Jiří Seitz; Karel Winkelbauer

Заметка к статье Колмогорова и Прохорова „О суммах случайного числа случайных слагаемых”

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 3 (1953), No. 1, 89–91

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100072

Чехословацкий математический журнал, т. 3 (78) 1953

ЗАМЕТКА К СТАТЬЕ КОЛМОГОРОВА И ПРОХОРОВА „О СУММАХ СЛУЧАЙНОГО ЧИСЛА СЛУЧАЙНЫХ СЛАГАЕМЫХ“

ИРЖИЙ СЕЙЦ и КАРЕЛ ВИНКЕЛЬБАУЭР (Jiří Seitz a Karel Winkelbauer), Прага.

(Поступило в редакцию 12/VI 1952 г.)

Авторы дают примеры противоречащие теоремам 3, 4 и 5 статьи [1]. Сверх того, высказывают видоизмененные теоремы в виде, подходящем для приложений к последовательному анализу.

В статье *Колмогорова* и *Прохорова* [1] приведенные теоремы 3, 4 и 5 в общем случае не справедливы, как видно из следующих примеров (при обозначениях Колмогорова и Прохорова).

Примеры. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$$

последовательность независимых случайных величин таких, что

$$\mathsf{P}\{\xi_n = 1\} = \mathsf{P}\{\xi_n = -1\} = \tfrac{1}{2}, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Определим случайную величину ν следующим образом:

$$\begin{aligned} \nu = 1, \quad &\text{если} \quad \xi_1 = 1 \quad \text{и} \quad \xi_2 = -1 \\ &\text{или} \quad \xi_1 = -1 \quad \text{и} \quad \xi_2 = 1; \\ \nu = 2, \quad &\text{если} \quad \xi_1 = 1 \quad \text{и} \quad \xi_2 = 1 \\ &\text{или} \quad \xi_1 = -1 \quad \text{и} \quad \xi_2 = -1. \end{aligned}$$

Тогда предположения теоремы 5 выполнены, а

$$\mathsf{M}(\zeta_\nu - A_\nu)^2 = \tfrac{5}{2} \neq \tfrac{3}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n B_n.$$

Если положим

$$\xi_n^1 = \xi_n, \quad \xi_n^2 = \xi_n, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

то предположения теоремы 3 и также теоремы 4 для векторов (ξ_n^1, ξ_n^2) выполнены, а

$$\mathsf{M}\{(\zeta_\nu^1 - \nu a^1)(\zeta_\nu^2 - \nu a^2)\} = \mathsf{M}\{(\zeta_\nu^1 - A_\nu^1)(\zeta_\nu^2 - A_\nu^2)\} = \tfrac{5}{2},$$

$$b^{12}\, \mathsf{M}(\nu) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n B_n^{12} = \tfrac{3}{2}.$$

Эти примеры можем привести потому, что в доказательстве теоремы 4 определены вспомогательные величины φ_n, которые могут при $n > m$ зависеть от событий $\{\nu = m\}$ и, следовательно, не можем пользоваться теоремой 2, приведенной в статье [1]. Теоремы справедливы, если еще выполнено условие, что величины φ_n независимы от событий $\{\nu = m\}$ при $n > m$.

Чтобы дать этим теоремам вид, пригодный для применения в последовательном анализе, рассмотрим случай, когда величина ν удовлетворяет еще следующим требованиям:

1. $\mathbf{P}\{\nu = 0\} = 0$;

2. для каждого n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) существует множество V_n (а) $2n$-мерного; (б) n-мерного евклидового пространства такое, что

$$\{\nu = n\} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)^{-1} (V_n), \tag{I}$$

причем через выражение в правой части (I) обозначено множество всех элементарных событий, для которых вектор $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ лежит в V_n. Если положить для $P_n \neq 0$

$$C_n^{ij} = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{M}\{(\xi_m^i - a_m^i)(\xi_m^j - a_m^j)/\nu \geqq n\}$$

(соотв. без индекса m при величинах a) а для $P_n = 0$ $C_n^{ij} = 0$, можно сформулировать теоремы 3 и 4 следующим образом:

Теорема 3. *Если случайная величина ν удовлетворяет требованиям* (1) *и* (2а), *векторы $\xi_n = (\xi_n^1, \xi_n^2)$ взаимно независимы, существуют математические ожидания*

$$\mathbf{M}(\xi_n^i) = a^i, \quad \mathbf{M}\{(\xi_n^i - a^i)(\xi_n^j - a^j)\} = b^{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

где a^i и b^{ij} не зависят от n, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P_n(\sqrt{C_n^{11}} + \sqrt{C_n^{22}})$ сходится, то существует

$$\mathbf{M}\{(\zeta_\nu^1 - \nu a^1)(\zeta_\nu^2 - \nu a^2)\} = b^{12}\, \mathbf{M}(\nu).$$

Теорема 4. *Если случайная величина ν удовлетворяет требованиям* (I) *и* (2а), *векторы $\xi_n = (\xi_n^1, \xi_n^2)$ взаимно независимы, существуют математические ожидания*

$$\mathbf{M}(\xi_n^i) = a_n^i, \quad \mathbf{M}\{(\xi_n^i - a_n^i)(\xi_n^j - a_n^j)\} = b_n^{ij}; \quad i, j = 1, 2,$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_n(\sqrt{b_n^{11} C_n^{22}} + \sqrt{b_n^{22} C_n^{11}})$$

сходится, то существует

$$\mathbf{M}\{(\zeta_\nu^1 - A_\nu^1)(\zeta_\nu^2 - A_\nu^2)\} = \sum_{n=1}^{\infty} p_n B_n^{12}.$$

При формулировке теоремы 5 мы употребляем обозначения

$$C_n = \sum_{m=1}^{n} \mathbf{M}\{(\xi_m - a_m)^2/\nu \geqq n\} \text{ при } P_n \neq 0$$

и $C_n = 0$ при $P_n = 0$.

Теорема 5. *Если случайная величина ν удовлетворяет требованиям* (1) *и* (2б), *величины ξ_n взаимно независимы, существуют математические ожидания $\mathbf{M}(\xi_n) = a_n$, $\mathbf{M}(\xi_n - a_n)^2 = b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} P_n \sqrt{b_n C_n}$ сходится, то существует*

$$\mathbf{M}(\zeta_\nu - A_\nu)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} p_n B_n.$$

ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Н. Колмогоров-Ю. В. Прохоров:* О суммах случайного числа случайных слагаемых, Усп. матем. наук, том *4* (1949), вып. *4* (32), 168—172.

Summary.

REMARK CONCERNING A PAPER OF KOLMOGOROV AND PROCHOROV.

J. SEITZ and K. WINKELBAUER, Praha.

(Received june 12th, 1952.)

In this note, we first show, by means of examples, that the statements of some theorems given in paper [1] are inexact. Further, we give modified statements applicable to the theory of sequential analysis.