Ján Jakubík

Системы отношений конгруэнтности в структурах

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 4 (1954), No. 3, 248–273

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100111

Чехословацкий математический журнал, т. 4 (79) 1954

СИСТЕМЫ ОТНОШЕНИЙ КОНГРУЭНТНОСТИ В СТРУКТУРАХ

ЯН ЯКУБИК, (Ján Jakubík), Кошице

(Поступило в редакцию 1/II 1954 г.)

В работе рассматриваются определенные отношения $R_1 — R_5$ (минимальные разбиения) на структурах. При помощи этих отношений истанавливаются условия для разрешимости системы двух отношений конгруэнтности $x \equiv a \pmod{A}$, $x \equiv b \pmod{B}$ относительно идеалов A, B в дистрибутивной или модулярной структуре. При условии, что структура S — дистрибутивна и имеет наименьший элемент, такое проводилось уже в работе [1]. Далее в работе рассматривается более общий случай системы двух отношений конгруэнтности, если A, B — выпуклые подструктуры дистрибутивной структуры.

Из теории чисел известны необходимые и достаточные условия для того, чтобы система отношений конгруэнтности $x \equiv a_i \pmod{m_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имела решение. Эти условия дает так называемая китайская теорема о вычетах. Аналогичную проблему для отношений конгруэнтности в дистрибутивных структурах поставил В. К. Балахандран.[1]) Формулируется она следующим образом:

(B1) Пусть S — дистрибутивная структура, имеющая наименьший элемент, пусть A, B — идеалы в S, пусть u, v, ϵS. Найти необходимое и достаточное условие для элементов u, v так, чтобы система отношений конгруэнтности

$$x \equiv u \pmod{A}\ , \quad x \equiv v \pmod{B}^2)$$

имела решение.

Приведем самые важные результаты В. К. Балахандрана:

(B) 1. Приведенная система отношений конгруэнтности имеет решение тогда и только тогда, если

$$u \equiv v \pmod{A \cup B}\ .$$

2. Если x — решение, и имеет место $x \equiv y \pmod{A \cap B}$, то y есть также

[1]) Смотри [1]. Рецензия этой работы в Mathem.. Reviews, 11 (1950), стр. 309, содержит опечатку; вместо „$y \equiv b(\mathrm{mod}\ B)$" должно быть $x \equiv b(\mathrm{mod}\ B)$.

[2]) Точные определения употребленных обозначений даются в дальнейшем, см. также и следующее определение 1.

решение; всякие два решения удовлетворяют соотношению $x \equiv y \pmod{A \cap \cap B}$.

К обобщению проблемы (B1) мы приходим следующим путем: производящее разбиение $R(A)$, принадлежащее идеалу A дистрибутивной структуры S, как легко доказывается,[3]) есть наименьшее производящее разбиение на S, в котором все элементы идеала A принадлежат тому же классу. Более обще, пусть A — любое множество в структуре S. Естественно определить аналогично „минимальное" разбиение $R(A)$ как наименьшее из всех производящих разбиений, в которых все элементы множества A лежат в одном классе. „Минимальные производящие разбиения" мы можем определить (при некоторых предположениях о структуре S) также более конструктивно, а именно (для дистрибутивных структур) алгебраическим путем при помощи структурных операций пересечения и объединения, или (для модулярных структур) при помощи отношения проективности интервалов. Рассмотрению соотношений между различными способами определенными „минимальными разбиениями" посвящена часть 1.

В части 2 мы рассматриваем систему двух отношений конгруэнтности для дистрибутивных структур.

Прежде всего мы докажем, что утверждение (B) имеет место и без предположения существования наименьшего элемента в S (теорема 1). Далее мы рассмотрим систему двух отношений конгруэнтности

$$x \equiv u(R_1(A)) \,, \quad x \equiv v(R_1(B)) \tag{1}$$

причем A, B — выпуклые подструктуры структуры S, и $R_1(A)$ или же $R_1(B)$ — наименьшее производящее разбиение на S, в котором все элементы подструктуры A или же B лежат в одном единственном классе.

Для разрешимости системы (1), очевидно, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$u \equiv v(R_1(A) \cup R_1(B)) \,. \tag{2}$$

Это условие, как легко показывается на простых примерах, не достаточно. Итак, мы приходим к вопросу: какие другие условия, кроме отношения (2), должны быть выполнены, чтобы из отношения (2) вытекало существование решения системы отношений конгруэнтности (1)?

Этот вопрос мы можем сформулировать более подробно и точно, введя краткие обозначения для следующих предложений:

Ba. Для любых элементов $u, v \in S$ и любых выпуклых подструктур A, $B \subset S$ из отношения (2) следует существование решения отношений конгруэнтности (1).

Ba(u, v). Для заданных элементов u, v и любых выпуклых подструктур

[3] Смотри замечание [2] после леммы 4.

A, $B \subset S$ из отношения (2) следует разрешимость отношений конгруэнтности (1).

Ba(A, B). Для произвольных элементов u, $v \in S$ и для данных выпуклых подструктур A, $B \subset S$ из соотношения (2) вытекает существование решения отношений конгруэнтности (1).

При помощи известного понятия дополнительного разбиения[4]) мы можем предположения Ba и Ba(A, B) сформулировать также следующим образом:

Ba. Пусть A, B — любые выпуклые подструктуры в S.

Тогда $R_1(A)$, $R_1(B)$ взаимно дополнительны.

Ba(A, B). Пусть A, B — (фиксированные) выпуклые подструктуры в S. Разбиения $R_1(A)$, $R_1(B)$ взаимно дополнительны.

В части 2 мы будем заниматься следующими вопросами.

1. Какое необходимое и достаточное условие (налагаемое на структуру S) для того, чтобы имело место Ba.

2. Какое необходимое и достаточное условие (налагаемое на элементы u, v) для того, чтобы имело место Ba(u. v).

3. Какое необходимое и достаточное условие (налагаемое на выпуклые подструктуры A, B) для того, чтобы имело место Ba(A, B).

Результаты собраны в теоремах 2, 3, 4, 5.

В части 3 мы иссследуем систему отношений конгруэнтности (1) в модулярных структурах для случая, когда множества A, B — идеалы.

Выведены только достаточные условия для разрешимости. Остается открытым вопрос о нахождении необходимых и достаточных условий разрешимости системы (1) для этого случая.

Рассуждения в этом случае проводятся в следующем порядке: Прежде всего мы строим (конструитивно) наименьшее производящее разбиение R_0 на S, структура классов которого дистрибутивна. Эту структуру классов мы обозначим через S'. Идеалам A, B в S поставим в соответствие некоторые идеалы A', B' в S'. Для S' справедливо утверждение (B). Выражением этого утверждения ,,на языке элементов структуры S'' мы получим необходимые условия для разрешимости рассматриваемых отношений конгруэнтности.

1. МИНИМАЛЬНЫЕ ПРОИЗВОДЯЩИЕ РАЗБИЕНИЯ

Всюду в дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями: $a, b, c, \ldots, x, y, z, \ldots$ (возможно с различными индексами) будут элементы рассматриваемой структуры S; класс производящего разбиения на S, содержащий элемент x, мы будем обозначать через $\bar{x}$.

Определение 1. α) *Пусть $A \subset S$. Знаком $R_1(A)$ мы будем обозначать наименьшее производящее разбиение на S, в котором все элементы множества A лежат в одном классе.*

[4]) Смотри определение 2 и лемму 12. Этот термин принадлежит *О. Борувке*. В книге [2] употребляется термин ,,перестановочные разбиения''.

β) Пусть A — идеал (двойственный идеал) структуры S. Мы будем писать $x \equiv y(R_2(A))$ $[x \equiv y(R_3(A))]$ тогда, когда существуют такие элементы $a_1, a_2 \in A$, что *имеет место $x \cup a_1 = y \cup a_2$ $(x \cap a_1 = y \cap a_2)$.*[5])

γ) Пусть A — выпуклая подструктура структуры S. Мы будем писать $x \equiv y(R_4(A))$ тогда и только тогда, если существуют такие элементы $a_i \in A$, $i = 1, \ldots, 4$, что выполняется $x \cap a_1 = y \cap a_2$, $x \cup a_3 = y \cup a_4$.

δ) Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое множество интервалов $\langle a_i, b_i \rangle$.[6]) *Если $\mathfrak{A}$ — непустое множество, то будем писать $x \equiv y(R_5(\mathfrak{A}))$ тогда и только тогда, если существуют элементы $c_0, c_1, \ldots, c_n$, $c_0 = x$, $c_n = y$ такие, что 1. элементы c_{i-1}, c_i сравнимы, 2. ко всякому интервалу J_i, ограниченному элементами c_{i-1}, c_i, существует такой интервал $\langle a_i, b_i \rangle \in \mathfrak{A}$,* что *интервал J_i является проективным с интервалом $\langle a_i', b_i' \rangle \subset \langle a_i, b_i \rangle$ $(i = 1, \ldots, n)$.*

Если множество $\mathfrak{A}$ образовано всеми интервалами выпуклой подструктуры A, мы будем вместо $R_5(\mathfrak{A})$ писать $R_5(A)$. Если $\mathfrak{A}$ — пустое множество, то мы будем писать $x \equiv y(R_5(\mathfrak{A}))$ тогда и только тогда, если $x = y$.

Замечания. 1. Разбиение $R_1(A)$ всегда существует, оно равно пересечению всех производящих разбиений на S, в которых элемнты множества A принадлежат одному классу.

2. Пусть A, B — подмножества структуры S, $A \subseteq B$. Тогда в разбиении $R_1(B)$ все элементы подструктуры A принадлежат одному классу, так что имеет место $R_1(A) \leq R_1(B)$.

3. Мы легко убедимся в том, что в определении 1α можно без ущерба общности предполагать, что A — выпуклая подструктура структуры S. Пусть будет $A \subseteq S$. Знаком $\overline{A}$ обозначим пересечение всех выпуклых подструктур, содержащих множество A. Тогда $R_1(A) = R_1(\overline{A})$.

Доказательство. Из соотношения $A \subseteq \overline{A}$ следует $R_1(A) \leq R_1(\overline{A})$. Обозначим класс разбиения $R_1(A)$, в котором лежат элементы множества A, через A_0. Потому что каждый класс производящего разбиения является выпуклой подструктурой,[7]) то $\overline{A} \subset A_0$, откуда следует, что $R_1(\overline{A}) \leq R_1(A)$.

4. В определениях 1β и 1γ мы можем без ущерба общности предполагать $a_1 = a_2$, $a_3 = a_4$. Если, например, в обеих частях уравнения $x \cap a_1 = y \cap a_2$ образовать пересечение с элементом $a_1' = a_1 \cap a_2$, то мы получим $x \cap a_1' = y \cap a_1'$.

Лемма 1. *Пусть S — дистрибутивная структура, пусть A — выпуклая подструктура структуры S. Тогда отношение $R_4(A)$ есть отношение конгруэнтности на S; соответствующее производящее разбиение будем обозначать также через $R_4(A)$.*

Доказательство. Отношение, очевидно, рефлексивно и симметрично.

[5]) Эти соотношения (с иным обозначением) использованы несколько раз в работе [2].
[6]) Мы допускаем также интервалы $\langle x, x \rangle$, содержащие всего один элемент.
[7]) Смотри [2b], лемма на стр. 44.

Оно также транзитивно, потому что из соотношений $x \cap a = y \cap a$, $y \cap a' = z \cap a'$ следует $x \cap (a \cap a') = z \cap (a \cap a')$, и двойственно для объединений.

Пусть дальше $x \equiv y(R_4(A))$, $u \equiv v(R_4(A))$. Тогда для подходящих $a_i \in A$, $i = 1, \dots, 4$ имеет место

$$x \cap a_1 = y \cap a_1 \,, \quad u \cap a_3 = v \cap a_3 \,, \tag{1}$$

$$x \cup a_2 = y \cup a_2 \,, \quad u \cup a_4 = v \cup a_4 \,. \tag{2}$$

Обозначим $a_1 \cap a_3 = a$, $a_2 \cup a_4 = a'$. Из уравнений 1 соотв. 2 следует

$$x \cap a = y \cap a \,, \quad u \cap a = v \cap a \,, \tag{3}$$

$$x \cup a' = y \cup a' \,, \quad u \cup a' = v \cup a' \,. \tag{4}$$

Из уравнений 3 получаем $(x \cap u) \cap a = (y \cap v) \cap a$. Потому что структура S — дистрибутибна, то из уравнений 4 вытекает

$$(x \cap u) \cup a' = (y \cap v) \cup a' \,.$$

Итак, справедливо $x \cap u \equiv y \cap v(R_4(A))$. Доказательство для соединения проводится двойственно.

Замечания. 1. Если x, $y \in A$, то $x \equiv y(R_4(A))$. (Мы выбираем, напр. $a_1 = a_3 = y$, $a_2 = a_4 = x$.)

2. Если для каждого $a \in A$, $x \leq a$, $y \leq a$ [$x \geq a$, $y \geq a$] и одновременно $x \equiv y(R_4(A))$, то $x = y$. Первое утверждение мы докажем следующим образом: из предположений вытекает $x \cap a_1 = y \cap a_2$, $x \leq a_1$, $y \leq a_2$, так что $x = y$. Второе утверждение доказывается двойственно.

3. Пусть A — выпуклая подструктура в S, $a \in A$, $x \equiv a(R_4(A))$. Тогда $x \in A$. Доказательство: Ввиду предположения и замечания 4 после опр. 1 существуют элементы a_1, $a_2 \in A$ такие, что выполняется

$$x \cup a_1 = a \cup a_1 \,, \quad x \cap a_2 = a \cap a_2 \,.$$

Из этого следует, что элемент x лежит в интервале $\langle a \cap a_2, a \cup a_1 \rangle \subset A$.

Лемма 2. *Пусть S — структура, пусть для всякой выпуклой подструк туры $A \subset S$ отношение $R_4(A)$ является производящим разбиением на S Тогда S — дистрибутивная структура.*

Доказательство. Сочтем предположения теоремы выполненными. Если бы структура S не была модулярной, то она бы содержала подструктуру, изоморфную подструктуре на черт. 1.

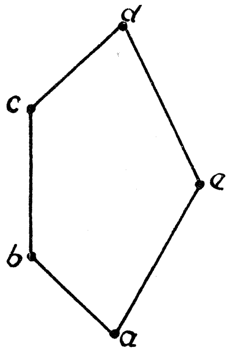
Обозначим $A = \langle a, b \rangle$ и введем в S отношение $R_4(A)$. Ввиду предыдущего замечания 3 $c \not\equiv a(R_4(A))$. Пусть R — любое производящее разбиение на S, в котором $a \equiv b(R)$. Тогда[8] $e \equiv d(R)$, $c \equiv a(R)$, следовательно,

[8]) Если интервалы $\langle x, y \rangle$, $\langle u, v \rangle$ — транспонированные, то очевидно, $x \equiv y(R) \Rightarrow u \equiv v(R)$.

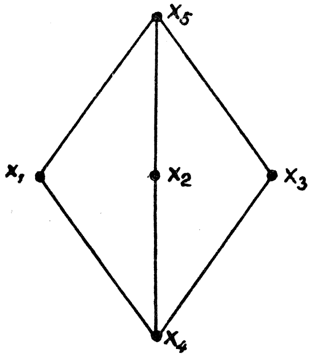
отношение $R_4(A)$ не было бы отношением конгруэнтности на S, что противоречит предположению. Из этого следует модулярность структуры S.

Всякая модулярная структура, которая не дистрибутивна, содержит подструктуру, изоморфную подструктуре на черт. 2. Предположим, что S содержит такую подструктуру; введем (при выбранном обозначении) отношение $R_4(A)$, где $A = \langle x_4, x_1 \rangle$. Тогда $x_2 \not\equiv x_4(R_4(A))$. Но для всякого производящего разбиения R на S имеет место $x_4 \equiv x_1(R) \Rightarrow x_3 \equiv x_5(R) \Rightarrow$ $\Rightarrow x_2 \equiv x_4(R)$. Из этого следует, что структура S дистрибутивна.

Лемма 3. *Пусть S — дистрибутивная структура, A выпуклая подструктура в S. Тогда $R_1(A) = R_4(A)$.*[8']



Черт. 1.



Черт. 2.

Доказательство. Ввиду замечания 1 после леммы 1 в разбиении $R_4(A)$ все элементы множества A принадлежат одному классу, так что $R_1(A) \leq R_4(A)$. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$x \equiv y(R_4(A)) \Rightarrow x \equiv y(R_1(A)) .$$

Пусть $x \equiv y(R_4(A))$. Ввиду замечания 4 после определения 1, будет в таком случае $x \cap a_1 = y \cap a_1$, $x \cup a_2 = y \cup a_2$ для некоторых элементов $a_1, a_2 \in A$. Обозначим класс разбиения $R_1(A)$, в котором лежат соответственно элементы x, y, и элементы множества A соответственно через $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{a}$. Из предыдущих уравнений следует

$$\bar{x} \cap \bar{a} = \bar{y} \cap \bar{a} , \quad \bar{x} \cup \bar{a} = \bar{y} \cup \bar{a} .$$

Потому что структура классов разбиения $R_1(A)$ дистрибутивна, должно быть $\bar{x} = \bar{y}$, т. е. $x \equiv y(R_1(A))$.

Лемма 4. *Пусть A — идеал в структуре S. Тогда $R_2(A) = R_4(A)$.*

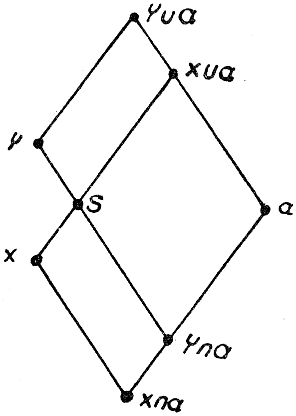
Доказательство. Очевидно, $x \equiv y(R_4(A)) \Rightarrow x \equiv y(R_2(A))$. Пусть $x \equiv$ $\equiv y(R_2(A))$. Тогда существуют элементы $a_1, a_2 \in A$ такие, что $x \cup a_1 = y \cup a_2$.

[8']) Это значит: $x \equiv y(R_1(A)) \Leftrightarrow x \equiv y(R_4(A))$.

Пусть a_3 — любой элемент идеала A, для которого $x \geq a_3$, $y \geq a_3$. (Таким элементом является напр. $a_1 \cap x \cap y$.) Очевидно, выполняется $x \cap a_3 = y \cap a_3$. Таким образом доказана эквивалентность отношений $R_2(A)$, $R_4(A)$ в случае, когда A есть идеал.

Замечания. 1. Двойственно доказывается: если A — дуальный идеал в S, тогда $R_3(A) = R_4(A)$.

2. Из лемм 1 и 4 следует: если S — дистрибутивная структура, и A — идеал соотв. дуальный идеал в S, то $R_2(A)$ соотв. $R_3(A)$ являются отношениями конгруэнтности на S. Согласно леммам 3 и 4, при этих предположениях имеет место $R_1(A) = R_2(A)$ соотв. $R_1(A) = R_3(A)$.



Черт. 3.

3. Пусть для всякого идеала $A \subset S$ отношение $R_2(A)$ есть отношение конгруэнтности на S. Тогда S — дистирбутивная структура. Мы могли бы доказательство вести таким же путем как и доказательство леммы 2, рассматривая по черт. 1 соотв. 2 идеал всех элементов $x \in S$, для которых имеет место $x \leq b$ соотв. $x \leq x_1$. Аналогичное утверждение справедливо и для отношения $R_3(A)$.

К исследованию отношения $R_5(\mathfrak{A})$ нам нужно несколько вспомогательных предложений о модулярных структурах.

Лемма 5. *Пусть S — модулярная струткура. Пусть x, y, $a \in S$, $x \leq y$. В интервале $\langle x, y \rangle$ существует такой элемент s, что интервалы $\langle x, s \rangle$ и $\langle a \cap x, a \cap y \rangle$, соотв. $\langle s, y \rangle$ и $\langle a \cup x, a \cup y \rangle$ взаимно транспонированы.*

Доказательство. Из модулярности структуры S следует $x \cup (a \cap y) = (x \cup a) \cap y$. Обозначим этот элемент знаком s. Из предыдущего равенства вытекает $x \leq s \leq y$. Утверждение леммы следует из уравнений

1. $x \cap (a \cap y) = a \cap x$, $\quad$ 2. $(x \cup a) \cap y = s$,
   $x \cup (a \cap y) = s$, $\quad$ $(x \cup a) \cup y = y \cup a$, (смотри черт. 3).

Лемма 6. *Пусть интервалы $\langle a, b \rangle$, $\langle c, d \rangle$ модулярной структуры транспонированы, пусть $\langle a_1, b_1 \rangle \subset \langle a, b \rangle$. Тогда существует интервал $\langle c_1, d_1 \rangle \subset \langle c, d \rangle$, который является транспонированным относительно интервала $\langle a_1, b_1 \rangle$.*

Доказательство. По предположению или $b \cap c = a$, $b \cup c = d$, или $a \cap d = c$, $a \cup d = b$. В первом случае удовлетворяет поставленным требованиям интервал $\langle a_1 \cup c, b_1 \cup c \rangle$, во втором случае интервал $\langle a_1 \cap d, b_1 \cap d \rangle$.[9])

Замечание. Математической индукцией доказывается аналогичное утверждение для проективных интервалов.

Лемма 7. *Пусть S — модулярная структура, пусть $\mathfrak{A}$ — некоторое множество интервалов структуры S. Тогда отношение $R_5(\mathfrak{A})$ есть отношение конгруэнтности на S.*

Доказательство. Достаточно предполагать, что множество $\mathfrak{A}$—непустое. Написанное отношение, очевидно, обладает свойством симметричности. Рефлексивность следует из того, что мы допускаем также интервалы, содержащие лишь один элемент. Пусть будет $\langle a, b\rangle \in \mathfrak{A}$. Тогда интервал $\langle x, x\rangle$ есть интервал, транспонированный относительно интервала $\langle a \cup x, a \cup x\rangle$, а этот в свою очередь является транспонированным относительно интервала $\langle a, a\rangle$. Итак, $\langle x, x\rangle$ есть интервал проективный с интервалом $\langle a, a\rangle \subset \subset \langle a, b\rangle$. Транзитивность рассматриваемого отношения очевидна. Осталось еще показать, что это отношение есть отношение конгруэнтности на S.

7.1. *Пусть $x \equiv y(R_5(\mathfrak{A}))$. Пусть $a \in S$. Тогда $x \cup a \equiv y \cup a(R_5(\mathfrak{A}))$.*

Доказательство. По предположению существуют элементы $c_0, c_1, c_2, \ldots, \ldots, c_n, c_0 = x, \ c_n = y$, удовлетворяющие требованиям определения 1δ. Возьмем интервал, концами которого являются c_{i-1}, c_i. Предположим, напр., что $c_{i-1} \leq c_i$. Ввиду предположения и определения 1δ существует такой интервал $J \in \mathfrak{A}$, и интервал $\langle z_i, z_i' > \subset J$, что интервалы $\langle c_{i-1}, c_i\rangle$, $\langle z_i, z_i'\rangle$ взаимно проективны.

Теперь рассмотрим интервал $\langle c_{i-1} \cup a, c_i \cup a\rangle$. По лемме 5 существует такое s_i, $c_{i-1} \leq s_i \leq c_i$, что интервалы $\langle c_{i-1} \cup a, \ c_i \cup a\rangle$, $\langle s_i, c_i\rangle$ взаимно транспонированы. Ввиду леммы 6 и следующего за ней замечания, существует интервал $\langle u_i, u_i'\rangle \subseteq \langle z_i, z_i'\rangle$ такой, что интервалы $\langle u_i, u_i'\rangle$, $\langle c_{i-1} \cup a, c_i \cup a\rangle$ взаимно проективны.

Обозначим $c_i \cup a = c_i'$, $i = 0, \ldots, n$. Элементы $c_0', \ldots, c_n'$ удовлетворяют требованиям определения 1δ относительно элементов $x \cup a$, $y \cup a$; итак, $x \cup a \equiv y \cup a(R_5(\mathfrak{A}))$. Аналогично доказывается двойственное утверждение.

7.2. *Пусть в отношении $R_5(\mathfrak{A})$ выполняется $x \equiv y$, $u \equiv v$.*

Тогда ввиду 7.1, $x \cup u \equiv y \cup u$, $y \cup u \equiv y \cup v$. Из транзитивности следует $x \cup u \equiv y \cup v$. Двойственно доказываются аналогичные уравнения для пересечения.

Замечания. 1. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — множества интервалов модулярной структуры S. Очевидно, что $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{B} \Rightarrow R_5(\mathfrak{A}) \leqq R_5(\mathfrak{B})$.

2. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество интервалов модулярной структуры S, пусть $x, y \in S$, $x \leq y$, $x \equiv y(R_5(A))$. Тогда существуют элементы $c_0, \ldots, c_n$, удовлетворяющие определению 1δ такие, что $c_i \in \langle x, y\rangle$, $(i = 1, \ldots, n)$.

[9]) Смотри [2b], гл. V, § 5, теорема 6.

Доказательство. Пусть высказанные предположения имеют место, пусть $d_0, d_1, \ldots, d_n$ — элементы, удовлетворяющие определению 1δ. Пусть напр. $d_{i-1} \leq d_i$. По лемме 5 интервал $J'_i = \langle d_{i-1} \cap y, d_i \cap y \rangle$ является проективным с некоторым интервалом, содержащимся в интервале $J_i = \langle d_{i-1}, d_i \rangle$, следовательно, также с некоторым интервалом, содержащимся в некотором интервале множества $\mathfrak{A}$.

Одинаково можно рассуждать об интервале, ограниченном элементами $(d_{i-1} \cap y) \cup x$, $(d_i \cap y) \cup x$. Обозначим $c_i = (d_i \cap y) \cup x$ $(i = 1, \ldots, n)$. Элементы c_i, очевидно, удовлетворяют указанным выше требованиям.

Лемма 8. *Пусть S — модулярная структура, пусть A — выпуклая подструктура структуры S. Тогда $R_5(A) = R_1(A)$.*

Доказательство. Из $a_1, a_2 \in A$, очевидно, следует $a_1 \equiv a_2(R_5(A))$, так что $R_1(A) \leq R_5(A)$. Примем во внимание, что из замечания [8]) следует: если интервалы $\langle a, b \rangle$, $\langle c, d \rangle$ являются проективными и если для некоторого производящего разбиения R $a \equiv b(R)$, должно быть также $c \equiv d(R)$. Пусть $x \equiv y(R_5(A))$. Пусть $c_0, c_1, \ldots, c_n$ — соответствующие элементы, выбранные по определению 1δ. Тогда для всякого интервала J_i, ограниченного элементами c_{i-1}, c_i, существует проективный интервал $J'_i \subset A$. Из этого мы получим последовательно $c_{i-1} \equiv c_i(R_1(A))$, $x \equiv y(R_1(A))$, $R_5(A) \leq R_1(A)$, $R_5(A) = R_1(A)$.

Замечание. Если S — дистрибутивная структура и A — выпуклая подструктура в S, то, ввиду лемм 3 и 8, $R_4(A) = R_5(A)$.

Следующей леммой мы не будем в дальнейших рассуждениях пользоваться, поэтому приводим ее без доказательства. Ее доказательство легко.

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{A}(\mathfrak{B})$ — множество интервалов модулярной структуры S, пусть $\overline{\mathfrak{A}}(\overline{\mathfrak{B}})$ — множество всех интервалов структуры S вида $\langle x, y \rangle$, где $x \equiv y(R_5(\mathfrak{A}))$ $(x \equiv y(R_5(\mathfrak{B})))$. Тогда*

1. $R_5(\overline{\mathfrak{A}}) = R_5(\mathfrak{A})$, 2. $R_5(\mathfrak{A}) \cap R_5(\mathfrak{B}) = R_5(\overline{\mathfrak{A}} \cap \overline{\mathfrak{B}})$,

3. $R_5(\mathfrak{A}) \cup R_5(\mathfrak{B}) = R_5(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B})$.

Замечание. Пусть A, B — идеалы в структуре S. Обозначим знаком $A \cup B$ пересечение всех идеалов структуры S, содержащих оба идеала A, B. Очевидно, $z \in A \cup B$ тогда и только тогда, если существуют такие элементы a, b, $a \in A$, $b \in B$, что выполняется $z \leq a \cup b$. (Если структура S дистрибутивна, можем писать знак равенства вместо неравенства.)

Лемма 10. *Пусть A, B — идеалы структуры S. Тогда $R_1(A \cup B) = R_1(A) \cup R_1(B)$.*

Доказательство. а) Из соотношений $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$ мы получим, ввиду замечания 2 после определения 1, $R_1(A) \leq R_1(A \cup B)$, $R_1(B) \leq R_1(A \cup B)$ следовательно, $R_1(A) \cup R_1(B) \leq R_1(A \cup B)$.

в) Пусть $u_1, u_2 \in A \cup B$. Мы докажем, что

$$u_1 \equiv u_2(R_1(A) \cup R_1(B)) . \qquad (1)$$

В силу замечания после леммы 9 существуют элементы $a_i \in A$, $b_i \in B$ ($i = 1, 2$) такие, что $u_1 \leq a_1 \cup b_1$, $u_2 \leq a_2 \cup b_2$. Из соотношений $a_1 \equiv a_2(R_1(A))$, $b_1 \equiv b_2(R_1(B))$ мы получим $a_1 \cup b_1 \equiv a_2 \cup b_1(R_1(A))$, $a_2 \cup b_1 \equiv a_2 \cup b_2(R_1(B))$, так что

$$a_1 \cup b_1 \equiv a_2 \cup b_2(R_1(A) \cup R_1(B)) . \qquad (2)$$

Обозначим $a_1 \cap b_1 \cap a_2 \cap b_2 \cap u_1 \cap u_2 = r$; очевидно, $r \in A$, $r \in B$, так что

$$a_1 \equiv r(R_1(A)) , \quad b_1 \equiv r(R_1(B)),$$

следовательно, также

$$a_1 \cup b_1 \equiv r \cup b_1(R_1(A)) , \quad r \cup b_1 \equiv r(R_1(B)) ,$$

откуда следует

$$a_1 \cup b_1 \equiv r(R_1(A) \cup R_1(B)) . \qquad (3)$$

Из соотношений 2 и 3 следует, что все элементы интервала $J = \langle r, a_1 \cup b_1 \cup a_2 \cup b_2 \rangle$ принадлежают одному классу разбиения $R_1(A) \cup R_1(B)$. Потому что $u_1, u_2 \in J$, утверждение доказано. Этим мы доказали, что имеет место

$$R_1(A \cup B) \leq R_1(A) \cup R_1(B);$$

в итоге

$$R_1(A \cup B) = R_1(A) \cup R_1(B) .$$

2. СИСТЕМА ОТНОШЕНИЙ КОНГРУЭНТНОСТИ В ДИСТРИБУТИВНЫХ СТРУКТУРАХ

Во всей следующей части будем предполагать, что структура S *дистрибутивна*. Прежде всего будем заниматься системой отношений конгруэнтности по идеалам A, B (без предположения существования наименьшего элемента в S). После этого мы будем решать проблемы, поставленные в введении, касающиеся отношений конгруэнтности по выпуклым подструктурам A, B.

Теорема 1. *Пусть S — структура, пусть A, B — идеалы в S. Система отношений конгруэнтности*

$$x \equiv u(R_1(A)) , \quad x \equiv v(R_1(B))$$

имеет решение тогда и только тогда, если $u \equiv v(R_1(A \cup B))$.

Доказательство. Предположим, что решение системы существует. В таком случае имеем $u \equiv v(R_1(A) \cup R_1(B))$, следовательно, по лемме 10 $u \equiv v(R_1(A \cup B)$.

Предположим, что $u \equiv v(R_1(A \cup B))$. Обозначим $u \cup v = r$. Из соотношения $u \equiv r(R_1(A \cup B)$ получим последовательно $u \cup a \cup b = r \cup a \cup b$

(для подходящих $a \in A$, $b \in B$), $u \cup a \equiv r \cup a(R_1(B))$ (смотри замечание 2 после леммы 4).

Согласно лемме 5, в интервале $\langle u, r\rangle$ существует такой элемент s, что интервалы $\langle u, s\rangle$ и $\langle u \cap a, r \cap a\rangle$, соотв. $\langle s, r\rangle$ и $\langle u \cup a, r \cup a\rangle$ проективные. Из этого по лемме 8 следует (потому что $\langle u \cap a, r \cap a\rangle \subset A$),

$$u \equiv s(R_1(A)) , \quad s \equiv r(R_1(B)) .$$

Подобным методом убедимся в существовании элемента $t \in \langle v, r\rangle$, для которого $v \equiv t(R_1(B))$, $t \equiv r(R_1(A))$.

Рассмотрим элемент $p = s \cup t$. Очевидно, $p \in \langle s, r\rangle$, $p \in \langle t, r\rangle$ следовательно,

$$p \equiv s(R_1(B)) , \quad p \equiv t(R_1(A)) .$$

Обозначим $x = s \cap t$. Из предыдущих отношений конгруэнтности следует

$$x \equiv s(R_1(A)) , \quad x \equiv t(R_1(B)) .$$

В целом мы получим

$$x \equiv u(R_1(A)) , \quad x \equiv v(R_1(B)) ,$$

ч. т. д.

Лемма 11. *Пусть A, B — идеалы в структуре S. Тогда*

$$R_1(A \cap B) = R_1(A) \cap R_1(B) .$$

Доказательство. а) Пусть $x \equiv y(R_1(A \cap B))$. Тогда, согласно замечанию 2 после леммы 4, существует $c \in A \cap B$, для которого $x \cup c = y \cup c$. Из этого следует, что элементы x, y — конгруэнтные в обоих разбиениях $R_1(A), R_1(B)$.

в) Пусть $x \equiv y(R_1(A) \cap R_1(B))$. В таком случае существуют элементы $a \in A$, $b \in B$, для которых $x \cup a = y \cup a$, $x \cup b = y \cup b$. Образуем пересечение левых и правых сторон: $x \cup (a \cap b) = y \cup (a \cap b)$. Потому что $a \cap b \in A \cap B$, то будет $x \equiv y(R_1(A \cap B))$.

Следствие. Мы будем пользоваться тем же обозначением, как и в теореме 1. Из предыдущей леммы вытекает непосредственно: Если x есть решение рассматриваемых отношений конгруэнтности и если $x \equiv y \, . \, (R_1(A \cap B))$, то y будет также решением. Между всякими двумя решениями должно иметь место указанное соотношение.

В дальнейшем будем разбирать более общий случай, когда A, B—выпуклые подструктуры в S. В целях краткости выражений будем пользоваться обозначениями Ba, Ba(u, v), Ba(A, B), введенными в введении. Прежде всего напомним определение дополнительных разбиений множества:

Определение 2. *Пусть R_1, R_2—разбиения множества S. Мы говорим, что разбиения R_1, R_2 дополнительны, если для любых $u, v \in S$, для которых существует элемент $x \in S$, удовлетворяющий соотношениям $x \equiv u(R_1)$, $x \equiv v(R_2)$, существует также элемент $y \in S$, для которого*

$$y \equiv u(R_2) , \quad y \equiv v(R_1) .$$

Лемма 12. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы разбиения R_1, R_2 множества S были дополнительны, следующее: для любых элементов u, $v \in S$ из соотношения $u \equiv v(R_1 \cup R_2)$ вытекает существование элемента x, который удовлетворяет системе отношений конгруэнтности $x \equiv u(R_1)$, $x \equiv v(R_2)$.*

Доказательство очевидно.[10])

Следствия. 1. Утверждение теоремы 1 равносильно утверждению: пусть A, B — идеалы в структуре S. Тогда разбиения $R_1(A)$, $R_1(B)$ дополнительны.

2. Утверждение Ba равносильно утверждению: пусть A, B — любые выпуклые подструктуры в S. Тогда разбиения $R_1(A)$, $R_1(B)$ дополнительны.

Лемма 13. *Пусть S — структура, пусть для любых выпуклых $A, B \subset S$ разбиения $R_1(A)$, $R_1(B)$ дополнительны.* Тогда *S является структурой с относительными дополнениями.*

Доказательство. Пусть выполнены предположения леммы, пусть $x \leq z \leq y$. Обозначим $\langle x, z\rangle = A$, $\langle z, y\rangle = B$.
Тогда

$$x \equiv z'(R_1(B)), \quad z' \equiv y(R_1(A)). \tag{1}$$

Из первого отношения конгруэнтности (1) следует последовательно

$$x \equiv z' \cup x\ (R_1(B)), \quad x \equiv (z' \cup x) \cap y\ (R_1(B)).$$

Аналогично доказывается $y \equiv (z' \cup x) \cap y\ (R_1(A))$.

Обозначим $z'' = (z' \cup x) \cap y = (z' \cap y) \cup x$. Очевидно, $z'' \in \langle x, y\rangle$. Из соотношения $x \equiv z''(R_1(B))$ получим $x = z \cap x \equiv z \cap z''\ (R_1(B))$. Но для всякого элемента b в структуре B справедливо $x \leq b$, $z \cap z' \leq b$. Тогда, согласно замечанию 2 после леммы 1 и согласно лемме 3,[11]) должно быть $x = z \cap z''$.

Двойственно доказывается $y = z \cup z''$. Следовательно, элемент z'' есть относительное дополнение элемента z относительно интервала $\langle x, y\rangle$.

Лемма 14. *Пусть S — структура с относительными дополнениями (которая не должна быть необходимо дистрибутивна). Тогда любые производящие разбиения R_1, R_2 на S дополнительны.*

Доказательство. Пусть $x \equiv z(R_1)$, $z \equiv y(R_2)$. Обозначим

$$x \cup z = u, \quad y \cup z = v, \quad u \cup v = s.$$

Тогда выполняется

$$x \equiv z \equiv u(R_1), \quad y \equiv z \equiv v(R_2) \tag{1}$$

и также

$$\begin{aligned} u = z \cup u \equiv v \cup u = s(R_2) \\ v = z \cup v \equiv u \cup v = s(R_1) \end{aligned} \tag{2}$$

---

10) Подробное доказательство проведено в работе [3], стр. 19.
11) Только здесь мы пользуемся дистрибутивностью структуры.

Пусть $t(w)$ — относительное дополнение элемента $u(v)$ в интервале $\langle x, s \rangle$ ($\langle y, s \rangle$). Из первого отношения конгруэнтности (1) соответственно (2), вытекает

$$t \equiv s(R_1) \, , \quad x \equiv t(R_2) \, . \tag{3}$$

Подобным же образом мы получим из второго отношения конгруэнтности (1) соотв. (2),

$$w \equiv s(R_2) \, , \quad y \equiv w(R_1) \, . \tag{4}$$

Обозначим $t \cap w = z'$. Из первого отношения конгруэнтности (3), соотв. (4), следует

$$\begin{aligned} z' &= w \cap t \equiv w \cap s = w(R_1) \, , \\ z' &= w \cap t \equiv s \cap t = t(R_2) \, . \end{aligned} \tag{5}$$

Из соотношений (3) и (5) получим $x \equiv t \equiv z'(R_2)$, а из (5) и (4) $z' \equiv w \equiv$ $\equiv y(R_1)$. Отсюда следует утверждение леммы.

Теорема 2. *Необходимое и достаточное условие для того, чтобы структура S удовлетворяла условию* Ba, *следующее: она является структурой с относительными дополнениями.*

Доказательство следует из лемм 12, 13, 14.

Замечание. Мы могли бы сформулировать теорему 2 также следующим способом: необходимое и достаточное условие для того, чтобы для любых выпуклых подструктур $A, B \subset S$ разложения $R_1(A)$, $R_1(B)$ были дополнительны, следующее: S есть структура с относительными дополнениями.

Теорема 3. *Пусть u, $v \in S$. Необходимое и достаточное условие для справедливости* Ba(u, v) *следующее: структура $\langle u \cap v, u \cup v \rangle$ есть структура с дополнениями.*

Доказательство. 1. Пусть $S_1 = \langle u \cap v, u \cup v \rangle$ — структура с дополнениями. Тогда S_1 есть Булева алгебра, т. е. структура S_1 является одновременно структурой с относительными дополнениями.

Справедливость Ba(u, v) следует тогда из теоремы 2, приложенной к структуре S_1.

2. Пусть имеет место Ba(u, v). Обозначим $u \cap v = x$, $u \cup v = y$. Пусть $z \in \langle x, y \rangle$. Обозначим далее $\langle x, z \rangle = A$, $\langle z, y \rangle = B$. Существование относительного дополнения элемента z относительно интервала $\langle x, y \rangle$ докажется таким же путем, как и в лемме 13.

Для исследования утверждения Ba(A, B) нам нужно несколько простых вспомогательных лемм и определений.

Лемма 14.1. *Пусть R_1, R_2 — разбиения на структуре S, пусть $u \equiv x(R_1)$, $x \equiv v(R_2)$. Тогда существует элемент $z \in S$, удовлетворяющий соотношениям*

$$u \equiv z(R_1)\,, \quad z \equiv v(R_2)\,, \quad z \in \langle u \cap v,\, u \cup v \rangle$$

(*специально, если* $u \leq v$, *то* $u \leq z \leq v$).

Доказательство. По предположению $u \equiv x(R_1)$, $x \equiv v(R_2)$. Обозначим $x \cap (u \cup v) = x$. Из предыдущих отношений конгруэнтности (простроив пересечение с элементом $u \cup v$) получим

$$u \equiv x_1(R_1)\,, \quad x_1 \equiv v(R_2)\,, \quad x_1 \leq u \cup v\,.$$

Обозначим далее $x_1 \cup (u \cap v) = z$. Элемент z, очевидно, удовлетворяет условиям, высказанным в лемме.

Лемма 14.2. *Пусть условие дополнимости разбиений R_1, R_2 на структуре S (смотри определение 2) выполнено для любой пары сравнимых элементов u, v. Тогда разбиения R_1, R_2 дополнительны.*

Доказательство проводится аналогично, как в лемме 14.

Пусть $x \equiv z(R_1)$, $z \equiv y(R_2)$. Обозначим $x \cup z = u$, $y \cup z = v$, $u \cup v = s$. Очевидно, что $x \equiv u \equiv z(R_1)$, $z \equiv v \equiv y(R_2)$.

$$s = u \cup v \equiv z \cup v = v(R_1)\,, \quad s = u \cup v \equiv u \cup z = u(R_2).$$

Из соотношений $x \equiv u(R_1)$, $u \equiv s(R_2)$, $x \leq s$ и из предположения леммы вытекает, что существует элемент t, для которого

$$x \equiv t(R_2)\,, \quad t \equiv s(R_1)\,.$$

Ввиду леммы 14,1 можем предполагать $t \in \langle x, s \rangle$. Аналогично из соотношений $y \equiv v(R_2)$, $v \equiv s(R_1)$ следует существование элемента w, удовлетворяющего условиям $y \equiv w(R_1)$, $w \equiv s(R_2)$, $w \in \langle y, s \rangle$. Обозначим $t \cap w = z'$. Из выведенных соотношений получим

$$t = t \cap s \equiv t \cap w = z'(R_2)\,,$$

$$w = w \cap s \equiv w \cap t = z'(R_1)\,,$$

так что $x \equiv z'(R_2)$, $z' \equiv y(R_1)$, ч. т. д.

Замечание. В дальнейшем будем предполагать известными основные понятия, касающиеся прямых произведений структур (смотри напр. [2], стр. 25 и 48)[12]), равно как и соответствующих обозначений. Так мы будем пользоваться без сколько-нибудь обширного объяснения обозначениями, как напр. $S \simeq A \times B$ (читаем: структура S изоморфна прямому произведению $A \times B$),

$$z \in S\,, \quad z \longleftrightarrow (a, b)\,, \quad (a, b) \in A \times B$$

и тому подобное.

Определение 3. *Пусть A, B — подструктуры структуры S. Скажем, что S есть прямое произведение своих подструктур A, B, если существует*

[12]) Номера страниц (также в следующих цитатах) касаются работы [2b].

изоморфное преобразование структуры S на прямое произведение $A \times B$, имеющее следующее свойство: существует элемент $x_0 \in A \cap B$[13]) *такой, что в рассматриваемом изоморфизме для всякого элемента $a \in A$ соотв. $b \in B$, $a \longleftrightarrow (a, x_0)$ соотв. $b \longleftrightarrow (x_0, b)$.*

Замечание. Легко доказывается, что при выполнении предположений, приведенных в предыдущем определении, множество $A \cap B$ содержит лишь один элемент, а именно x_0 (одновременно $x_0 \longleftrightarrow (x_0, x_0)$).

Лемма 14.3. *Пусть $S = A \times B$, $(a_i, b_k) \in S$ $(i, k = 1, 2)$, пусть $a_1 \leq a_2$. Тогда интервалы*

$$J_1 = \langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle , \quad J_2 = \langle (a_1, b_2), (a_2, b_2) \rangle$$

проективны в S.

Доказательство. Обозначим $J_3 = \langle (a_1, b_1 \cup b_2), (a_2, b_1 \cup b_2) \rangle$. Вычислением легко проверится, что интервалы J_1,J_3—взаимно транспонированные; таким же путем докажется, что интервалы J_3, J_2 являются транспонированными. Следовательно, J_1, J_2 проективны.

Определение 4. *Пусть A, B — подмножества в структуре S. Пересечение всех выпуклых подструктур, содержащих оба множества A, B, обозначим через (A, B).*

Замечание. При нахождении условий справедливости Ba(A, B) будем предполагать, что $R_1(A) \cap R_1(B) = 0$.

Ввиду рассуждений, находящихся в первой части, это предположение равносильно тому требованию, чтобы никакой интервал структуры A не был проективным ни с каким интервалом структуры B.

Если бы это предположение не было выполнено, то достаточно было бы в дальнейших рассуждениях рассматривать структуру классов разбиения $R_1(A) \cap R_1(B)$ на S вместо структуры S.

Теорема 4. *Пусть A, B — выпуклые подструктуры в S, пусть $R_1(A) \cap \cap R_1(B) = 0$. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы* Ba(A, B) *имело место, следующее:*

Если $A_1'(B_1')$ — интервал, проективный какому-нибудь интервалу $A_1 \subset \subset A(B_1 \subset B)$, и если $A_1' \cap B_1' \neq 0$, то структура (A_1', B_1') есть прямое произведение своих подструктур A_1', B_1'.

Доказательство. а) Пусть выполнено условие Ba(A, B). Ввиду леммы 12, разбиения $R_1(A)$, $R_1(B)$ дополнительны. Пусть выпуклые подструктуры A_1', B_1' удовлетворяют предположениям, высказанным в лемме.

Пусть $x_0 \in A_1' \cap B_1'$. Обозначим $(A_1', B_1') = C$. Очевидно, всякий элемент структуры C можно образовать из конечного числа элементов $a_i \in A$ и конечного числа элементов $b_i \in B$ при помощи структурын операций пересечения и объединения. Так мы можем писать символически для $z \in C$

$$z = f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) .$$

[13]) в смысле множественной операции.

Но, очевидно,

$$a_i \equiv x_0(R_1(A)) , \quad (i = 1, \ldots, n) ;$$
$$b_i \equiv x_0(R_1(B)) , \quad (i = 1, \ldots, m) ;$$

итак,

$$z = f(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m) \equiv f(x_0, x_0, \ldots, x_0, b_1, b_2, \ldots, b_m) (R_1(A)) ,$$
$$f(x_0, x_0, \ldots, x_0, b_1, b_2, \ldots, b_m) \equiv f(x_0, x_0, \ldots, x_0, x_0, x_0, \ldots, x_0) = x_0(R_1(B)),$$

т. е.

$$z \equiv x_0 (R_1(A)) \cup R_1(B)) . \tag{1}$$

Разбиение множества C, порожденное разбиением $R_1(A)$, соотв. $R_1(B)$ на S, мы будем обозначать также через $R_1(A)$ соотв. $R_1(B)$ с прибавлением слов „на множестве C''.

Ввиду сверху приведенных предположений и соотношения (1) на множестве C справедливы утверждения

1. $R_1(A) \cap R_1(B) = 0$, $R_1(A) \cup R_1(B) = J$.

2. Разбиения $R_1(A)$, $R_1(B)$ дополнительны. Далее очевидно, что структура классов разбиения $R_1(A)$ соотв. $R_1(B)$ на множестве C изоморфна структуре B соотв. A. Воспользовавшись леммой из работы [2], стр. 130, получим $C \simeq A \times B$.

При этом, ввиду построения изоморфизма в цитированной теореме, очевидно, для всякого $a \in A_1'$, $b \in B_1'$

$$a \longleftrightarrow (a, x_0) , \quad b \longleftrightarrow (x_0, b) ,$$

так что C является прямым произведением своих подструктур A_1', B_1'.

б) Докажем, что условие, высказанное в теореме 4, достаточное для того, чтобы Ва(А, В) имело место (т. е. достаточное для того, чтобы разбиения $R_1(A)$, $R_1(B)$ были дополнительными).

Ввиду леммы 14,1, достаточно разбирать случай $u \leq v$.

Предположим, что условие, высказанное в теореме 4, выполнено. Пусть

$$u \leq v, \ u \equiv z(R_1(A)) , \quad z \equiv v(R_1(B)) .$$

Согласно лемме 14,1, можем предполагать $u \leq z \leq v$. Согласно замечанию 2 после леммы 7, существуют элементы $u_0, u_1, \ldots, u_n$ ($u_0 = u$, $u_n = z$) такие, что $u_i \in \langle u, z \rangle$ ($i = 1, \ldots, n$), а интервал, ограниченный элементами u_{i-1}, u_i ($i = 1, \ldots, n$), проективный определенному интервалу, содержащемуся в A. Аналогично доказывается существование соответствующих элементов $z_0, z_1, \ldots, z_n$ ($z_0 = z$, $z_n = v$) с подобными свойствами относительно разбиения $R_1(B)$.

б1. Докажем утверждение теоремы прежде всего для случая $n = 1$, $m = 1$. Обозначим $A_1' = \langle u, z \rangle$, $B_1' = \langle z, v \rangle$. Согласно предположению, структура (A_1', B_1') есть прямое произведение своих подструктур A_1', B_1'. Ввиду определения 3, при этом

$$u \longleftrightarrow (u, z), z \longleftrightarrow (z, z) , \quad v \longleftrightarrow (z, v) .$$

Возьмем элемент $z' \in (A_1', B_1')$, для которого $z' \longleftrightarrow (u, v)$. Из заданного изоморфизма структур (A_1', B_1'), $A_1' \times B_1'$ и из леммы 14,3 вытекает, что интервалы

$$\langle u, z\rangle \quad \text{и} \quad \langle z', v\rangle$$

соответственно

$$\langle z, v\rangle \quad \text{и} \quad \langle u, z'\rangle$$

проективны в (A_1', A_2'), следовательно, также в S. Значит

$$u \equiv z'(R_1(B)) \ , \quad z' \equiv v(R_1(A)) \ ,$$

ч. т. д.

б2. Если по крайней мере одно из чисел n, m больше 1, утверждение леммы доказывается (двойной) математической индукцией относительно чисел n, m. Метод очевиден.

Если предполагать, что подструктуры A, B не дизъюнктные, то мы в состоянии формально ослабить предположения предыдущей теоремы.

Теорема 5. *Пусть A, B — выпуклые подструктуры в S, пусть A, B — не дизъюнктны, пусть $R_1(A) \cap R_1(B) = 0$. Тогда необходимое и достаточное условие для того, чтобы* Ba(A, B) *имело место, следующее: структура (A, B) является прямым произведением своих подструктур A, B.*

Доказательство. а) Необходимость приведенного условия доказывается таким же путем, как и в теореме 4.

б) Пусть (A, B) прямое произведение своих подструктур A, B. Мы докажем, что разбиения $R_1(A)$, $R_1(B)$ дополнительны. Пусть

$$u \equiv z(R_1(A)) \ , \quad z \equiv v(R_1(B)) \ .$$

Также, как и в доказательстве теоремы 4, будем предполагать, что $u \leq z \leq v$ и что интервал $\langle u, z\rangle$ $[\langle z, v\rangle]$ является проективным с определенным интервалом

$$\langle a_1, a_2\rangle \subset A[\langle b_1, b_2\rangle \subset B]$$

(дополнение доказательства для более общего случая очевидно).

Ввиду предположения, существует элемент $x_0 \in A \cap B$ такой, что в рассматриваемом изоморфизме структур (A, B), $A \times B$ выполняется

$$a_i \longleftrightarrow (a_i, x_0) \ , \quad b_i \longleftrightarrow (x_0, b_i) \ , \quad (i = 1, 2) \ .$$

Возьмем элементы

$$u_1 \longleftrightarrow (a_1, b_1) \ , \quad z_1 \longleftrightarrow (a_2, b_1) \ , \quad z_1' \longleftrightarrow (a_1, b_2) \ , \quad v_1 \longleftrightarrow (a_2, b_2) \ .$$

Из леммы 14,3 и данного изоморфизма следует, что интервалы

$$\langle u, z\rangle \quad \text{и} \quad \langle u_1, z_1\rangle \ , \quad \text{соотв.} \quad \langle z, v\rangle \quad \text{и} \quad \langle z_1, v_1\rangle$$

проективны. Интервалы $\langle u_1, z_1\rangle$ и $\langle z_1', v_1\rangle$ соответственно $\langle z_1, v_1\rangle$ и $\langle u_1, z_1'\rangle$ очевидно, транспонированы. Из соотношений (1) тогда получается

$$u_1 \equiv z_1(R_1(A)) , \quad z_1 \equiv v_1(R_1(B)) ,$$
$$z_1' \equiv v_1(R_1(A)) , \quad u_1 \equiv z_1'(R_1(B)) . \tag{2}$$

Из того, что интервалы $\langle u, z\rangle$, $\langle u_1, z_1\rangle$ проективны, вытекает[14]) существование элементов p, q, для которых

$$u = (u_1 \cup p) \cap q, \qquad z = (z_1 \cup p) \cap q .$$

Из второго уравнения следует $z \leqq q$. Построим в обоих уравнениях пересечение с элементом z; получим

$$u = (u_1 \cup p) \cap z , \quad z = (z_1 \cup p) \cap z ,$$
$$u = (u_1 \cap z) \cup (p \cap z) , \quad z = (z_1 \cap z) \cup (p \cap z) .$$

Из последних уравнений следует $u \geqq p \cap z$. Построим в обоих уравнениях объединение с элементом u:

$$u = (u_1 \cap z) \cup u, \quad z = (z_1 \cap z) \cup u . \tag{3}$$

Потому что интервалы $\langle z, v\rangle$, $\langle z_1, v_1\rangle$ проективны, докажутся таким же путем следующие уравнения:

$$z = (z_1 \cap v) \cup z , \quad v = (v_1 \cap v) \cup z . \tag{4}$$

Обозначим $z' = (z_1' \cap v) \cup u$.

Имеет место [согласно (3), (1) и (2)]

$$u = (u_1 \cap z) \cup u \equiv (u_1 \cap v) \cup u \equiv (z_1' \cap v) \cup u = z', \ (R_1(B))$$

и, согласно (2), (1) и (4),

$$z' = (z_1' \cap v) \cup u \equiv (v_1 \cap v) \cup z = v \ (R_1(A)) .$$

Таким образом, теорема полностью доказана.

3. СИСТЕМА ОТНОШЕНИЙ КОНГРУЭНТНОСТИ НА МОДУЛЯРНЫХ СТРУКТУРАХ

Всюду в дальнейшем будет S означать модулярную структуру.

Определение 5. *Скажем, что интервал J структуры S типа α, если существует подструктура $S_1 \subset S$, изоморфная смруктуре на черт. 2 и такая, что интервал J проективный какому-нибудь интервалу J', содержащемуся в подструктуре $\overline{S}_1$, которая возникает дополнением подструктуры S_1 на выпуклую подструктуру. Знаком C будем всюду в дальнейшем обозначать множество всех интервалов типа α в структуре S. Структуру классов разбиения $R_5(C)$ обозначим через S'.*

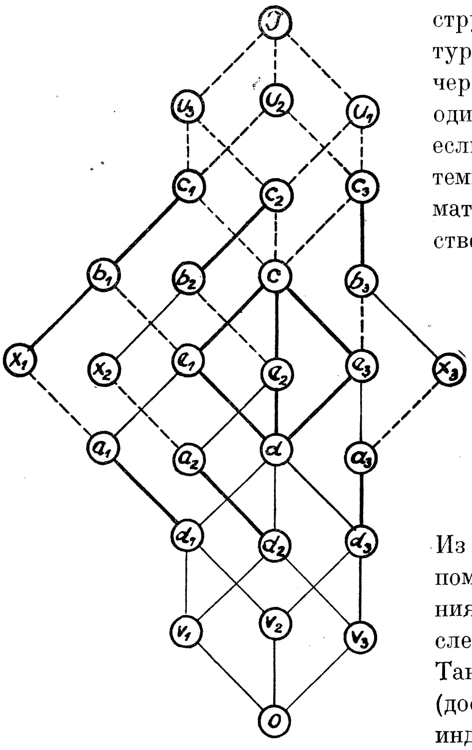
Лемма 15. *S' является дистрибутивной структурой.*

Доказательство. Очевидно, структура S' модулярна, так что достаточ-

[14]) Смотри [2], стр. 214, упражнение 4а.

но доказать, что S' не заключает в себе подструктуру, изоморфную структуре на черт. 2. Допустим, что S' заключает в себе такую подструктуру; ее элементы обозначим согласно черт. 2 через $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_5$.

Выберем из каждого класса $\overline{x}_i$ любый элемент x_i ($i = 1, 2, 3$). Рассмотрим подструктуру $S_0 \subset S$, образованную элементами x_1, x_2, x_3. Чтобы избежать обширных обяснений, воспользуемся следующим результатом Г. Биркгофа:[15]) Свободная модулярная структура с тремя образующими x_1, x_2, x_3 имеет диаграмму, изображенную на черт. 4. Таким образом структура S_0 является гомоморфным изображением структуры S_1 на черт. 4. Элементы структуры S_0 обозначаем одинаково, как на черт. 4 (разными буквами будет обозначен один определенный элемент структуры S_0, если элементы структуры S_1, обозначенные теми же буквами, изображаются при рассматриваемом гомоморфизме в один единственный элемент структуры S_0).



Черт. 4.

Ввиду определения 5, $c \equiv d$[16]) (1). Далее, согласно предположению,

$$\overline{x}_1 \cup \overline{x}_2 = \overline{x}_1 \cup \overline{x}_3 = \overline{x}_2 \cup \overline{x}_3$$

и двойственно, так что

$$u_1 \equiv u_2 \equiv u_3\,, \tag{2}$$

$$v_1 \equiv v_2 \equiv v_3\,. \tag{3}$$

Из соотношения (3) получим $d_1 \equiv d$, а при помощи проективности $x_1 \equiv b_1$; из отношения (1) вытекает $e_1 \equiv c$, $b_1 \equiv c_1$; из (2) следует $c_1 \equiv c$. В итоге получим $x_1 \equiv c$. Таким же путем докажется, что $x_2 \equiv c$ (достаточно вместо индекса 1 всюду писать индекс 2). Таким образом получим соотношение $x_1 \equiv x_2$, что противоречит предположению.

Лемма 16. *Пусть R — производящее разбиение на структуре S, пусть структура классов разбиения R дистрибутивна. Тогда $R_5(C) \leqq R$.*

Доказательство. Обозначим знаком $\tilde{x}$ класс разбиения R, содержащий элемент x. Пусть диаграмма структуры $S_0 \subset S$ изоморфна структуре на

[15]) [2], стр. 107.

[16]) Мы рассматриваем все отношения конгруэнтности относительно разбиения $R_5(C)$. Интервалы на черт. 4, которые анулируются вследствие соотношения 1 соотв. 2 соотв. 3 — обведены полно соотв. слабо соотв. пунктиром.

черт. 2. Тогда $\tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 \cap \tilde{x}_3$, $\tilde{x}_1 \cup \tilde{x}_2 = \tilde{x}_1 \cup \tilde{x}_3$. Потому что структура классов разбиения R дистрибутивна, следует из предыдущих уравнений равенство $\tilde{x}_2 = \tilde{x}_3$, так что (как легко доказывается) $\tilde{x}_4 = \tilde{x}_5$. Из этого вытекает дальше, что все интервалы типа α анулируются в разбиении R; следовательно, $R_5(C) \leqq R$.

Лемма 17. *Пусть интервалы $\langle x, y\rangle$, $\langle r, s\rangle$ проективны в структуре S, пусть R — производящее разбиение на S. Структуру классов разбиения R обозначим через S'. Тогда интервалы $\langle \bar{x}, \bar{y}\rangle$, $\langle \bar{r}, \bar{s}\rangle$ суть проективные интервалы в S'.*

Доказательство. Утверждение представляет прямое следствие гомоморфизма $S \to S'$.

Лемма 18. *Оставим обозначение из определения 5. Пусть A идеал в S. Введем в структуре S' отношение R следующим образом: $\bar{x} \equiv \bar{y}(R)$ тогда и только тогда, если существуют элементы $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in S'$, $\bar{x}_0 = \bar{x}$, $\bar{x}_n = \bar{y}$ такие, что для подходящим способом выбранных элементов*

$$x_i^1 \in \bar{x}_i\,, \quad x_i^2 \in \bar{x}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

выполняется

$$x_{i-1}^2 \equiv x_i^1\,(R_1(A)) \quad (i = 1, \ldots, n)\,. \tag{1}$$

Тогда R есть производящее разбиение в S'.

Доказательство. Рефлексивность, симметричность и транзитивность отношения R очевидна, так что R есть разбиение в S'. Пусть $\bar{z} \in S'$, $z \in \bar{z}$. Построим элементы

$$\bar{x}_i' = \bar{x}_i \cup \bar{z}\,, \quad x_i^{1'} = x_i^1 \cup z\,, \quad x_i^{2'} = x_i^2 \cup z\,.$$

Очевидно, $x_i^{1'}, x_i^{2'} \in \bar{x}_i'$. Из соотношения (1) следует $x_i^{2'} \equiv x_i^{1'}\,(R_1(A))$, так что $\bar{x} \cup \bar{z} \equiv \bar{y} \cup \bar{z}(R)$. Аналогично доказывается двойственное утверждение. Таким образом доказано, что R является производящим разбиением в S'.

Лемма 19. *Сохраним введенное выше обозначение. Пусть $\bar{A}$ — совокупность тех элементов $\bar{x} \in S$, для которых существует $x \in \bar{x}$, $x \in A$. Тогда*

1. $\bar{A}$ есть *идеал в S'*, 2. $R = R_1(\bar{A})$.

Доказательство. 1. $\bar{A}$ есть образ множества A в гомоморфизме $S \to S'$. Значит, $\bar{A}$ есть идеал в S'.

2а) Пусть $\bar{x}_1 \in \bar{A}$, $\bar{x}_2 \in \bar{A}$. Согласно предположению, существуют элементы $x_i \in \bar{x}_i$, $x_i \in A$ $(i = 1, 2)$. Очевидно, выполняется $x_1 \equiv x_2\,(R_1(A))$, так что, согласно определению разбиения R, $\bar{x}_1 \equiv \bar{x}_2(R)$. Согласно определению 1α, в таком случае выполняется $R_1(\bar{A}) \leqq R$.

2б) Пусть $\bar{x} \equiv \bar{y}(R)$. Сохраним обозначение из леммы 18. Возьмем элементы $\bar{x}_{i-1}$, $\bar{x}_i$. Обозначим $x_{i-1}^2 = r$, $x_i^1 = s$. Очевидно, $r \equiv s(R_1(A))$. Согласно лемме 8 и определению 1δ), существуют элементы

$$r_0, r_1, \ldots, r_n, \quad r_0 = r\,, \quad r_n = s$$

такие, что r_{k-1}, r_k сравнимые элементы и соответствующий интервал — проективен некоторому интервалу $\langle a_{i-1}, a_i \rangle$ идеала A. Но тогда в структуре S' элементы $\bar{r}_{i-1}$, $\bar{r}_i$ — сравнимые, ограниченный ими интервал, согласно лемме 17, проективен интервалу $\langle \bar{a}_{i-1}, \bar{a}_i \rangle \subset \bar{A}$. По определению 1$\delta$) и по лемме 8

$$\bar{r} \equiv \bar{s}\,(R_1(\bar{A}))\,, \quad \text{т. е.} \quad \bar{x}_{i-1} \equiv \bar{x}_i\,(R_1(\bar{A})) \quad (i = 1, \ldots, n)\,.$$

Из этого вытекает $\bar{x} \equiv \bar{y}\,(R_1(\bar{A}))$, чем мы доказали $R \leqq R_1(\bar{A})$, а в целом $R = R_1(\bar{A})$.

Почти очевидна

Лемма 20. *Пусть A, B — идеалы в S, $A \cup B = P$.*[17] *Пусть $\bar{A}, \bar{B}, \bar{P}$ имеют то же значение, как и в лемме* **19**. *Тогда $\bar{P} = \bar{A} \cup \bar{B}$.*

Доказательство проводится простым приемом на основе свойств гомоморфизма $S \to S'$.

Лемма 21. *Пусть $\bar{x} \equiv \bar{y}(R_1(\bar{A}))$. Тогда для всякого $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$ выполняется*

$$x \equiv y\,(R_1(A) \cup R_5(C))\,.$$

Доказательство. Согласно лемме 19, $R_1(\bar{A}) = R$. Воспользуемся обозначением из леммы 18. Имеет место $x_{i-1}^2 \equiv x_i^1\,(R_1(A))$, $x_i^1 \equiv x_i^2\,(R_5(C))$, $(i = 1, \ldots, n)$. Для всякого $x \in \bar{x}$, $y \in \bar{y}$

$$x \equiv x_0^2\,(R_5(C))\,, \quad x_n^1 \equiv y\,(R_5(C))\,.$$

Из этого следует утверждение нашей леммы.

Теорема 6. *Пусть S — модулярная структура, пусть A, B — идеалы в S, пусть $u \equiv v(R_1(A \cup B))$. Тогда существует элемент x, удовлетворяющий соотношениям*

$$x \equiv u(R_1(A) \cup R_5(C))\,, \quad x \equiv v(R_1(B) \cup R_5(C))\,.$$

Доказательство. Пусть $u \equiv v(R_1(A \cup B))$. Обозначим $A \cup B = P$. Из соотношения $u \equiv v(R_1(P))$ следует, согласно лемме 18 и 19, $\bar{u} \equiv \bar{v}\,(R_1(\bar{P}))$, и согласно лемме 20, $\bar{u} \equiv \bar{v}\,(R_1(\bar{A} \cup \bar{B})$. Потому что S' — дистрибутивная структура, можем применить теорему 1: существует элемент $\bar{x} \in S'$, удовлетворяющий условиям $\bar{x} \equiv \bar{u}\,(R_1(\bar{A}))$, $\bar{x} \equiv \bar{v}\,(R_1(\bar{B}))$. Доказательство окончивается применением леммы 21.

Утверждение теоремы 6 можно усилить при помощи следующего соображения: Пусть выполнены предположения теоремы 6. Тогда, согласно ей, существует элемент x, для которого

$$x \equiv u\,(R_1(A) \cup R_5(C))\,.$$

Ввиду написанного разбиения (если на обеих сторонах отношения конгруэнтности построить пересечение с элементом $u \cup v$ и обозначить $x \cap (u \cup v) = y$), $y \equiv u$, $y \leqq u \cup v$.

[17]) Смотри замечание за леммой 9.

Дальше построим объединение с элементом $u \cap v$ и обозначим $y \cup (u \cap v) = z$; получим

$$z \equiv u, \quad z \in \langle u \cap v, u \cup v \rangle . \tag{1}$$

Потому что $u \cap v \equiv u \cup v \, (R_1(A \cup B))$, следует из последнего соотношения $z \equiv u(R_1(A \cup B))$ (2). Аналогично доказывается $z \equiv v \, (R_1(A \cup B))$. Из соотношения (1) и приложением леммы 10 к (2) получим

$$z \equiv u(R_1(A) \cup R_5(C)) , \quad z \equiv u(R_1(A) \cup R_1(B)) . \tag{2}$$

Если образуем пересечение рассматренных разбиений (структура производящих разложений дистрибутивна), то получим

$$z \equiv u(R_1(A) \cup [R_1(B) \cap R_5(C)] . \tag{3}$$

Таким же путем докажется, что

$$z \equiv v(R_1(B) \cup [R_1(A) \cap R_5(C))] . \tag{3'}$$

Таким образом, мы доказали справедливость следующей теоремы:

Теорема 7. *Пусть A, B — идеалы модулярной структуры S, пусть $u \equiv v(R_1(A \cup B))$. Тогда существует элемент z, удовлетворяющий соотношениям* (3), (3').

В дальнейших рассуждениях считаем выполнеными предположения теоремы 7. Тогда получаются из этой теоремы следующие следствия:

Следствие 1. Пусть ко всякому интервалу J типа α идеала A соотв. B, к которому существует проективный интервал $J' \subset \langle u \cap v, \; u \cup v \rangle$, существует также проективный интервал в идеале B соотв. A. Тогда существует элемент z, удовлетворяющий соотношениям

$$z \equiv u(R_1(A)) , \quad z \equiv v(R_1(B)) . \tag{4}$$

Доказательство. Пусть z — элемент, удовлетворяющий отношениям конгруэнтности (3), (3'). Из отношения конгруэнтности (3) вытекает, что существуют элементы $u_0, u_1, \ldots, u_n, u_0 = z, u_n = u$ такие, что для $i = 1, \ldots, n$ либо

$$u_{i-1} \equiv u_i(R_1(A)) \tag{5}$$

либо

$$u_{i-1} \equiv u_i(R_1(B)) \cap R_5(C)) . \tag{6}$$

Если бы для $i = 1, \ldots, n$ имело место отношение конгруэнтности (5), мы получили бы, очевидно, первое соотношение (4). Пусть для некоторого i имеет место отношение конгруэнтности (6). Тогда (согласно определению 1 и определению множества C) существуют элементы $c_0, \ldots, c_m$, $c_0 = u_{i-1}$, $c_m = u_i$ такие, что элементы c_{k-1}, c_k ($k = 1, \ldots, m$) сравнимы а соответствующий интервал J_k будет типа α. Ввиду замечания 2 после леммы 7, можем предполагать, что элементы c_k ($k = 1, \ldots, m$) лежат в интервале $\langle u_{i-1} \cap u_i$, $u_{i-1} \cup u_i \rangle$. Итак, выполняется $c_{k-1} \equiv c_k(R_1(B))$ так, что согласно лемме 8, $c_{k-1} \equiv c_k(R_5(B))$.

Из этого следует, что существуют элементы $b_0^k, b_1^k, \ldots, b_s^k$, $b_0^k = c_{k-1}$, $b_s^k = c_k$, $b_l^k \subset J_k$ $(l = 1, \ldots, s)$ такие, что элементы b_{l-1}^k, b_l^k сравнимы, а соответствующий интервал J_l^k проективен интервалу идеала B. Одновременно $J_l^k \subset J_k$, значит J_l^k представляет собой также интервал типа α.

Из этого, ввиду предположений следствия 1, следует, что J_l^k проективен некоторому интервалу идеала A. Отсюда получаем последовательно

$$\begin{aligned} b_{l-1}^k &\equiv b_l^k(R_5(A)) \quad (l = 1, \ldots s)\,, \\ c_{k-1} &\equiv c_k(R_5(A)) \quad (k = 1, \ldots, n)\,, \\ u_{i-1} &\equiv u_i(R_5(A))\,, \\ u_{i-1} &\equiv u_i(R_1(A))\,. \end{aligned}$$

Следовательно, соотношение (5) справедливо для $i = 1, \ldots, n$, откуда вытекает $z \equiv u(R_1(A))$. Таким же путем доказывается отношение конгруэнтности (3').

Из доказанного мы получаем специально:

Следствие 2. Пусть интервал $\langle u \cap v, u \cup v\rangle$ не содержит никакого интервала типа α. Тогда существует элемент z, удовлетворяющий системе отношений конгруэнтности (4).

Следствие 3. Пусть всякий интервал типа α идеала A проективен некоторому интервалу типа α идеала B, и наоборот. Тогда существует элемент z, удовлетворяющий соотношениям (4).

Следствие 4. Пусть никакой из идеалов A, B не содержит интервала типа α. Тогда существует элемент z, удовлетворяющий соотношениям (4).

Следующая теорема о модулярных структурах не находится в связи с решением систем отношений конгруэнтности, но она вытекает легким способом из соображений части 1. Прежде всего введем следующее определение:

Определение 6. *Скажем, что структура S дискретна, если все цепи структуры S, которые имеют наименьший и наибольший элемент, конечны.*

Теорема 8. *Пусть S — дискретная модулярная структура. Производящие разбиения на S соответствуют однозначно множествам классов проективных простых интервалов, которые они анулируют. Итак производящие разбиения на S образуют Булеву алгебру.*

Доказательство. Пусть S — дискретная модулярная структура, пусть R — некоторое производящее разбиение на S. Множество классов тех проективных простых интервалов, которые анулируются в разбиении R, обозначим через $\overline{\mathfrak{A}}$. Разбиении R поставим в соответствие множество классов $\overline{\mathfrak{A}}$. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех простых интервалов, классы которых принадлежат $\overline{\mathfrak{A}}$. Множеству $\overline{\mathfrak{A}}$ поставим в соответствие производящее разбиение $R_5(\mathfrak{A})$. К доказательству одно-однозначности отображения достаточно доказать равенство $R = R_5(\mathfrak{A})$.

Пусть $x \equiv y(R)$. Значит, все простые интервалы интервала $\langle x \cap y,\ x \cup y \rangle$ принадлежат $\mathfrak{A}$. Из этого следует $x \equiv y(R_5(\mathfrak{A}))$. Обратно, пусть $x \equiv y(R_5(\mathfrak{A}))$. Тогда существуют элементы $c_0, c_1, \ldots, c_n$, $c_0 = x$, $c_n = y$, удовлетворяющие условиям определения 1δ. Всякий интервал p_i, ограниченный елементами c_{i-1}, c_i[18]), проектитен некоторому интервалу $p_i' \in \mathfrak{A}$. Пусть $p_i' = \langle c_{i-1}', c_i' \rangle$. Ввиду предположения, $c_{i-1}' \equiv c_i'(R)$, значит, также $c_{i-1} \equiv c_i(R)$, откуда следует $x \equiv y(R)$, ч. т. д.

Замечание. Предыдущая теорема является обобщением теоремы 10, гл. V, [2]. Г. Биркгоф доказал ее для модулярных структур конечной длины. Доказательство ведется окольным путем, при помощи определения некоторой изотонной функции $v(x)$ на S. Этот прием доказательства не применим для структур, не имеющих ни наименьшего, ни наибольшего элемента.

Литература

[1] *V. K. Balachandran:* The Chinese remainder theorem for the distributive lattices. J. Indian Math. Soc. (N. S.) 13, 76—80 (1949).

[2] a) *G. Birkhoff:* Lattice theory, N. York 1948.

b) Г. Биркгоф: Теория структур, Москва 1952.

[3] *P. Dubreil:* Algèbre, Paris, 1946.

Summary

SYSTEM OF CONGRUENCE RELATIONS ON LATTICES

JÁN JAKUBÍK, Košice.

(Received February 1, 1954.)

In number theory we know necessary and sufficient conditions for the system of congruence relations

$$x \equiv a_i \pmod{m_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

to be solvable. They are given by the so-called Chinese remainder theorem. An analogical problem for the congruence relations on distributive lattices was put by V. K. Balachandran in [1]. The problem is a follows:

(B1) *Let S be distributive lattice with minimal element, let A, B be ideals in S, let u, $v \in S$. Find necessary and sufficient condition for elements u, v, that the system of congruence relations*

$$x \equiv u \pmod{A} \qquad x \equiv v \pmod{B} \tag{1}$$

should be solvable.

---

[18]) Из леммы 6 следует, что p_i есть простой интервал.

The most important result of the mentioned author is:

(B) *The system (1) is solvable if and only if* $u \equiv v$ (mod $A \cap B$).

The problem **(B1)** can be generalized as follows: the determining partition R(A)[1], belonging to ideal A of distributive lattice S, is, (as it can be easily proved) minimal of all determining partitions on S, in which all elements of ideal A belong to the same class. More generally, let A be any set in lattice S. It is quite natural to define analogically ,,minimal" partition $R(A)$ as minimal of all determining partitions, in which all elements of set A belong to the same class. ,,Minimal determining partitions" can be defined for some lattice more constructively, that is (for distributive lattices) algebraically by means of lattice operations $\cap$ and $\cup$ or (for modular lattices) by means of relation of projectivity of intervals.

Section 1 deals with the most important properties of ,,minimal partions". In section 2 we study the systems of two congruence relations for distributive lattices. We prove that the existence of the minimal element in S is not necessary for the theorem **B** to be true. Further we consider the system

$$x \equiv u \quad (R_1(A)) \qquad x \equiv v \ (R_1(B)) \tag{2}$$

where A, B are convex sublattices in S and R_1 (A) resp. $R_1(B)$ is minimal determining partition, in which all elements of sublattice A resp. B belong to the same class.

For the existence of a solution of the system (2) the following condition is evidently necessary

$$u \equiv v(R_1(A) \cup R_1(B)) \,. \tag{3}$$

This condition however, as it could be proved by simple examples, is not sufficient. The question is: what further conditions besides (3) must be satisfied for the existence of a solution of (2). With other words: what conditions must be satisfied, that the existence of a solution of (2) should follow from the relation (3)?

The following theorems are proved (lattice S is distributive everywhere):

Let A and B be convex sublattices of S. The necessary and sufficient condition that the existence of a solution of (2) should follow from relation (3) for any A, B is that the lattice S be relatively complemented.

Let u, v be two fixed elements of S, A and B two convex sublattices of S. The necessary and sufficient condition that the existence of a solution of (2) should follow from relation (3) is that sublattice $\langle u \cap v, u \cup v\rangle$ be a Boolean algebra.

Let A and B be two nondisjoint convex sublattices of S. The necessary and sufficient condtition that the existence of a solution of (2) should follow from relation (3) for any $u, v \in S$ is that the sublattice (A, B) generated by A and B

[1]) By a determining partition is meant a partition defined by a congruence relation.

be the direct union of its sublattices A and B. For disjoint A and B, the condition is more complicated. (For definitions of the terms used, see definitions 3 and 4.)

In section 3 the system (1) for modular lattices is studied. There have been found only sufficient conditions for the existence of a solution. The scheme of the method is as follows: first we construct the minimal determining partition R_0 on S, whose lattice of classes is distributive. This lattice of classes we denote by S'. Some ideals A', $B' \subset S'$ belong to ideals A, $B \subset S$. In S', the theorem **(B)** is true. By pronouncing this theorem ,,in the language of elements of S" we obtain the sufficient conditions for the solvability.

At the end a theorem of G. Birkhoff ([2], theorem 10, chap. VI) is generalized. This generalization follows simply from the considerations of section 1.