2(\varphi(x_1))}{A_{03}(\varphi(x_1))} \cdot \frac{A_{03}''(x_1)}{2u_1'^2(x_1)} = f_0 .$$

L'existence et la continuité de la dérivée $\varphi'(x)$ en x_1 résulte de la formule des accroissements finis. Alors, $\varphi'(x_1) = f_0$. De pareille façon on démontre la formule (γ) et la continuité de $\varphi'(x)$ en x_1, si $ik = 01$, ainsi que l'existence et la continuité de $\varphi'(x)$ et les formules (δ) pour les x où $\varphi(x) = x_1$.

Si $ik = 12$, la formule (ε) résulte de (α).

Les formules pour $\varphi'(x)$ seront plus simples, si nous les exprimons à l'aide des intégrales $z_1, z_2 \in M_{ik}'$ qui correspondent à u_1, u_2 par la relation (S). Si $ik \neq 12$, nous avons

$$\varphi'(x) = \frac{z_1^2(\varphi)}{z_1^2(x)}, \quad \text{si } z_1(x) \neq 0 , \tag{α'}$$

$$\varphi'(x) = \frac{z_1'^2(x)}{z_1'^2(\varphi)}, \quad \text{si } z_1(x) = 0 . \tag{β'}$$

Ce sont les formules que donne aussi O. Borůvka [2]. Si $ik = 12$, les formules (α') et (β') sont valables pour tout $x \neq x_1$ et pour ces x où $\varphi(x) \neq x_1$. Soit maintenant $\varphi(t) = x_1$, $z_1(t) \neq 0$. D'après le théorème 1.7 on a $|\lim_{x \to t} z(\varphi(x))| = \infty$, il en résulte en vertu de (α') que $\lim_{x \to t} \varphi'(x) = \infty$. Soit $\varphi(t) = x_1$ et

$z_1(t) = 0$, par conséquent $z_1'(t) \neq 0$. Mais en vertu du théorème 1.7 nous trouvons $|\lim_{x \to t} z_1(\varphi(x)| = |\lim_{x \to t} z_1'(\varphi(x))| = 0$ et ainsi à l'aide de (β') nous obtenons le même résultat qu'auparavant.

Soit maintenant $x = x_1$, $\lim_{x \to x_1} z_1(x) = 0$. Il se trouve aussi que $\lim_{x \to x_1} z_1'(x) = 0$ (cf. théor. 1.7) et $z_1(\varphi(x_1)) = 0$, mais $z_1'(\varphi(x_1)) \neq 0$. Il s'ensuit donc de la formule (β') que $\lim_{x \to x_1} \varphi'(x) = 0$. Soit enfin $|\lim_{x \to x_1} z_1(x)| = \infty$. En suite du théorème 1.7 on a aussi $|\lim_{x \to x_1} z_1'(x)| = \infty$; or $z_1(\varphi(x_1)) \neq 0$, de la formule (α') il s'ensuit donc de nouveau que $\lim_{x \to x_1} \varphi'(x) = 0$. Dans le cas envisagé, on démontre l'existence et la continuité de la fonction $\varphi(x)$ au point x_1 en appliquant la formule des accroissements finis.

Théorème 3.2. *La dispersion c. $\varphi(x)$ admet des dérivées continues jusqu'au cinquième ordre en tout $x \in (-\infty, \infty)$ sauf aux x où $\varphi(x) = x_1$, si $ik = 12$.*

D é m o n s t r a t i o n. Si $x \neq x_1$ et aussi $\varphi(x) \neq x_1$, l'affirmation résulte de la formule (α) et du fait que A_{ik} et u_1 admettent des dérivées continues jusqu'au quatrième ordre. Pour $x = x_1$ et pour les x où $\varphi(x) = x_1$ on démontre le théorème de façon pareille comme pour la dérivée du premier ordre.

Théorème 3.3. *La dispersion c. $\varphi(x)$ verifie l'équation*

$$2\zeta'\zeta''' - 3\zeta''^2 + 4Q_{ik}(\zeta) \, . \, \zeta'^4 - 4Q_{ik}(x) \, . \, \zeta'^2 = 0 \qquad \text{(C)}$$

en tout x où $\varphi'(x)$ est continue.

D é m o n s t r a t i o n. On démontre ce théorème en calculant les dérivées de $\varphi(x)$ et en les posant dans l'équation (C). D'ailleurs, cette équation est celle de O. Borůvka (2, 17, équation (b)) et la démonstration du théorème est la même.

II. $M_{ik} = \overline{\overline{M}}_{ik}$.

De la définition des dispersions c. et des propriétés des intégrales de M_{ik}, il résulte qu'aussi dans le cas où $M_{ik} = \overline{\overline{M}}_{ik}$ les dispersions c. forment un groupe cyclique infini engendré par la dispersion c. fondamentale φ_1. L'unité est $\varphi_0 = x$.

Parce que le théorème de la séparation des racines des intégrales de $\overline{\overline{M}}_{ik}$ est valable dans les intervalles $(-\infty, x_1)$ et (x_1, ∞), est évident le

Théorème 3.4. *Les dispersions c. d'indices positifs (négatifs) jouissent dans l'intervalle (x_1, ∞) $((-\infty, x_1))$ des mêmes propriétés que les dispersions c. dans le cas des $\overline{M}_{ik}$, à savoir elles sont croissantes et continues, admettant des dérivées continues jusqu'au cinquième ordre et vérifient l'équation* (C) *dans tout l'intervalle en question.*

Il nous reste alors d'examiner les propriétés des dispersions c. d'indices positifs sur l'intervalle $(-\infty, x_1)$ et de celles d'indices négatifs sur l'intervalle

(x_1, ∞). A cet effet nous examinons la position des racines des intégrales de $\overline{\overline{M}}_{ik}$. Soit tout d'abord $\overline{\overline{M}}_{ik} = M_{02}$ et $y_1, y_2 \in M_{02}$ deux intégrales linéairement indépendantes, y_1 vérifiant les conditions $y_1(x_1) = y_1'(x_1) = y_1''(x_1) = 0$. D'après la définition, les nombres $\varphi_k(x_1)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sont les racines de y_1. La fonction $A_{02}(x)$ a dans tout l'intervalle $(\varphi_k(x_1), \varphi_{k+1}(x_1))$ le signe constant, d'où en utulisant le théorème 1. la on démontre facilement le

Théorème 3.5. *Dans chaque intervalle* $(\varphi_k(x_1), \varphi_{k+1}(x_1))$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ *il se trouve justement une racine de l'intégrale* $y_2(x)$.

Théorème 3.6. *Soit* $k > 0$ *un nombre entier fixe et soient* $\xi < \eta$ *deux nombres arbitraires de l'intervalle* $(\varphi_{-k}(x_1), \varphi_{-k+1}(x_1))$. *On a*

$$\varphi_j(\xi) < \varphi_j(\eta) \qquad \textit{pour} \quad j < k\,, \tag{α}$$

$$\varphi_{k-1}(\xi) < \varphi_{k-1}(\eta) < x_1 < \varphi_k(\eta) < \varphi_k(\xi)\,, \tag{β}$$

$$\varphi_j(\xi) > \varphi_j(\eta) \qquad \textit{pour} \quad j > k\,. \tag{γ}$$

Démonstration. Si $j < k$, il résulte du théorème 3.5 que $\varphi_j(\xi) < x_1$, $\varphi_j(\eta) < x_1$. Soient y_2, $y_3 \in M_{02}$ deux intégrales qui vérifient les conditions: $y_2(\xi) = 0$, $y_3(\eta) = 0$, elles sont alors linéairement indépendantes. (α) résulte du théorème de la séparation des racines et du théorème 3.5. En vertu de (α) on a $\varphi_{k-1}(\xi) < \varphi_{k-1}(\eta) < x_1$, c.-à-d. les deux premières inégalités de (β). L'intégrale $y_2(x)$ est donc différente de zéro dans l'intervalle $(\varphi_{k-1}(\eta), x_1)$ et alors la fonction $\dfrac{y_3(x)}{y_2(x)}$ est dans cet intervalle continue et possède la dérivée:

$$\left(\frac{y_3(x)}{y_2(x)}\right)' = \frac{c\,.\,A_{02}(x)}{y_2^2(x)}\,.$$

En intégrant cette équation dans les limites $\varphi_{k-1}(\eta)$, x_1 et en utilisant les relations $y_3(\varphi_{k-1}(\eta)) = 0$, $\lim\limits_{n \to x_1} \dfrac{y_3(x)}{y_2(x)} = \dfrac{y_3'(x_1)}{y_2'(x_1)}$, nous obtenouns

$$\frac{y_3'(x_1)}{y_2'(x_1)} = c\,.\int\limits_{\varphi_{k-1}(\eta)}^{x_1} \frac{A_{02}(x)}{y_2^2(x)}\,\mathrm{d}x \tag{13}$$

Il est $A_{02}(x) > 0$ pour $x < x_1$. La limite $\lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{A_{02}(x)}{y_2^2(x)}$ existe et est finie. Alors, l'intégrale dans (13) existe aussi et sa valeur est positive. Il en résulte

$$\operatorname{sgn} \frac{y_3'(x_1)}{y_2'(x_1)} = \operatorname{sgn} c\,. \tag{14}$$

Supposons maintenant que la dernière inégalité dans (β) n'a pas lieu, c.-à-d. que $\varphi_k(\xi) \leq \varphi_k(\eta)$. Or, à cause de l'indépendance linéaire de y_2 et y_3, il est certain que $\varphi_k(\xi) \neq \varphi_k(\eta)$. Par suite la fonction $\dfrac{y_2(x)}{y_3(x)}$ est définie et continue dans l'intervalle $(x_1, \varphi_k(\xi))$ et admet la derivée $\left(\dfrac{y_2(x)}{y_3(x)}\right)' = -c\dfrac{A_{02}(x)}{y_3^2(x)}$.

Intégrons cette équation dans les limites x_1, $\varphi_k(\xi)$. Comme $y_2(\varphi_k(\xi)) = 0$, $\lim\limits_{x\to x_1} \dfrac{y_2(x)}{y_3(x)} = \dfrac{y_2'(x_1)}{y_1^1(x_1)}$, nous avons

$$-\frac{y_2'(x_1)}{y_3'(x_1)} = c\int\limits_{x_1}^{\varphi_k(\xi)} \frac{-A_{02}(x)}{y_3^2(x)}\, dx\,. \tag{15}$$

Pour $x > x_1$ $-A_{02}(x)$ est > 0. La limite $\lim\limits_{x\to x_1} \dfrac{A_{02}(x)}{y_3^2(x)}$ existe et est finie. Donc l'intégrale (15) existe aussi et sa valeur est positive. Il en résulte que

$$\operatorname{sgn} \frac{y_2'(x_1)}{y_3'(x_1)} \neq \operatorname{sgn} c\,,$$

or cela est en contradiction avec (14) ce qui prouve l'inégalité en question (la dernière inégalité dans (β)).

Soit $j > k$. Il existe alors un nombre entier $p > 0$ et tel que $j = k + p$. Vu la définition, il est $\varphi_j(x) = \varphi_p(\varphi_k(x))$. D'après la théorème 3.4 la fonction $\varphi_p(x)$ est croissante dans l'intervalle (x_1, ∞). Puisque d'après (β) il est $x_1 < < \varphi_k(\eta) < \varphi_k(\zeta)$, il en résulte

$$\varphi_j(\eta) = \varphi_p(\varphi_k(\eta)) < \varphi_p(\varphi_k(\xi)) = \varphi_p(\xi)$$

La relation (γ) est ainsi démontrée.

De pareille façon on démontre le

Théorème 3.7. *Soit $k > 0$ un nombre entier fixe et $\xi < \eta$ deux nombres arbitraires de l'intervalle $(\varphi_{k-1}(x_1), \varphi_k(x_1))$. Il est*

$$\varphi_j(\eta) < \varphi_j(\xi) \qquad pour \quad j < -k\,, \tag{α'}$$

$$\varphi_{-k}(\eta) < \varphi_{-k}(\xi) < x_1 < \varphi_{-k+1}(\xi) < \varphi_{-k+1}(\eta)\,, \tag{β'}$$

$$\varphi_j(\eta) > \varphi_j(\xi) \qquad pour \quad j > -k\,. \tag{γ'}$$

Les théorèmes 3.5, 3.6, 3.7 sont vrais pour l'ensemble M_{02}. Mais ils sont vrais aussi pour l'ensemble M_{13}. Leurs démonstrations seraient une répetition mot à mot des démonstrations des théorèmes pour M_{02}, seulement pour y_1 il faut prendre une intégrale de M_{13} satisfaisant aux conditions $y_1(x_1) = y_1'(x_1) = = y_1'''(x_1) = 0$ et pour y_2 et y_3 les intégrales de M_{13} pour lesquelles $y_2(\xi) = 0$, $y_3(\eta) = 0$.

Nous pouvons ensuite démontrer quelques autres théorèmes.

Théorème 3.8. *Soit $k > 0$ un nombre entier et $\varphi_k(x)$ la dispersion c. d'indice k. La fonction $\varphi_k(x)$ est*

1° *croissante et continue dans l'intervalle* $(-\infty, \varphi_{-k}(x_1))$,
2° *décroissante et continue dans les intervalles* $(\varphi_{-\nu}(x_1), \varphi_{-\nu+1}(x_1))$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$,
3° *discontinue (en restant finie) aux nombres* $\varphi_{-\nu}(x_1)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Démonstration. 1° Soient $x' < x''$ deux nombres arbitraires de l'intervalle $(-\infty, \varphi_{-k}(x_1))$. Du théorème de la séparation des racines des intégrales et du théorème 3.5 il résulte que $\varphi_k(x') < \varphi_k(x'') < x_1$. $\varphi_k(x)$ est alors croissante dans l'intervalle $(-\infty, \varphi_{-k}(x_1))$. Ses valeurs forment l'intervalle $(-\infty, x_1)$. En effet, si $x \in (-\infty, \varphi_{-k}(x_1))$, on a $\varphi_k(x) \in (-\infty, x_1)$. Soit δ un nombre arbitraire de $(-\infty, x_1)$. Alors $\varphi_{-k}(\delta) \in (-\infty, \varphi_{-k}(x_1))$. Le nombre $\varphi_{-k}(\delta)$ a la propriété que la dispersion c. d'indice k a en lui la valeur δ: $\varphi_k(\varphi_{-k}(\delta) = \delta$. La continuité de $\varphi_k(x)$ dans l'intervalle $(-\infty, \varphi_{-k}(x_1))$ est la conséquence de sa croissance dans l'intervalle en question et du fait que ses valeurs dans cet intervalle forment un intervalle.

2° Soient $\xi < \eta$ deux nombres arbitraires de l'intervalle $(\varphi_{-\nu}(x_1), \varphi_{-\nu+1}(x_1))$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$. D'après le théorème 3.6 (β) on a $x_1 < \varphi_\nu(\eta) < \varphi_\nu(\xi)$. k-ν étant positif, on a d'après le théorème 3.4 $\varphi_{k-\nu}(\varphi_\nu(\eta)) = \varphi_k(\eta) < \varphi_{k-\nu}(\varphi_\nu(\xi)) = \varphi_k(\xi)$. Alors, $\varphi_k(x)$ est décroissante dans l'intervalle $(\varphi_{-\nu}(x_1), \varphi_{-\nu+1}(x_1)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$. Ses valeurs forment l'intervalle $(\varphi_{k-\nu}(x_1), \varphi_{k-\nu+1}(x_1))$. En effet, si $x \in (\varphi_{-\nu}(x_1), \varphi_{-\nu+1}(x_1))$, de la définition de $\varphi_k(x)$ et du théorème 3.5 il résulte que $\varphi_k(x) \in$ $\in (\varphi_{k-\nu}(x_1), \varphi_{k-\nu+1}(x_1))$. Réciproquement, si δ est un nombre arbitraire de l'intervalle $(\varphi_{k-\nu}(x_1), \varphi_{k-\nu+1}(x_1)$, le nombre $\varphi_{-k}(\delta)$ est situé dans l'intervalle $(\varphi_{-\nu}(x_1), \varphi_{-\nu+1}(x_1))$. La valeur de $\varphi_k(x)$ en ce nombre est δ, car $\varphi_k(\varphi_{-k}(\delta)) = \delta$. La continuité de la fonction $\varphi_k(x)$ dans l'intervalle $(\varphi_{-\nu}(x_1), \varphi_{-\nu+1}(x_1))$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, résulte manifestement de ce que nous avons dit sur elle.

3° Soit $x \in (\varphi_{-\nu}(x_1), \varphi_{-\nu+1}(x_1))$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$. Alors $\varphi_k(x) \in (\varphi_{k-\nu}(x_1), \varphi_{k-\nu+1}(x_1))$. $\varphi_k(x)$ étant décroissante dans $(\varphi_{-\nu}(x_1), \varphi_{-\nu+1}(x_1))$ et bornée, nous avons $\lim\limits_{x \to \varphi_{-\nu}(x_1)+} \varphi_k(x) = \varphi_{k-\nu+1}(x_1)$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$, $\lim\limits_{x \to \varphi_{-\nu}(x_1)-} \varphi_k(x) = \varphi_{k-\nu-1}(x_1)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k-1$.

Soit $x \in (x_1, \infty)$. Par suite $\varphi_k(x) \in (\varphi_k(x_1), \infty)$. Parce que $\varphi_k(x)$ est dans (x_1, ∞) croissante et bornée inférieurement, il est $\lim\limits_{x \to x_1+} \varphi_k(x) = \varphi_k(x_1)$.

Soit enfin $x \in (-\infty, \varphi_{-k}(x_1))$. Il est $\varphi_k(x) \in (-\infty, x_1)$. La fonction $\varphi_k(x)$ est croissante et bornée supérieurement dans $(-\infty, \varphi_{-k}(x_1))$, par suite $\lim\limits_{x \to \varphi_{-k}(x)-} \varphi_k(x) = x_1$.

Ainsi le théorème est démontré.

On démontre de la même façon le

Théorème 3.9. *Soit $k > 0$ un nombre entier et $\varphi_{-k}(x)$ la dispersion c. d'indice $-k$. La fonction $\varphi_{-k}(x)$ est*

1° *croissante et continue dans l'intervalle* $(\varphi_k(x_1), \infty)$,

2° *décroissante et continue dans l'intervalle* $(\varphi_{\nu-1}(x_1), \varphi_\nu(x_1))$, $\nu = 1, 2, \ldots, k$,
3° *discontinue (en restant finie) dans les nombres* $\varphi_\nu(x_1)$, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Pareillement comme les théorèmes 3.2, 3.3, 3.4 on démontre le

Théorème 3.10. *Soit* $u(x)$ *une intégrale arbitraire de* $\overline{\overline{M}}_{ik}$. *La dispersion c.* $\varphi(x)$ *possède partout où elle est continue* 1° *la première dérivée continue donnée par la formule*

$$\varphi'(x) = \frac{A_{ik}(x)}{A_{ik}(\varphi)} \cdot \frac{u^2(\varphi)}{u^2(x)}\,, \text{ si } u(x) \neq 0\,, \tag{α}$$

$$\varphi'(x) = \frac{A_{ik}(\varphi)}{A_{ik}(x)} \cdot \frac{u'^2(x)}{u'^2(\varphi)}\,, \text{ si } u(x) = 0\,; \tag{β}$$

2° *les dérivées continues jusqu'au cinquième ordre*;
3° *verifie l'équation* (C).

4. La projectivité dans l'ensemble M_{ik} (M'_{ik}).

Définition 4.1. Soient U_1, U_2 et u_1, u_2 deux couples ordonnés d'intégrales de M_{ik} linéairement indépendantes et V_1, V_2 et v_1, v_2 deux couples ordonnés d'intégrales de M'_{ik} linéairement indépendantes correspondantes à U_1, U_2 resp. u_1, u_2 d'après la formule (S). Soient λ, μ, $\lambda^2 + \mu^2 \neq 0$, deux nombres réels arbitraires. $Y = \lambda U_1 + \mu U_2$ et $y = \lambda u_1 + \mu u_2$ sont deux intégrales de M_{ik} et $Z = \lambda V_1 + \mu V_2$ et $z = \lambda v_1 + \mu v_2$ deux intégrales de M'_{ik} correspondantes à Y resp. y par la relation (S). Nous appellerons la correspondance $Y \to y$ *projectivité* p *dans l'ensemble d'intégrales* M_{ik} et nous écrirons $y = pY$, de même la correspondance $Z \to z$ sera appelée *projectivité* π *dans l'ensemble d'intégrales* M'_{ik}, et nous écrirons $z = \pi Z$. Nous appellerons les projectivités p et π *correspondantes* (S). Nous appellerons le couple ordonné U_1, U_2 (V_1, V_2) *première base* et le couple ordonné u_1, u_2 (v_1, v_2) *seconde base* de la projectivité p (π). La fraction

$$\tau = \frac{W(U_1, U_2)}{W(u_1, u_2)} \left(\sigma = \frac{W(V_1, V_2)}{W(v_1, v_2)}\right)$$

où $W(f, g)$ signifie le Wronskien des fonctions f, g, sera appelée la *caractéristique* de la projectivité p (π).

La caractéristique τ (σ) est un nombre constant. En effet, en vertu le théorème 1.1 on a $W(U_1, U_2) = c_1 A_{ik}$, $W(u_1, u_2) = c_2 A_{ik}$, alors $\tau = \frac{c_1}{c_2}$. Pour σ, c'est évident. La projectivité p (π) est définie sans ambiguité par ses bases, c'est pourquoi nous écrirons $p = \{U_1 \to u_1,\ U_2 \to u_2\}$ ($\pi = \{V_1 \to v_1,\ V_2 \to \to v_2\}$).

Théorème 4.1. *Il est* $\tau = \sigma$.

En effet, les élements $U(u)$ et $V(v)$ sont correspondants par la formule (S). Par suite, il n'est pas difficile de démontrer les relations $W(U_1, U_2) = |A_{ik}| \cdot W(V_1, V_2)$, $W(u_1, u_2) = |A_{ik}| \cdot W(v_1, v_2)$, d'où résulte notre théorème.

Théorème 4.2. *Soient $y(x) \in M_{ik}$, $z(x) \in M'_{ik}$ deux intégrales correspondantes suivant la formule* (S), *p et π les projectivités correspondantes* (S). *Alors les intégrales py et πz elles-mêmes correspondent suivant la formule* (S).

Démonstration. Le théorème résulte immédiatement de la définition 4.1.

Théorème 4.3. *La projectivité p (π) conserve l'indépendance linéaire des intégrales.*

Démonstration. Soient $Y_1 = \lambda_1 U_1 + u_1 U_2$ et $Y_2 = \lambda_2 U_1 + \mu_2 U_2$ deux intégrales de M_{ik} linéairement indépendantes. On a alors $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 \neq 0$, et par suite, $W(pY_1, pY_2) = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\, W(u_1, u_2) = (\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)$. c. $A_{ik} \neq \neq 0$, ce qui prouve le théorème. La démonstration pour le cas de π est analogue [2, 13].

Définition 4.2. a) Nous dirons que deux projectivités ont *le même caractère* — ou bien qu'elles sont *de caractères inverses* suivant que leurs caractéristiques sont de même signe ou de signes opposés.

b) Soit $c \neq 0$ un nombre arbitraire. Nous dirons la projectivité $cp = \{U_1 \to cu_1, U_2 \to cu_2\}$ ($c\pi = \{V_1 \to cv_1, V_2 \to cv_2\}$) *linéairement dépendante* de la projectivité $p = \{U_1 \to u_1, U_2 - u_2\}$ ($\pi = \{V_1 \to v_1, V_2 \to v_2\}$).

c) La projectivité aux bases identiques sera dite projectivité *identique* e: $e = \{U_1 \to U_1, U_2 \to U_2\}$ ($\bar{e} = \{V_1 \to V_1, V_2 \to V_2\}$).

d) La projectivité aux bases changées sera appelée projectivité *inverse* à la projectivité primitive: $p^{-1} = \{u_1 \to U_1, u_2 \to U_2\}$ ($\pi^{-1} = \{v_1 \to V_1, v_2 \to V_2\}$).

d) Soient $p_1 = \{U_1 \to u_1, U_2 \to u_2\}$ $p_2 = \{u_1 - \bar{u}_1, u_2 - \bar{u}_2\}$ ($\pi_1 = \{V_1 \to v_1, V_2 \to v_2\}$, $\pi_2 = \{v_1 \to \bar{v}_1, v_2 \to \bar{v}_2\}$) deux projectivités. Nous dirons de la projectivité $p = \{U_1 \to \bar{u}_1, U_2 \to \bar{u}_2\}$ ($\pi = \{V_1 \to \bar{v}_1, V_2 \to \bar{v}_2\}$) qu'elle est *composée* de la projectivité $p_1(\pi_1)$ et de la projectivité $p_2(\pi_2) : p = p_2p_1(\pi = \pi_2\pi_1)$.

De la correspondance biunivoque (S) et de celle de p et de π il résulte le

Théorème 4.4. *Soient p et π deux projectivités correspondantes* (S).

a) *Les projectivités inverses p^{-1} et π^{-1} sont correspondantes* (S).
b) *Soit $c \neq 0$. Les projectivités cp et $c\pi$ sont correspondantes* (S).
c) *Soient p_1 et π_1, p_2 et π_2 les projectivités correspondantes* (S). *Alors les projectivités composées $p = p_2p_1$ et $\pi = \pi_2\pi_1$ sont correspondantes* (S).

Définition 4.3. Soit α, β un couple ordonné de nombres arbitraires et p (π) la projectivité dans l'ensemble d'intégrales $M_{ik}(M'_{ik})$. Nous appellerons la projectivité p (π) *régulière de la première espèce* (simplement *régulière*) *par* *rapport à α et β,* si pour toute intégrale $y \in M_{ik}$ ($z \in M'_{ik}$) dont α est une racine, le nombre β est une racine de l'intégrale py (πz). (Si α ou β est égal à x_1, on doit respecter la convention (D)).

Théorème 4.5. *Soient p et π deux projectivités correspondantes* (S). *La régularité par rapport à α, β de l'une d'eux entraîne la régularité par rapport à α, β de l'autre.*

Démonstration. Soient $y \in M_{ik}$ et $z \in M'_{ik}$ les intégrales correspondantes par la formule (S), π la projectivité regulière par rapport à α, β. Soit α une racine de z. Par suite, α est une racine de y et β une racine de πz. Mais, d'après le théorème 4.2 py et πz sont correspondantes (S), alors β est aussi une racine de py, c.-à-d. p est regulière par rapport à α, β. De la même façon on démontre la régularité de π en partant de la régularité de p.

Les définitions introduites dans ce numéro pour p et π sont analogues à celles dues à O. Borůvka [2, 13, 14] qui les introduit en cas de l'équation différentielle $y'' = Q(x)y$. On démontre facilement que la projectivité $p(\pi)$ a toutes les propriétés qu'a celle introduite par O. Borůvka. Nous nous dispenserons de ces démonstrations. Nous citons deux propriétés qui nous seront utiles pour la suite:

Théorème 4.6. *Soit p^* la projectivité régulière par rapport à α, β. Il existe une seule projectivité $p = \{U_1 \to u_1, U_2 \to u_2\}$ linéairement dépendante de p^*, qui est régulière par rapport à α, β, dont la caractéristique est* $+1$ *ou* -1 *et dont les bases vérifient les relations:*

1. $U_1(\alpha) > 0, \quad U_2(\alpha) = 0, \quad u_1(\beta) > 0, \quad u_2(\beta) = 0,$ *sauf le cas où* $i = 0$, $\alpha = x_1$ *ou* $\beta = x_1$,
2. $U''_1(\alpha) > 0, \quad U''_2(\alpha) = 0, \quad u_1(\beta) > 0, \quad u_2(\beta) = 0,$ *si* $i = 0$, $k = 1$, $\alpha = x_1 + \beta$,
3. $U'_1(\alpha) > 0, \quad U'_2(\alpha) = 0, \quad u_1(\beta) > 0, \quad u_2(\beta) = 0,$ *si* $i = 0$, $k = 2, 3$, $\alpha = x_1 + \beta$,
4. $U_1(\alpha) > 0, \quad U_2(\alpha) = 0, \quad u''_1(\beta) > 0, \quad u''_2(\beta) = 0,$ *si* $i = 0$, $k = 1$, $\alpha + x_1 = \beta$,
5. $U_1(\alpha) > 0, \quad U_2(\alpha) = 0, \quad u'_1(\beta) > 0, \quad u'_2(\beta) = 0,$ *si* $i = 0$, $k = 2, 3$, $\alpha + x_1 = \beta$,
6. $U''_1(\alpha) > 0, \quad U''_2(\alpha) = 0, \quad u''_1(\beta) > 0, \quad u''_2(\beta) = 0,$ *si* $i = 0$, $k = 1$, $\alpha = x_1 = \beta$,
7. $U'_1(\alpha) > 0, \quad U'_2(\alpha) = 0, \quad u'_1(\beta) > 0, \quad u'_2(\beta) = 0,$ *si* $i = 0$, $k = 2, 3$, $\alpha = x_1 = \beta$.

Théorème 4.7. *Soit p une projectivité donnée et α un nombre arbitraire. Il y a un ensemble dénombrable des nombres β_ν tels que la projectivité p est régulière par* *rapport à α, β_ν. Si β_0 est l'un d'eux, les autres nombres β_ν sont associés à lui, c.-à-d. $\beta_\nu = \varphi_\nu(\beta_0)$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$*

Pour ce qui suit, il est important de se rendre compte de ce que les intégrales, qui sont les images d'une intégrale dans les projectivités linéairement dépendantes, sont linéairement dépendantes et alors elles ont toutes leurs racines communes. C'est pourquoi dans le cas où il s'agira seulement des racines des intégrales, on pourra substituer à la projectivité p une projectivité linéairement dépendante de p. *Quant à détermination de la projectivité p par ses bases, nous pouvons choisir l'une arbitrairement (ses éléments doivent être linéairement indépendants). Les images de la base choisie forment l'autre base.*

5. La définition et les propriétés des dispersions dans l'ensemble $\overline{M}_{ik}$.

Dans ce numéro nous envisageons seulement l'ensemble $\overline{M}_{ik}$.

Définition 5.1. Soit $\alpha \in (-\infty, \infty)$ un nombre arbitraire. Nous désignerons par α_ν, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, les nombres associés à α, c.-à-d. $\alpha_\nu = \varphi_\nu(\alpha)$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, et nous les appellerons nombres *fondamentaux par rapport à α* (α_ν sera le ν-ième nombre fondamental.) L'intervalle $\langle \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$ $((\alpha_{\nu-1}, \alpha_\nu\rangle)$ sera *le ν-ième intervalle fondamental à droit (à gauche) par rapport à α.*

Il est évident que chaque $x \in (-\infty, \infty)$ se trouve situé dans un et seulement un intervalle fondamental à droit (à gauche) par rapport à α. Du théorème de la séparation des racines des intégrales de $\overline{M}_{ik}$ résulte le

Théorème 5.1. *Soit $y \in \overline{M}_{ik}$ une intégrale arbitraire et α un nombre arbitraire. Chacune de ses racines se trouve située justement dans un intervalle fondamental à droit (à gauche) par rapport à α et réciproquement chaque intervalle fondamental à droit (à gauche) par rapport à α contient justement une racine de l'intégrale y.*

Soient α, β deux nombres arbitraires, α_ν et β_ν, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ les nombres fondamentaux par rapport à α, resp. β. Soit p une projectivité dans $\overline{M}_{ik}$, régulière par rapport à α, β. Soit x un nombre arbitraire du ν-ième (μ-ième) intervalle fondamentale à droit (à gauche) par rapport à α et $y \in \overline{M}_{ik}$ une intégrale qui s'annule en x.

Définition 5.2. Nous définissons dans l'intervalle $(-\infty, \infty)$ deux fonctions Φ et $\overline{\Phi}$ comme il suit: La valeur de la fonction Φ en x est la valeur de la racine de l'intégrale py qui se trouve située dans le ν-ième (μ-ième) intervalle fondamental à droit (à gauche) par rapport à β. La valeur de la fonction $\overline{\Phi}$ en x est la valeur de la racine de l'intégrale py qui se trouve située dans le $(-\nu)$-ième $(-\mu$-ième) intervalle fondamental à gauche (à droit) par rapport à β. Nous appelons la fonction Φ $(\overline{\Phi})$ *la dispersion directe (indirecte) de la première espèce determinée par les nombres α, β et par la projectivité p.*

Remarque. Pour la même raison que nous avons exposée à la fin du numéro précédent, nous pouvons remplacer dans la définition 5.2 la projectivité p par toute projectivité linéairement dépendante de p.

Nous définissons pareillement la dispersion directe (indirecte) dans l'ensamble $\overline{M'_{ik}}$ par α, β et par la projectivité π correspondante (S) à p. Au lieu de l'intégrale y, nous utilisons maintenant l'intégrale $z \in \overline{M'_{ik}}$, correspondante à y par la relation (S). Les racines de y et z, ainsi que celles de py et πz étant identiques, il résulte de la définition que la dispersion Φ $(\overline{\Phi})$ determinée, dans l'ensemble $\overline{M_{ik}}$, par les nombres α, β et par la projectivité p, est identique avec celle determinée par les mêmes nombres α, β et par la projectivité π dans l'ensemble $\overline{M'_{ik}}$. Faisons encore attention à ce que les intégrales de $\overline{M_{ik}}$ resp. $\overline{M'_{ik}}$ ont les mêmes propriétés que celles de l'équation $y = Q(x)y$, $Q(x) < 0$, examinée par O. Borůvka et que la projectivité $p(\pi)$ a les mêmes propriétés que celle définie par O. Borůvka dans l'ensemble des intégrales de l'équation en question. C'est pourquoi nous pouvons affirmer que la théorie des dispersions, formulée par O. Borůvka [2] dans le cas de l'équation $y = Q(x)y$, peut être appliquée immédiatement au cas de l'ensemble $\overline{M_{ik}}$. On peut d'ailleurs facilement vérifier notre affirmation, en démontrant les mêmes théorèmes que O. Borůvka ou les théorèmes un peu modifiés. Leur démonstration serait la répetition mot à mot des démonstrations des théorèmes en question. Nous nous en dispenserons. Les résultats essentiels sont formulés dans les théorèmes 5.2—5.5.

Théorème 5.2. *Soient α, β deux nombres arbitraires, p une projectivité regulière par rapport à α, β, τ la caractéristique de la projectivité p, α_ν et β_ν, $\nu = 0$, $\pm 2, \ldots$, les nombres fondamentaux par rapport à α, resp. β. La dispersion Φ (directe) determinée par α, β et par la projectivité p dans l'ensemble $\overline{M_{ik}}$ est*

a) *en cas de $\tau > 0$, croissante et continue dans tout intervalle $(-\infty, \infty)$,*
b) *en cas de $\tau < 0$, décroissante et continue dans chaque intervalle $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$,* $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mais

discontinue (tout en restant finie) en chaque nombre α_ν verifiant les équations

$$\lim_{x \to \alpha_\nu -} \Phi(x) = \beta_{\nu+1}, \quad \lim_{x \to \alpha_\nu +} \Phi(x) = \beta_{\nu-1}, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

La dispersion $\overline{\Phi}$ (indirecte) déterminée dans l'ensemble $\overline{M_{ik}}$ par α, β et par la projectivité p est

a') *en cas de $\tau < 0$, décroissante et continue dans tout l'intervalle $(-\infty, \infty)$,*
b') *en cas de $\tau > 0$, croissante et continue dans chaque intervalle $(\alpha_\nu, \alpha_{\nu+1})$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, mais*

discontinue (en restant finie) dans chaque nombre α_ν vérifiant les équations

$$\lim_{x\to\alpha_\nu -} \overline{\Phi}(x) = \beta_{-\nu+1}, \quad \lim_{x\to\alpha_\nu +} \overline{\Phi}(x) = \beta_{-\nu-1}, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Quant aux dérivées de la dispersion directe (indirecte) nous démontrons les théorèmes suivants:

Théorème 5.3. *Soit $\zeta(x)$ la dispersion directe ou indirecte (de la première espèce) determinée par les nombres α, β et la projectivité $p = \{U_1 \to u_1, U_2 \to u_2\}$ régulière par rapport à α, β. Soit τ la caractéristique de p. La dispersion $\zeta(x)$ possède la derivée continue en chaque x où elle est continue, excepté au nombre x où $\zeta(x) = x_1$, si $ik = 12$. Cette dérivée est donnée par la formule:*

$$\zeta'(x) = -\frac{U_1'(x) \,.\, u_2(\zeta) - U_2'(x)\, u_1(\zeta)}{U_1(x) \,.\, u_2'(\zeta) - U_2(x) \,.\, u_1'(\zeta)} \tag{a}$$

pour tout $x \in (-\infty, \infty)$ sauf pour x_1 en cas de $i = 0$ et sauf pour les x tels que $\zeta(x) = x_1$ en cas de $i = 0{,}1$, ou

$$\zeta'(x) = \tau \frac{A_{ik}(x)}{A_{ik}(\zeta)} \cdot \frac{u_1^2(\zeta)}{U_1^2(x)}, \quad \text{si } U_1(x) \neq 0\,, \tag{α}$$

pour tout $x \in (-\infty, \infty)$ sauf pour x_1 en cas de $i = 0$ et pour les x tels que $\zeta(x) = x_1$ en cas de $i = 0{,}1$, ou

$$\zeta'(x) = \tau \frac{A_{ik}(\zeta)}{A_{ik}(x)} \cdot \frac{U_1'^2(x)}{u_1'^2(\zeta)}, \quad \text{si } U_1(x) = 0\,, \tag{β}$$

pour tout $x \in (-\infty, \infty)$ sauf pour x_1 et pour tous les x tels que $\zeta(x) = x_1$ en cas de $i = 0{,}1$;

$$\zeta'(x_1) = \begin{cases} \tau \dfrac{A''_{ik}(x_1)}{A_{ik}(\zeta(x_1))} \cdot \dfrac{u_1^2(\zeta(x_1))}{2U_1'^2(x_1)}, & \text{si } ik = 03, \quad U_1'(x_1) \neq 0, \quad \zeta(x_1) \neq x_1\,, \\ \tau \dfrac{A''''_{ik}(x_1)}{A_{ik}(\zeta(x_1))} \cdot \dfrac{u_1^2(\zeta(x_1))}{6U_1''^2(x_1)}, & \text{si } ik = 01, U_1''(x_1) \neq 0, \quad \zeta(x_1) \neq x_1; \end{cases} \tag{γ}$$

$$\zeta'(x) = \begin{cases} \tau \dfrac{A_{ik}(x)}{A''_{ik}(x_1)} \cdot \dfrac{2u_1'^2(x_1)}{U_1^2(x)}, & \text{si } ik = 03, \ U_1(x) \neq 0, \ x \neq x_1 = \zeta(x), \\ \tau \dfrac{A_{ik}(x)}{A''''_{ik}(x_1)} \cdot \dfrac{6u_1''^2(x_1)}{U_1^2(x)}, & \text{si } ik = 01, \ U_1(x) \neq 0, \ x \neq x_1 = \zeta(x)\,; \end{cases} \tag{δ}$$

$$\zeta'(x_1) = \begin{cases} \tau \dfrac{u_1'^2(x_1)}{U_1'^2(x_1)}, & \text{si } ik = 03, \ U_1'(x_1) \neq 0, \ x = x_1 = \zeta(x)\,, \\ \tau \dfrac{u_1''^2(x_1)}{U_1''^2(x_1)}, & \text{si } ik = 01, \ U_1''(x_1) \neq 0, \ x = x_1 = \zeta(x)\,, \\ \sqrt[3]{\tau \dfrac{u_1^2(x_1)}{U_1^2(x_1)}}, & \text{si } ik = 12\ U_1(x_1) \neq 0, \ x = x_1 = \zeta(x)\,; \end{cases} \tag{ε}$$

$$\lim_{\substack{\zeta(x)\to x_1 \\ x \mapsto x_1}} \zeta'(x) = \infty, \text{ si } ik = 12 . \tag{η}$$

Démonstration. La formule (a) est démontrée dans le théorème 2.2. Il résulte de la définition de la fonction $\zeta(x)$ que la projectivité p est régulière par rapport à x, $\zeta(x)$, donc ses bases vérifient l'équation

$$U_1(x) \, , u_2(\zeta) - U_2(x) \, , u_1(\zeta) = 0 . \tag{16}$$

Pour obtenir la formule (α) multiplions tous les deux termes de la fraction dans (a) par $U_1(x)$ et modifions-les, en nous servant de la relation (16). Multiplions de nouveau tous les deux termes de la fraction ainsi obtenue par $u_1(\zeta)$ et modifions-les, en utilisant la relation (16) et le théorème 1.1a.

Nous obtenons ainsi la formule (α). Si nous procédons de manière analogue en multipliant d'abord par $U_2(x)$ et puis par $u_2(\zeta)$, nous obtenons la formule

$$\zeta'(x) = \tau \frac{A_{ik}(x)}{A_{ik}(\zeta)} \cdot \frac{u_2^2(\zeta)}{U_2^2(x)}, \quad \text{si } U_2(x) \neq 0 . \tag{α_1}$$

β) Soit $U_1(x) = 0$ et $x \neq x_1 \neq \zeta(x)$, si $i = 0{,}1$. Par suite il résulte de la définition de $\zeta(x)$ qu'aussi $u_1(\zeta(x)) = 0$. Mais à cause de la propriété (E), nous avons $U_1'(x) \neq 0$, $u_1'(\zeta(x)) \neq 0$ et à cause de l'indépendance linéaire, $U_2(x) \neq 0$, $u_2(\zeta(x)) \neq 0$. Alors en vertu de (α_1) il est évident que $\zeta'(x) \neq 0$. L'aplication de la règle de l'Hospital sur (α) nous donne

$$\zeta'(x) = \tau \frac{A_{ik}(x)}{A_{ik}(\zeta)} \cdot \frac{u_1'^2(\zeta)}{U_1'^2(x)} \cdot \zeta'^2(x) ,$$

d'où résulte (β).

γ), δ), ε) La démonstration de la formule γ), δ) et ε) et de la continuité de $\zeta'(x)$ ce fait comme dans le théorème 3.2, c.-à-d. en appliquant la règle de l'Hospital et la formule des accroissements finis.

η) Si $ik = 12$, il s'ensuit de la formule (α), que $\lim \zeta'(x) = \infty$ pour $\zeta(x) \to x_1$ et $x \mapsto x_1$.

Théorème 5.4. *La fonction $\zeta(x)$ admet en chaque point $x \in (-\infty, \infty)$ où sa première dérivée est continue, des dérivées continues jusqu'au cinquième ordre.*

Démonstration. Les fonctions A_{ik}, u_1, U_1 ont les dérivées continues jusqu'au quatrième ordre. Alors, si $x \neq x_1 \neq \zeta(x)$, notre affirmation résulte immédiatement de la formule (α). Dans les autres cas on démontre l'existence et la continuité des dérivées en question de la même façon comme nous l'avons fait pour $\zeta'(x)$.

Théorème 5.5. *La fonction $\zeta(x)$ verifie l'équation* (C), *en chaque* $x \in (-\infty, \infty)$ *où $\zeta'(x)$ est continue.*

Démonstration. Nous vérifions le théorème en calculant les dérivées ζ', ζ'' et ζ''' et en les posant dans l'équation (C). Si $x = x_1$, ou si x est tel que $\zeta(x) = x_1$, il faut prendre pour Q_{ik} lim Q_{ik}, si $ik = 01, 03$. Si $ik = 12$, on démontre que la limite du membre gauche de (C) est zéro pour $x \to x_1$. D'ailleurs, une démonstration stricte de ce théorème (utilisant les intégrales de l'ensemble $\overline{\overline{M'_{ik}}}$) est donnée dans [2, 17]. L'équation (C) n'est qu'une modification de l'équation (b) dans [2, 17].

6. Les dispersions dans l'ensemble $\overline{\overline{M}}_{ik}$.

Désignons par $x_{1,\nu}$, $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, le ν-ième nombre fondamental par rapport à x_1. Alors $\langle x_{1,\nu}, x_{1,\nu+1})$, $((x_{1,\nu-1}, x_{1,\nu}\rangle)$ signifie le ν-ième intervalle fondamental à droit (à gauche) par rapport à x_1 (déf. 5.1). Soit α un nombre arbitraire. Il se trouve situé dans un certain, mettons dans le ν-ième intervalle fondamental à droit et dans le μ-ième intervalle fondamental à gauche par rapport à x_1. Designons par α_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2. \ldots$, le nombre fondamental par rapport à α qui se trouve situé dans le k-ième intervalle fondamental à droit par rapport à x_1. D'après le théorème 3.5, chaque intégrale $y \in \overline{\overline{M}}_{ik}$ a justement une racine dans chaque intervalle fondamental à droit (à gauche) par rapport à x_1. Alors, dans chaque intervalle fondamental à droit (à gauche) par rapport à x_1 se trouve situé justement un nombre α_k. On démontre facilement qu'aussi dans chaque intervalle $\langle \alpha_k, \alpha_{k+1})$ se trouve situé justement un nombre $x_{1,\nu}$.

Du théorème de la séparation des racines d'intégrales de $\overline{\overline{M}}_{ik}$ et de ce que nous avons dit plus haut, il résulte le

Théorème 6.1. *Soit $\alpha(\neq x_{1,\nu})$ un nombre arbitraire, $u_2(x)$ une intégrale de $\overline{\overline{M}}_{ik}$ pour qui $u_2(\alpha) = 0$, et $y(x) \in \overline{\overline{M}}_{ik}$ une autre intégrale linéairement indépendante de $u_2(x)$. Dans l'intervalle (α_1, α_0) ne se trouve située ou bien aucune, ou bien il y a deux racines de l'intégrale $y(x)$ suivant que* sgn $W(y, u_2)|_{x>x_1} =$ $= \operatorname{sgn} \lim\limits_{x \to x_1+} \dfrac{y(x)}{u_2(x)}$ *ou non.*

Autrement dit: *Soit $\xi(\neq x_{1,\nu})$ une racine de $y(x)$ située dans le même intervalle fondamental à droit par rapport à x_1 que α_i soit $\alpha_i > x_1$. Si $x_1 < \alpha_i < \xi$, dans l'intervalle (α_{-1}, α_0) ne se trouve située aucune racine de $y(x)$; si $x_1 < \xi <$ $< \alpha_i$, il y a deux racines de $y(x)$ dont l'une à gauche et l'autre â droite de x_1. Soit $\alpha_i < x_1$. Si $\alpha_i < \xi < x_1$, il y a dans l'intervalle (α_{-1}, α_0) deux racines de y, l'une à gauche, l'autre à droit de x_1. Si $\xi < \alpha_i < x_1$, il n'y a aucune racine de y dans l'intervalle (α_1, α_0). Dans les autres intervalles (α_k, α_{k+1}), $k = 0$,* $1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, il *y a justement une racine de $y(x)$.*

Nous pouvons alors dire que les racines de $y(x)$ se trouvent situées „*symétriquement*" par rapport à x_1. Par le mot „symétriquement" nous entendons ce qui suit: Soit $y_1(x), y_2(x) \in \overline{\overline{M}}_{ik}$ deux intégrales linéairement indépendantes, $\gamma_1 < \gamma_2$ leurs racines situées dans l'intervalle $(x_{1,k}, x_{1,k+1})$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Alors entre leurs racines $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2$ situées dans l'intervalle $(x_{1,-k-1}, x_{1,-k})$ il existe la relation $\bar{\gamma}_1 > \bar{\gamma}_2$. Ce que nous avons dit ici n'est qu'une conséquence et une explication du théorème 3.6.

Soient maintenant α, β deux nombres arbitraires, situés: α dans le ν-ième et β dans le μ-ième intervalle fondamental à droit par raport à x_1. Soient α_k, β_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, les nombres fondamentaux par rapport à α, resp. à β, qui se trouvent situés dans le k-ième intervalle fondamental à droit par rapport à x_1. Soit p une projectivité dans l'ensemble d'intégrales $\overline{\overline{M}}_{ik}$, régulière par rapport à α, β. Soit enfin x un nombre arbitraire de l'intervalle $(-\infty, \infty)$ et $y(t) \in \overline{\overline{M}}_{ik}$ une intégrale adméttant x pour une racine, disons la n-ième racine derrière (devant) α, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Définition 6.1. Nous définissons deux fonctions $G(x)$ et $\bar{G}(x)$ comme il suit: La valeur de la fonction G au nombre x est la valeur de la n-ième racine de l'intégrale py située derrière (devant) le nombre β. La valeur de la fonction $\bar{G}$ au nombre x est la valeur de la n-ième racine de l'intégrale py située devant (derrière) le nombre β. Nous appellerons la fonction $G(\bar{G})$ la *dispersion directe (indirecte) de la première espèce dans l'ensemble $\overline{\overline{M}}_{ik}$, determinée par les nombres α, β et par la projectivité p.*

Remarque. La définition 6.1 est identique avec la définition 5.2, si le théorème de la séparation des racines des intégrales est valable pour l'intervalle $(-\infty, \infty)$, alors s'il s'agit par exemple de l'ensemble $\overline{M}_{ik}$. Maintenant, comme il s'agit de l'ensemble $\overline{\overline{M}}_{ik}$, la situation est plus compliquée qu'auparavant. Pourtant, la théorie des dispersions due à O. Borůvka peut être bien appliquée, mais pas si immédiatement.

Quant aux propriétés de la dispersion $G(\bar{G})$, nous pouvons tout de suite constater de l'analogie de la définition 5.2 et celle 6.1 que, dans les cas suvivants, *la dispersion $G(\bar{G})$ a les mêmes propriétés quant à la continuité, l'existence de la derivée etc., que la dispersion $\Phi(\bar{\Phi})$*:

1° $G \approx \Phi$ pour $x > \alpha$, si $\alpha \geq x_1$, $\beta \geq x_1$,
2° $\bar{G} \approx -\bar{\Phi}$ pour $x > \alpha$, si $\alpha \geq x_1$, $\beta \leq x_1$,
3° $G \approx \Phi$ pour $x < \alpha$, si $\alpha \leq x_1$, $\beta \leq x_1$,
4° $\bar{G} \approx -\bar{\Phi}$ pour $x < \alpha$, si $\alpha \leq x_1$, $\beta \geq x_1$.

Il faut alors examiner les propriétés de $G(\bar{G})$ dans les autres cas. Mais nous démontrons tout d'abord quelques théorèmes qui sont vrais même pour la dispersion $\Phi(\bar{\Phi})$ et que introduit aussi O. Borůvka [2, 16].

Théorème 6.2. *Les valeurs de $G(\bar{G})$ forment l'intervalle* $(-\infty, \infty)$.

Démonstration. Soit $\eta \in (-\infty, \infty)$ un nombre arbitraire, $Y(x) \in \overline{\overline{M}}_{ik}$ une intégrale ayant η pour une racine, par exemple pour la n-ième racine derrière (devant) β. L'intégrale $p^{-1}\, Y = y$ ait ξ_n pour la n-ième racine derrière α et ξ_{-n} pour n-ième racine devant α. D'après la définition de $G(\overline{G})$ on a $\eta = G(\xi_n)$ $(\eta = G(\xi_{-n}))$ et $\eta = \overline{G}(\xi_{-n})$ $(\eta = \overline{G}(\xi_n))$.

Théorème 6.3. *Soit ζ la dispersion G ou $\overline{G}$, déterminée par la projectivité $p = \{U_1 \to u_1,\ U_2 \to u_2\}$. Soit x un nombre arbitraire. La projectivité p est régulière par rapport à x, $\zeta(x)$.*

Démonstration. En effet, soit $y \in \overline{\overline{M}}_{ik}$ une intégrale telle que $y(x) = 0$. Vu la définition de la fonction $\zeta(x)$ nous avons $py(\zeta(x)) = 0$.

Avant d'examiner les autres propriétés de $G(\overline{G})$, faisons quelques conventions. Il est évident de la définition des dispersions que nous pouvons, au lieu de la projectivité p, envisager une projectivité arbitraire lineairement dépendante de p. Nous choisissons donc (ce que l'on peut toujours faire) la projectivité $p^* = \{U_1 \to u_1,\ U_2 \to u_2\}$ régulière par rapport à α, β linéairement dépendante de p, dont les bases vérifient les relations suivantes:

1. Soit $\alpha_i \in (x_{1,i}, x_{1,i+1})$, $\beta_k \in (x_{1,k} x_{1,k+1})$, $i \geqq 0$, $k \geqq 0$. Nous choisissons la seconde base de telle sorte que

$$u_1(x_{1,k}) = 0, \quad u_1(\beta_k) > 0, \quad u_2(\beta_k) = 0, \quad u_2'(\beta_k) < 0\,, \tag{17}$$

d'où il résulte que $W(u_1, u_2) > 0$ pour $x > x_1$. La première base est formée par deux intégrales U_1, U_2 qui vérifient les relations

$$U_1(\alpha_i) > 0, \quad U_2(\alpha_i) = 0\,. \tag{18}$$

2. Si $\beta_k = x_{1,k}$, la condition $u_1(x_{1,k}) = 0$ dans (17) soit remplacée par $u_1(x_{1,k}) > 0$.

Outre les intégrales des bases de p nous envisageons encore, si $\alpha_i \neq x_{1,i}$, l'intégrale $y_1 \in \overline{\overline{M}}_{ik}$, telle que $y_1(x_{1,i}) = 0$.

Soit ξ_i, α_i, $x_{1,i}$ les racines resp. de U_1, U_2, y_1 et $x_{1,k}(\eta_k)$, β_k, ω_k les racines resp. de u_1, u_2, py_1 (si $\beta_k = x_{1,k}$, soit η_k la racine de u_1) situées dans l'intervalle $\langle x_{1,i}, x_{1,i+1})$ resp. $\langle x_{1,k}, x_{1,k+1})$ $i \geqq 0$, $k \geqq 0$.

Théorème 6.4. *Dans la projectivité p, régulière par rapport à α, β, à l'intervalle dont les extremités sont*

a) $x_{1,j}, \alpha_j$ ou $x_{1,j+1}, \alpha_j$

b) α_j, ξ_j,

c) $\xi_j, x_{1,j+1}$ ou $x_{1,j}, \xi_j$

correspond l'intervalle aux extremités:

si $\beta_k \neq x_{1,k}$	*si* $\beta_k = x_{1,k}$
a′) ω_n, β_n,	a′) $\omega_n, \beta_n = x_{1,n}$ ou $\omega_n, \beta_n = x_{1,n+1}$
b′) $x_{1,n}, \beta_n$ ou $\beta_n, x_{1,n+1}$,	b′) $\beta_n = x_{1,n}, \eta_n$ ou $\eta_n, x_{1,k+1} = \beta_n$,
c′) $x_{1,n}, \omega_n$ ou $\omega_n, x_{1,n+1}$,	c′) η_n, ω_n

et inversement, c.-à-d., si $y \in \overline{\overline{M}}_{ik}$, une intégrale arbitraire, a une racine dans l'intervalle a) *par exemple, l'intégrale $py \in \overline{\overline{M}}_{ik}$ a une racine dans l'intervalle* a') *et inversement.*

Démonstration. Soit $\beta_k \neq x_{1,k}, \alpha_i \neq x_{1,i}, i \geqq 0, k \geqq 0$. Du théorème de la séparation des racines des intégrales de $\overline{\overline{M}}_{ik}$ résultent les relations:

$$x_{1,i} < \alpha_i < \xi_i < x_{1,i+1}, \text{ si sgn } W(U_1, U_2)|_{x>x_1} = \text{sgn} \lim_{x \to x_1+} \frac{U_1}{U_2}, \tag{i}$$

$$x_{1,i} < \xi_i < \alpha_i < x_{1,i+1}, \text{ si sgn } W(U_1, U_2)|_{x>x_1} \neq \text{sgn} \lim_{x \to x_1+} \frac{U_1}{U_2}. \tag{ii}$$

La position de α_i et ξ_i dépend donc des signes de $W(U_1, U_2)|_{x>x_1}$ et de $\lim\limits_{x \to x_1+} \frac{U_1}{U_2}$. Il y a quatre cas possible pour les signes de ces deux quantités. Le théorème doit être démontré dans tous les quatre cas séparément. Nous le ferons dans le cas, où

$$W(U_1, U_2)_{x>x_1} > 0, \quad \lim_{x \to x_1+} \frac{U_1}{U_2} > 0 . \tag{19}$$

Dans les autres cas on le fait de façon pareille.

De (19) il résulte

$$x_{1,i} < \alpha_i < \xi_i < x_{1,i+1}$$

et en y ajoutant (18), (19), on peut en déduire que

$$U_1(\alpha_i) > 0, \quad U_2'(\alpha_i) < 0, \quad U_2(\xi_i) < 0 \tag{20}$$

Soit maintenant $y_1(x) = \lambda_1 U_1 + \mu_1 U_2$, $y_1(x_{1,i}) = 0$, $y_1'(x_{1,i}) > 0$. On a donc $y_1(\alpha_i) = \lambda_1 U_1(\alpha_i) > 0$, $y_1(\xi_i) = \mu_1 U_2(\xi_i) > 0$, d'où et de (20) il résulte que $\lambda_1 > 0$, $\mu_1 < 0$. Par suite on a $W(py_1, u_2)|_{x>x_1} = \lambda_1 W(u_1, u_2)|_{x>x_1} > 0$, $\lim\limits_{x \to x_1+} \frac{py_1}{u_2} = \mu_1 < 0$. Mais, cela signifie que dans chaque intervalle $(x_{1,j}, x_{1,j+1})$, $j \geqq 0$, la racine de py_1 est située devant la raciné de u_2, alors

$$x_{1,j} < \omega_j < \beta_j < x_{1,j+1}, \quad j \geqq 0 .$$

Nous allons maintenant démontrer a) a'). Soit $y_2 = \lambda_2 U_1 + \mu_2 U_2$ une intégrale de $\overline{\overline{M}}_{ik}$ ayant une racine dans l'intervalle $(x_{1,i}, \alpha_i)$. Sur cet intervalle nous avons $U_1(x) > 0$, $U_2(x) > 0$ et c'est pourquoi sgn $\lambda_2 \neq$ sgn μ_2. Soit par exemple $\lambda_2 > 0$, $\mu_2 < 0$, c.-à-d. $y_2(x_{1,i}) < 0$, $y_2(\alpha_j) > 0$. Par suite $W(py_2, u_2)|_{x>x_1} = \lambda_2 W(u_1, u_2)|_{x>x_1} > 0$, $\lim\limits_{x \to x_1+} \frac{py_2}{u_2} = \mu_2 < 0$, ce qui signifie que la racine de py_2 est située devant la racine de u_2 dans chaque intervalle $(x_{1,j}, x_{1,j+1})$, $j \geqq 0$.

Mais vu les suppositions faites, nous avons encore $W(y_2, y_1)|_{x=x_{1,i}} = (\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2)$. $W(U_1, U_2)|_{x=x_{1,i}} = - y_2(x_{1,i}) \cdot y_1'(x_{1,i}) > 0$, d'où $(\lambda_2\mu_1 -$

$-\lambda_1\mu_2) > 0$. Par suite $W(py_2, py_1)|_{x>x_1} = (\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2)\, W(u_1, u_2)|_{x>x_1} > 0$, et $\lim\limits_{x\to x_1+} \dfrac{py_2}{py_1} = \dfrac{u_2}{\mu_1} > 0$, ce qui signifie que dans chaque intervalle $(x_{1,j}, x_{1,j+1})$, $j \geqq 0$, la racine de py_1 est située devant la racine de py_2. Alors en resumé, dans chaque intervalle $(x_{1,j}, x_{1,j+1})$, $j \geqq 0$, la racine de py_2 est située entre la racine de py_1 et celle de u_2. Mais du théorème 6.1 on voit immédiatement que la dernière affirmation est vraie pour tout j entier.

Parce que la projectivité p, régulière par rapport à α, β, signifie la correspondance biunivoque entre les intégrales de $\overline{\overline{M}}_{ik}$, il est évident que l'affirmation a) a') est vraie aussi inversement.

On démontre l'affirmation b) b') et c) c') de pareille façon.

2. Soit maintenant $\beta_k \neq x_{1,k}$, $\alpha_i = x_{1,i}$. Alors $U_2(x) = c\,.\,y_1$, $u_2(x) = p\,.\,.\,cy_1(x)$, $\alpha_j = x_{1,j}$, $\omega_j = \beta_j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Dans ce cas, les intervalles sous a) et a') se réduisent en un point x_j resp. β_j. La situation est maintenant comme il suit: $x_{1,i} < \xi_i < x_{1,i+1}$, $x_{1,k} < \beta_k = \omega_k < x_{1,k+1}$. Cependant il suffit de distinguer deux cas, $W(U_1, U_2)|_{x>x_1} \gtrless 0$. La démonstration du théorème se fait comme ci-dessus.

3. Soit $\beta_j = x_{1,j}$, $\alpha_j \neq x_{1,j}$. Maintenant les bases de la projectivité p vérifient les équations

$$U_1(\alpha_i) > 0, \quad U_2(\alpha_i) = 0, \quad u_1(x_{1,k}) > 0, \quad u_2(\beta_k) = u_2(x_{1,k}) = 0\,,$$
$$u_2'(\beta_k) < 0, \quad i \geqq 0, \quad k \geqq 0\,,$$

alors $W(u_1, u_2)|_{x>x_1} > 0$, $\lim\limits_{x\to x_1+} \dfrac{u_2(x)}{u_1(x)} = 0$. Pour démontrer le théorème il faut distinguer quatre cas quant aux signes de $W(U_1, U_2)|_{x>x_1}$ et de $\lim\limits_{x\to x_1+} \dfrac{U_2(x)}{U_1(x)}$. La démonstration se fait de pareille façon comme sous 1. avec la différence que u_1 et u_2 changent leurs rôles.

4. Soit enfin $\beta_k = x_{1,k}$, $\beta_k = x_{1,k}$. Cependant $\beta_k = \omega_k = x_{1,k}$, et $x_{1,i} = \alpha_i < \xi_i < x_{1,i+1}$, $x_{1,k} = \beta_k = \omega_k < \eta_k < x_{1,k+1}$, $i \geqq 0$, $k \geqq 0$. L'intervalle sous a) a') se réduit en un point. Il faut démontrer b) b') et c) c') ce qu'on fait comme sous 3.

Théorème 6.5. *Soit $\zeta(x)$ la dispersion G ou $\overline{G}$. La fonction $\zeta(x)$ est continue en tout nombre $x \in (-\infty, \infty)$ sauf aux nombres $x_{1,j}$, α_j, ξ_j, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ où elle peut ètre discontinue (en restant finie).*

Démonstration. Vu le théorème 6.4 et la définition de la fonction $\zeta(x)$, les valeurs de $\zeta(x)$ sur l'intervalle, dont les extrémités sont

a) $x_{1,i}, \alpha_i$ resp. $\alpha_i, x_{1,i+1}$

b) α_i, ξ_i

c) $x_{1,i}, \xi_i$ resp. $\xi_i, x_{1,i+1}$

forment un intervalle dont les extremités sont

a') η_k, β_k,

b') $x_{1,k}$, β_k resp. β_k, $x_{1,k+1}$,

c') $x_{1,k}$, η_k resp. η_k, $x_{1,k}$, i et k étant des indices convenables, dépendants de la position α et β.

La croissance (décroissance) de la fonction $\zeta(x)$ sur les intervalles en question résulte de la croissance (décroissance) des fonctions $\dfrac{U_2(x)}{U_2(x)}$, $\dfrac{u_1(\zeta)}{u_2(\zeta)}$ sur les intervalles en question et du théorème 6.3 d'après le théorème sur les fonctions inverses. La croissance (décroissance) de $\zeta(x)$ et le fait que les valeurs de $\zeta(x)$ sur les intervalles en question forment un intervalle, entraîne la continuité de $\zeta(x)$ sur les intervalles considérés.

Théorème 6.6. *La fonction $\zeta(x)$ possède une dérivée continue en chaque $x \in (-\infty, \infty)$ sauf aux nombres $x_{1,j}$, α_j, ξ_j, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, et elle est donnée par la formule*

$$\zeta'(x) = -\frac{U_1'(x)\,.\,u_2(\zeta) - U_2'(x)\,u_1(\zeta)}{U_1(x)\,.\,u_2'(\zeta) - U_2(x)\,.\,u_1'(\zeta)}\,, \tag{a}$$

ou

$$\zeta'(x) = \tau\,\frac{A_{ik}(x)}{A_{ik}(\zeta)}\cdot\frac{u_1^2(\zeta)}{U_1^2(x)}\,, \text{ si } U_1(x) \neq 0\,, \tag{α}$$

$$\zeta'(x) = \tau\,\frac{A_{ik}(\zeta)}{A_{ik}(x)}\cdot\frac{U_1'^2(x)}{u_1'^2(\zeta)}\,, \text{ si } U_1(x) = 0\,. \tag{β}$$

Les U et u sont les éléments des bases et τ est la caractéristique de la projectivité p.

La démonstration est analogue à celle du théorème 5.3.

La continuité de $\zeta(x)$ et l'existence et la continuité de $\zeta'(x)$ aux nombres $x_{1,j}$, α_j, ξ_j, dépend de la position de α et β et de ce qu'il s'agit de $G(x)$ ou de $\overline{G}(x)$.

L'existence et la continuité des dérivées de $\zeta(x)$ jusqu'au cinquième ordre en tout $x \in (-\infty, \infty)$, sauf aux $x_{1,j}$, α_j, ξ_j, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, est évidente de la formule (α) et du fait que les u, U, A_{ik} possèdent des dérivées continues jusqu'au quatrième ordre.

De pareille façon, comme le théorème 5.5, on démontre le

Théorème 6.7. *La fonction $\zeta(x)$ verifie en tout $x \in (-\infty, \infty)$ sauf peut-être $x_{1,j}$, α_j, ξ_j, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, l'équation* (C).

7. Remarques finales

On devrait examiner d'autres propriétés des dispersions de la première espèce, discuter l'équation (C) etc. Nous ne le faisons pas, parce que ce ne serait qu'une répetition (avec de petites modifications) de ce qu'on trouve déjà dans [2].

En ce qui concerne des dispersions des espèces supérieures, on peut les examiner d'une manière analogue à celle qui a été appliquée aux dispersions de la première espèce.

Littérature

[1] *Švec M.*: Über einige neue Eigenschaften der (oscillatorischen) Lösungen der linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung (Чех. мат. журнал, *4* (79) 1954).

[2] *Borůvka O.*: О Колеблющихся интегралах дифференциальных линейных уравнений 2-ого порядка (Sur les intégrales oscillatoires des équations différentielles linéaires du second ordre) Чех. мат. журнал, *3* (78), 1953).

[3] *Bôcher M.*: On singular points of linear differential equations with real coefficients (Bulletin of Am. Math. Soc., vol. V. 1889, 275—281).

Резюме.

О ДИСПЕРСИЯХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЯ $y^{(4)} + Q(x)\,y = 0$

МАРКО ШВЕЦ, (Marko Švec) Братислава.

(Поступило в редакцию 25. V. 1954 г.)

Предметом исследований служит дифференциальное уравнение (A) $y^{(4)} + Q(x)y = 0$ и свойства его интегралов. Предполагаем, что функция $Q(x)$ является определенной, непрерывной и положительной на всем интервале $(-\infty, \infty)$ и что решения (нетривиальные) диф. уравнения (A) все колеблются. При этих условиях уравнение (A) обладает свойством (E): *каждый из его интегралов может иметь только в одном числе* $x \in (-\infty, \infty)$ *две из величин* y, y', y'', y''' *одновременно равными нулю.*

В дальнейшем изучаются свойства некоторых подмножеств множества интегралов диф. уравнения (A), определенных следующим образом: M_{ik}, $i < k$, i, $k = 0, 1, 2, 3$ *означает множество тех интегралов диф. уравнения* (A), *i-тая и k-тая производная которых в точке* x_1 *равна* нулю. О множестве M_{ik} (если к нему прибавить тривиальное решение) доказано, что оно образует линейную подструктуру линейной системы решений диф. уравнения (A) и представляет все решения линейного уравнения второго порядка

$$A_{ik}y'' - A'_{ik}y' + \tfrac{1}{2}[A''_{ik} - (-1)^k C_{ik}]\,y = 0\,, \tag{5}$$

причем $C_{ik} = W$ (определитель Вронского фундаментальной системы уравнения (A) в точке x_1), если $i + k = 3$ и равно нулю, если $i + k \neq 3$.

A_{ik} — это определенная с точностью до постоянного множителя однозначно диф. уравнением (A) функция, заданная следующим образом: если y_1, y_2, y_3, y_4 образуют фундаментальную систему уравнения (A), то

$$A_{ik} = \begin{vmatrix} y^{(i)}(x_1) \\ y^{(k)}(x_1) \\ y(x) \\ y'(x) \end{vmatrix},$$

или если u, v — два линейно независимых интеграла из M_{ik}, то $u'v - uv' = c \,.\, A_{ik}$. Эта функция имеет лишь один корень x_1 (при $ik = 23$ она не имеет корней) и имеет постоянный знак а) на всем интервале $(-\infty, \infty)$, если $ik = 01, 03, 12, 23$, б) на интервале $(-\infty, x_1)$ и (x_1, ∞), если $ik = 02, 13$. Вследствие этих обстоятельств справедлива теорема об отделении корней интегралов из M_{ik} в случае а) на всем интервале $(-\infty, \infty)$, в случае б) на интервалах $(-\infty, x_1)$ и (x_1, ∞) (см. 1.8), если условимся считать x_1 корнем интеграла только в том случае, когда его кратность как корня рассматриваемого интеграла выше кратности его как корня остальных, от первого линейно независимых, интегралов того же множества M_{ik}.

Приложимость теоремы об отделении корней интегралов из M_{ik} и то обстоятельство, что M_{ik} представляет собой множество всех интегралов линейного дифференциального уравнения второго порядка (5), позволяет ввести понятие дисперсий (1—16 рода) и понятие проективности в множестве интегралов M_{ik} и доказать, что теорию дисперсий, построенную О. Борувкой [3], можно непосредственно целиком перенести на множества M_{ik}. Доказаны свойства дисперсий первого рода — монотонность, непрерывность —, выведены формулы для первой производной 1. центральной дисперсии [теорема 3.1, а) α)—δ), или же теорема 3.10 α), β)], 2. прямой дисперсии (непрямой) [теорема 5.3 а) α)—ε), или же теорема 6.6 а) α), β)], и найдено дифференциальное нелинейное уравнение третьего порядка (C), которому удовлетворяют дисперсии первого рода.